
Formeln und Tabellen Maschinenbau

Alfred Böge (Hrsg.)

Formeln und Tabellen Maschinenbau

Für Studium und Praxis

3., korrigierte Auflage

Mit über 2000 Stichwörtern

Autoren

Alfred Böge :
Mathematik, Thermodynamik, Fluidmechanik,
Festigkeitslehre, Zerspantechnik

Alfred Böge/Wolfgang Böge:
Maschinenelemente

Gert Böge:
Physik, Mechanik

Peter Franke:
Elektrotechnik

Wolfgang Weißbach:
Chemie, Werkstofftechnik

Herausgeber
Alfred Böge
Braunschweig, Deutschland

Peter Franke
Braunschweig, Deutschland

Wolfgang Böge
Wolfenbüttel, Deutschland

Wolfgang Weißbach
Braunschweig, Deutschland

Gert Böge
Hannover, Deutschland

ISBN 978-3-8348-1915-4
DOI 10.1007/978-3-8348-2313-7

ISBN 978-3-8348-2313-7 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden 2007, 2009, 2012

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Lektorat: Thomas Zipsner / Imke Zander

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-vieweg.de

Alfred Böge †

Am 21. Juni 2012 verstarb der Herausgeber und Autor Alfred Böge im Alter von 92 Jahren. Für seinen Verlag Springer Vieweg schrieb er zahlreiche Lehr- und Fachbücher, darunter so bekannte und geschätzte Werke wie das Handbuch Maschinenbau und das Lehr- und Lernsystem zur Technische Mechanik. In seiner über fünfzig Jahre währenden Schaffenszeit beim Verlag Springer Vieweg wurde „der Böge“ zum Markenzeichen und erreichte eine große Leserschaft bei Studierenden und Lehrern. Der Verlag und die mit ihm verbundenen Autorinnen und Autoren trauern um Alfred Böge.

Alle seine Bücher zeichneten sich durch eine ausgefeilte Didaktik und Methodik aus. Darin gelang es ihm, auch äußerst komplexe technische Zusammenhänge einfach und präzise darzulegen. Er half damit Generationen von Studierenden, die für ihr Berufsleben wichtigen Grundlagen der Technik begreifen und beherrschen zu können – bis heute.

Viele Jahre unterrichtete Alfred Böge an der Technikerakademie Braunschweig. Als Lehrer, der selbst nie aufgehört hat weiterzulernen, war er allen seinen Kollegen ein nimmermüder und kompetenter Ratgeber.

Alfred Böge war ein engagierter Herausgeber, ein Denker und Macher – und hatte dabei stets seine Leser im Blick. Klar und verständlich, so sollte jedes seiner Bücher formuliert sein – dies war sein Anspruch an sich selbst.

Gemeinsam werden wir sein Lebenswerk in seinem Sinne fortführen.

Seine Söhne

Wolfgang und Gert Böge

Vorwort

Ingenieure und Techniker in Ausbildung und Beruf finden hier Größengleichungen und Formeln, Diagramme, Tabellenwerte, Regeln und Verfahren, die zum Lösen von Aufgaben aus den technischen Grundlagenfächern erforderlich sind.

Die Berechnungs- und Dimensionierungsgleichungen aus Mathematik, Physik, Chemie, Werkstofftechnik, Elektrotechnik, Thermodynamik, Mechanik, Fluidmechanik, Festigkeitslehre, Maschinenelemente, Zerspantechnik sind in Tabellen so geordnet, dass sie der speziellen Aufgabe leicht zugeordnet werden können:

- das umfangreiche Sachwortverzeichnis führt schnell zu den gesuchten technisch-physikalischen Größen
- die zugehörige Tabelle zeigt die erforderlichen Größengleichungen
- die zusätzlichen Erläuterungen sichern die richtige Anwendung der Gleichungen, Diagramme und Tabellenwerte

Die vorliegende korrigierte 3. Auflage berücksichtigt die Verbesserungsvorschläge der Lehrer und Studierenden, denen ich danken möchte.

Herausgeber, Autoren und Verlag sind für Hinweise zur Verbesserung des Werkes dankbar. Verwenden Sie dazu bitte die E-Mail-Adresse:

w_boege@t-online.de

Wolfenbüttel, im August 2012

Wolfgang Böge

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematik	1
1.1	Mathematische Zeichen	1
1.2	Griechisches Alphabet	2
1.3	Häufig gebrauchte Konstanten	2
1.4	Multiplikation, Division, Klammern, Binomische Formeln, Mittelwerte	3
1.5	Potenzrechnung (Potenzieren)	4
1.6	Wurzelrechnung (Radizieren)	5
1.7	Logarithmen	6
1.8	Komplexe Zahlen	7
1.9	Quadratische Gleichungen	8
1.10	Wurzel-, Exponential-, Logarithmische und Goniometrische Gleichungen in Beispielen	9
1.11	Graphische Darstellung der wichtigsten Relationen (schematisch)	10
1.12	Flächen (A Flächeninhalt, U Umfang)	12
1.13	Fläche A , Umkreisradius r und Inkreisradius ϱ einiger regelmäßiger Vielecke	13
1.14	Körper (V Volumen, O Oberfläche, M Mantelfläche)	14
1.15	Rechtwinkliges Dreieck	16
1.16	Schiefwinkliges Dreieck	17
1.17	Einheiten des ebenen Winkels	19
1.18	Trigonometrische Funktionen (Graphen in 1.11)	20
1.19	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	21
1.20	Arcusfunktionen	23
1.21	Hyperbelfunktionen	25
1.22	Areafunktionen	26
1.23	Analytische Geometrie: Punkte in der Ebene	26
1.24	Analytische Geometrie: Gerade	27
1.25	Analytische Geometrie: Lage einer Geraden im rechtwinkligen Achsenkreuz	28
1.26	Analytische Geometrie: Kreis	29
1.27	Analytische Geometrie: Parabel	30
1.28	Analytische Geometrie: Ellipse und Hyperbel	30
1.29	Reihen	32
1.30	Potenzreihen	33
1.31	Differenzialrechnung: Grundregeln	35
1.32	Differenzialrechnung: Ableitungen elementarer Funktionen	36
1.33	Integrationsregeln	36
1.34	Grundintegrale	38
1.35	Lösungen häufig vorkommender Integrale	38
1.36	Uneigentliche Integrale	42
1.37	Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung	42
1.38	Geometrische Grundkonstruktionen	49
2	Physik	55
2.1	Physikalische Größen, Definitionsgleichungen und Einheiten	55
2.1.1	Mechanik	55
2.1.2	Thermodynamik	57
2.1.3	Elektrotechnik	58
2.1.4	Optik	59

2.2	Allgemeine und atomare Konstanten	59
2.3	Umrechnungstafel für metrische Längeneinheiten	60
2.4	Vorsatzzeichen zur Bildung von dezimalen Vielfachen und Teilen von Grundeinheiten oder hergeleiteten Einheiten mit selbstständigem Namen	60
2.5	Umrechnungstafel für Leistungseinheiten	60
2.6	Schallgeschwindigkeit c , Dichte ρ und Elastizitätsmodul E einiger fester Stoffe	61
2.7	Schallgeschwindigkeit c und Dichte ρ einiger Flüssigkeiten	61
2.8	Schallgeschwindigkeit c , Verhältnis $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ einiger Gase bei $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$	61
2.9	Schalldämmung von Trennwänden	61
2.10	Elektromagnetisches Spektrum	62
2.11	Brechzahlen n für den Übergang des Lichtes aus dem Vakuum in optische Mittel	62
3	Chemie	63
3.1	Atombau und Periodensystem	63
3.2	Metalle	67
3.3	Nichtmetalle	69
3.4	Elektronegativität	69
3.5	Chemische Bindungen, Wertigkeitsbegriffe	70
3.6	Systematische Benennung anorganischer Verbindungen	73
3.7	Systematische Benennung von Säuren und Säureresten	74
3.8	Systematische Benennung organischer Verbindungen	74
3.9	Benennung von funktionellen Gruppen	77
3.10	Ringförmige Kohlenwasserstoffe	77
3.11	Basen, Laugen	78
3.12	Gewerbliche und chemische Benennung von Chemikalien, chemische Formeln	79
3.13	Säuren	80
3.14	Chemische Reaktionen, Gesetze, Einflussgrößen	80
3.15	Ionenlehre	83
3.16	Elektrochemische Größen und Gesetze	85
3.17	Größen der Stöchiometrie	87
3.18	Beispiele für stöchiometrische Rechnungen	89
3.19	Energieverhältnisse bei chemischen Reaktionen	91
3.20	Heizwerte von Brennstoffen	92
3.21	Bildungs- und Verbrennungswärme einiger Stoffe	92
4	Werkstofftechnik	93
4.1	Werkstoffprüfung	93
4.2	Eisen-Kohlenstoff-Diagramm	96
4.3	Bezeichnung der Stähle nach DIN EN 10027	97
4.4	Baustähle DIN EN 10025-2/05	99
4.5	Schweißgeeignete Feinkornbaustähle	100
4.6	Warmgewalzte Flacherzeugnisse aus Stählen mit hoher Streckgrenze zum Kaltumformen, thermomechanisch gewalzte Stähle DIN EN 10149-2/95	100
4.7	Vergütungsstähle DIN EN 10083/06	100
4.8	Einsatzstähle DIN EN 10084/98	101
4.9	Nitrierstähle DIN EN 10085/01	101
4.10	Stahlguss DIN EN 10293/05	101
4.11	Bezeichnung der Gusseisensorten DIN EN 1560/97	101

4.12	Gusseisen mit Lamellengraphit GJL DIN EN 1561/97	102
4.13	Gusseisen mit Kugelgraphit GJS DIN 1563/05	103
4.14	Temperguss GJM DIN EN 1562/06.....	103
4.15	Bainitisches Gusseisen mit Kugelgraphit DIN EN 1564/06	104
4.16	Gusseisen mit Vermiculargraphit GJV VDG-Merkblatt W-50/02	104
4.17	Bezeichnung von Aluminium und Aluminiumlegierungen	104
4.18	Aluminiumknetlegierungen, Auswahl.....	105
4.19	Aluminiumgusslegierungen, Auswahl aus DIN EN 1706/98	105
4.20	Bezeichnung von Kupfer und Kupferlegierungen nach DIN 1412/95	106
4.21	Zustandsbezeichnungen nach DIN EN 1173/95	106
4.22	Kupferknetlegierungen, Auswahl.....	107
4.23	Kupfergusslegierungen, Auswahl nach DIN EN 1982/98	107
4.24	Anorganisch nichtmetallische Werkstoffe.....	108
4.25	Bezeichnung von Si-Carbid, SiC und Siliciumnitrid, Si ₃ N ₄ nach der Herstellungsart	108
4.26	Druckgusswerkstoffe.....	108
4.27	Lagermetalle und Gleitwerkstoffe, Übersicht über die Legierungssysteme	109
4.28	Lagermetalle auf Cu-Basis (DKI).....	110
4.29	Kurzzeichen für Kunststoffe und Verfahren, Auswahl	110
4.30	Thermoplastische Kunststoffe, Plastomere, Auswahl	112
5	Elektrotechnik	115
5.1	Grundbegriffe der Elektrotechnik.....	115
5.1.1	Elektrischer Widerstand	115
5.1.2	Elektrische Leistung und Wirkungsgrad	116
5.1.3	Elektrische Energie	117
5.1.4	Elektrowärme	118
5.2	Gleichstromtechnik.....	118
5.2.1	Ohm'sches Gesetz, nicht verzweigter Stromkreis	118
5.2.2	Kirchhoff'sche Sätze	119
5.2.3	Ersatzschaltungen des Generators	119
5.2.4	Schaltungen von Widerständen und Quellen	120
5.2.5	Messschaltungen	123
5.2.6	Spannungsteiler	124
5.2.7	Brückenschaltung	124
5.3	Elektrisches Feld und Kapazität	125
5.3.1	Größen des homogenen elektrostatischen Feldes.....	125
5.3.2	Kapazität von Leitern und Kondensatoren	126
5.4	Magnetisches Feld und Induktivität	128
5.4.1	Größen des homogenen magnetischen Feldes	128
5.4.2	Spannungserzeugung	130
5.4.3	Kraftwirkung	132
5.4.4	Richtungsregeln	133
5.4.5	Induktivität von parallelen Leitern und Luftspulen	135
5.4.6	Induktivität von Spulen mit Eisenkern	136
5.4.7	Drosselspule	137
5.4.8	Schaltungen von Induktivitäten	138
5.4.9	Einphasiger Transformator.....	138
5.5	Wechselstromtechnik	139
5.5.1	Kennwerte von Wechselgrößen	139
5.5.2	Passive Wechselstrom-Zweipole an sinusförmiger Wechselspannung..	141
5.5.3	Umwandlung passiver Wechselstrom-Zweipole in gleichwertige Schaltungen	146
5.5.4	Blindleistungskompensation.....	147

5.6	Drehstromtechnik	148
5.6.1	Drehstromnetz.....	148
5.6.2	Stern- und Dreieckschaltung	148
5.6.3	Stern-Dreieck-Umwandlung	150
5.7	Elementare Bauteile der Elektronik	151
5.7.1	Halbleiterdioden	151
5.7.2	Transistoren	155
5.7.3	Thyristoren	157
6	Thermodynamik	161
6.1	Grundbegriffe	161
6.2	Wärmeausdehnung	162
6.3	Wärmeübertragung	163
6.4	Gasmechanik	166
6.5	Gleichungen für Zustandsänderungen und Carnot'scher Kreisprozess.....	167
6.6	Gleichungen für Gasgemische	171
6.7	Temperatur-Umrechnungen	172
6.8	Temperatur-Fixpunkte	172
6.9	Spezifisches Normvolumen v_n und Dichte ρ_n (0 °C und 101 325 N/m ²)	172
6.10	Mittlere spezifische Wärmekapazität c_m fester und flüssiger Stoffe zwischen 0 °C und 100 °C in J / (kg K).....	173
6.11	Mittlere spezifische Wärmekapazität c_p , c_v in J / (kg K) nach <i>Justi</i> und <i>Lüder</i>	173
6.12	Schmelzenthalpie q_s fester Stoffe in J / kg bei $p = 101\,325\text{ N/m}^2$	173
6.13	Verdampfungs- und Kondensationsenthalpie q_v in J / kg bei 101 325 N/m ²	174
6.14	Schmelzpunkt fester Stoffe in °C bei $p = 101\,325\text{ N/m}^2$	174
6.15	Siede- und Kondensationspunkt einiger Stoffe in °C bei $p = 101\,325\text{ N/m}^2$	174
6.16	Längenausdehnungskoeffizient α_l fester Stoffe in 1/K zwischen 0 °C und 100 °C (Volumenausdehnungskoeffizient $\alpha_v \approx 3 \alpha_l$)	174
6.17	Volumenausdehnungskoeffizient α_v von Flüssigkeiten in 1/K bei 18 °C	174
6.18	Wärmeleitahlen λ fester Stoffe bei 20 °C in $10^3 \frac{\text{J}}{\text{mhK}}$; Klammerwerte in $\frac{\text{W}}{\text{mK}}$..	175
6.19	Wärmeleitahlen λ von Flüssigkeiten bei 20 °C in $\frac{\text{J}}{\text{mhK}}$; Klammerwerte in $\frac{\text{W}}{\text{mK}}$	175
6.20	Wärmeleitahlen λ von Gasen in Abhängigkeit von der Temperatur (Ungefährwerte) in $\frac{\text{J}}{\text{mhK}}$ Klammerwerte in $\frac{\text{W}}{\text{mK}}$	175
6.21	Wärme-Übergangszahlen α für Dampferzeuger bei normalen Betriebs- bedingungen (Mittelwerte)	175
6.22	Wärmedurchgangszahlen k bei normalem Kesselbetrieb (Mittelwerte).....	176
6.23	Emissionsverhältnis ε und Strahlungszahl C bei 20 °C	176
6.24	Spezifische Gaskonstante R_i , Dichte ρ und Verhältnis $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ einiger Gase	176
7	Mechanik fester Körper	177
7.1	Freimachen der Bauteile	177
7.2	Zeichnerische Bestimmung der Resultierenden F_r	178
7.3	Rechnerische Bestimmung der Resultierenden F_r	178
7.4	Zeichnerische Bestimmung unbekannter Kräfte	180
7.5	Rechnerische Bestimmung unbekannter Kräfte	181
7.6	Fachwerke.....	181
7.7	Schwerpunkt	182

7.8	Guldin'sche Regeln	184
7.9	Reibung.....	185
7.10	Reibung in Maschinenelementen	186
7.11	Bremsen.....	188
7.12	Gleitreibungszahl μ und Haftreibungszahl μ_0	190
7.13	Wirkungsgrad η_r des Rollenzugs in Abhängigkeit von der Anzahl n der tragenden Seilstränge	190
7.14	Geradlinige gleichmäßig beschleunigte (verzögerte) Bewegung	190
7.15	Wurfgleichungen	192
	7.15.1 Horizontaler Wurf (ohne Luftwiderstand).....	192
	7.15.2 Wurf schräg nach oben (ohne Luftwiderstand).....	192
7.16	Gleichförmige Drehbewegung	192
7.17	Gleichmäßig beschleunigte (verzögerte) Kreisbewegung	193
7.18	Sinusschwingung (harmonische Schwingung)	194
7.19	Pendelgleichungen.....	196
7.20	Schubkurbelgetriebe	197
7.21	Gerader zentrischer Stoß.....	198
7.22	Mechanische Arbeit W	199
7.23	Leistung P , Übersetzung i und Wirkungsgrad η	200
7.24	Dynamik der Verschiebebewegung (Translation).....	201
7.25	Dynamik der Drehung (Rotation).....	202
7.26	Gleichungen für Trägheitsmomente J (Massenmomente 2. Grades).....	203
7.27	Gegenüberstellung einander entsprechender Größen und Definitionsgleichungen für Schiebung und Drehung	204
8	Fluidmechanik	205
8.1	Statik der Flüssigkeiten	205
8.2	Strömungsgleichungen	206
8.3	Ausflussgleichungen	208
8.4	Widerstände in Rohrleitungen	209
8.5	Dynamische Zähigkeit η , kinematische Zähigkeit ν und Dichte von Wasser.....	211
8.6	Staudruck q in N/m^2 und Geschwindigkeit w in m/s für Luft und Wasser	211
8.7	Absolute Wandrauigkeit k	211
8.8	Widerstandszahlen ζ für plötzliche Rohrverengung.....	212
8.9	Widerstandszahlen ζ für Ventile	212
8.10	Widerstandszahlen ζ von Leitungsteilen.....	212
9	Festigkeitslehre	215
9.1	Grundlagen	215
9.2	Zug- und Druckbeanspruchung.....	217
9.3	Biegebeanspruchung.....	218
9.4	Flächenmomente 2. Grades I , Widerstandsmomente W , Trägheitsradius i	219
9.5	Elastizitätsmodul E und Schubmodul G verschiedener Werkstoffe in N/mm^2	220
9.6	Träger gleicher Biegebeanspruchung	221
9.7	Stützkräfte, Biegemomente und Durchbiegungen.....	222
9.8	Axiale Flächenmomente I , Widerstandsmomente W , Flächeninhalte A und Trägheitsradius i verschieden gestalteter Querschnitte für Biegung und Knickung	225
9.9	Warmgewalzter rundkantiger U-Stahl.....	228
9.10	Warmgewalzter gleichschenkliger rundkantiger Winkelstahl.....	229
9.11	Warmgewalzter ungleichschenkliger rundkantiger Winkelstahl nach EN 10056-1	230
9.12	Warmgewalzte schmale I-Träger nach DIN 1025-1 (Auszug).....	231
9.13	Warmgewalzte I-Träger, IPE-Reihe	232

9.14	Knickung im Maschinenbau	233
9.15	Grenzschlankheitsgrad λ_0 für Euler'sche Knickung und Tetmajer-Gleichungen ..	234
9.16	Abscheren und Torsion	235
9.17	Widerstandsmoment W_p (W_t) und Flächenmoment I_p (Drillungswiderstand I_t)....	237
9.18	Festigkeitswerte für Walzstahl.....	238
9.19	Festigkeitswerte in N/mm ² für verschiedene Stahlsorten	238
9.20	Festigkeitswerte in N/mm ² für verschiedene Gusseisen-Sorten	238
9.21	Zusammengesetzte Beanspruchung bei gleichartigen Spannungen.....	239
9.22	Zusammengesetzte Beanspruchung bei ungleichartigen Spannungen.....	240
9.23	Beanspruchung durch Fliehkraft.....	241
9.24	Flächenpressung, Lochleibungsdruck, Hertz'sche Pressung	242
9.25	Hohlzylinder unter Druck	244
10	Maschinenelemente	245
10.1	Toleranzen und Passungen	245
10.1.1	Normzahlen.....	245
10.1.2	Grundbegriffe zu Toleranzen und Passungen.....	246
10.1.3	Eintragung von Toleranzen in Zeichnungen.....	248
10.1.4	Grundtoleranzen der Nennmaßbereiche in μm	248
10.1.5	Allgemeintoleranzen für Längenmaße nach DIN ISO 2768-1	249
10.1.6	Allgemeintoleranzen für Winkelmaße nach DIN ISO 2768-1.....	249
10.1.7	Allgemeintoleranzen für Fasen und Rundungshalbmesser nach DIN ISO 2768-1.....	249
10.1.8	Allgemeintoleranzen für Form und Lage nach DIN ISO 2768-2	249
10.1.9	Symbole für Form und Lagetoleranzen nach DIN ISO 1101	250
10.1.10	Kennzeichnung der Oberflächenbeschaffenheit nach DIN EN ISO 1302	251
10.1.11	Mittenrauwerte R_a in μm	251
10.1.12	Verwendungsbeispiele für Passungen	252
10.1.13	Ausgewählte Passtoleranzfelder und Grenzabmaße (in μm) für das System Einheitsbohrung (H)	253
10.1.14	Passungsauswahl, empfohlene Passtoleranzen, Spiel-, Übergangs- und Übermaßtoleranzfelder in μm nach DIN ISO 286.....	255
10.2	Schraubenverbindungen	257
10.2.1	Berechnung axial belasteter Schrauben ohne Vorspannung.....	257
10.2.2	Berechnung unter Last angezogener Schrauben	257
10.2.3	Berechnung einer vorgespannten Schraubenverbindung bei axial wirkender Betriebskraft.....	258
10.2.4	Kräfte und Verformungen in zentrisch vorgespannten Schraubenverbindungen	260
10.2.5	Berechnung vorgespannter Schraubenverbindungen bei Aufnahme einer Querkraft	265
10.2.6	Berechnung von Bewegungsschrauben	266
10.2.7	Richtwerte für die zulässige Flächenpressung bei Bewegungsschrauben.....	267
10.2.8	Reibungszahlen und Reibungswinkel für Trapezgewinde	267
10.2.9	$R_{p0,2}$ 0,2-Dehngrenze der Schraube	267
10.2.10	Geometrische Größen an Sechskantschrauben	268
10.2.11	Maße an Senkschrauben mit Schlitz und an Senkungen für Durchgangsbohrungen.....	268
10.2.12	Einschraublänge l_a für Sacklochgewinde	269
10.2.13	Metrisches ISO-Gewinde nach DIN 13.....	269
10.2.14	Metrisches ISO-Trapezgewinde nach DIN 103	270

10.3	Federn.....	271
10.3.1	Federkennlinie, Federrate, Federarbeit, Eigenfrequenz.....	271
10.3.2	Metallfedern.....	273
10.3.3	Gummifedern.....	285
10.4	Achsen, Wellen und Zapfen.....	286
10.4.1	Achsen.....	286
10.4.2	Wellen.....	287
10.4.3	Stützkräfte und Biegemomente an Getriebewellen.....	289
10.4.4	Berechnung der Tragfähigkeit nach DIN 743.....	291
10.5	Nabenverbindungen.....	296
10.5.1	Kraftschlüssige (reibschlüssige) Nabenverbindungen (Beispiele).....	296
10.5.2	Formschlüssige Nabenverbindungen (Beispiele).....	297
10.5.3	Zylindrische Pressverbände.....	298
10.5.4	Keglige Pressverbände (Kegelsitzverbindungen).....	304
10.5.5	Maße für kegliche Wellenenden mit Außengewinde.....	306
10.5.6	Richtwerte für Nabenabmessungen.....	306
10.5.7	Klemmsitzverbindungen.....	307
10.5.8	Keilsitzverbindungen.....	308
10.5.9	Ringfederspannverbindungen, Maße, Kräfte und Drehmomente.....	309
10.5.10	Ermittlung der Anzahl n der Spannelemente und der axialen Spannkraft F_a	310
10.5.11	Längsstiftverbindung.....	311
10.5.12	Passfederverbindungen.....	312
10.5.13	Keilwellenverbindung.....	314
10.6	Zahnradgetriebe.....	315
10.6.1	Kräfte am Zahnrad.....	315
10.6.2	Einzelrad- und Paarungsgleichungen für Gerad- und Schrägstirnräder.....	318
10.6.3	Einzelrad- und Paarungsgleichungen für Kegelräder.....	321
10.6.4	Einzelrad- und Paarungsgleichungen für Schneckengetriebe.....	323
10.6.5	Wirkungsgrad, Kühlöldurchsatz und Schmierarten der Getriebe.....	326
11	Zerspantechnik.....	327
11.1	Drehen und Grundbegriffe der Zerspantechnik.....	327
11.1.1	Bewegungen, Kräfte, Schnittgrößen und Spanungsgrößen.....	327
11.1.2	Richtwerte für die Schnittgeschwindigkeit v_c beim Drehen.....	331
11.1.3	Werkzeugwinkel.....	332
11.1.4	Zerspankräfte.....	334
11.1.5	Richtwerte für die spezifische Schnittkraft k_c beim Drehen.....	336
11.1.6	Leistungsbedarf.....	337
11.1.7	Standverhalten.....	338
11.1.8	Hauptnutzungszeit.....	339
11.2	Fräsen.....	343
11.2.1	Schnittgrößen und Spanungsgrößen.....	343
11.2.2	Geschwindigkeiten.....	345
11.2.3	Werkzeugwinkel.....	346
11.2.4	Zerspankräfte.....	348
11.2.5	Leistungsbedarf.....	350
11.2.6	Hauptnutzungszeit.....	350
11.3	Bohren.....	353
11.3.1	Schnittgrößen und Spanungsgrößen.....	353
11.3.2	Geschwindigkeiten.....	354
11.3.3	Richtwerte für die Schnittgeschwindigkeit v_c und den Vorschub f beim Bohren.....	356

11.3.4	Richtwerte für spezifische Schnittkraft k_c beim Bohren	357
11.3.5	Werkzeugwinkel	358
11.3.6	Zerspankräfte	360
11.3.7	Leistungsbedarf.....	361
11.3.8	Hauptnutzungszeit	362
11.4	Schleifen	363
11.4.1	Schnittgrößen.....	363
11.4.2	Geschwindigkeiten	365
11.4.3	Werkzeugwinkel	366
11.4.4	Zerspankräfte	367
11.4.5	Leistungsbedarf.....	368
11.4.6	Hauptnutzungszeit	368
Sachwortverzeichnis		371

1.1 Mathematische Zeichen
 (nach DIN 1302)

\sim	proportional, ähnlich, asymptotisch gleich (sich $\rightarrow \infty$ angleichend), gleichmächtig	\in	Element von
\approx	ungefähr gleich	\notin	nicht Element von
\equiv	kongruent	$ $	teilt; $n m$: natürliche Zahl n teilt natürliche Zahl m ohne Rest
$\hat{=}$	entspricht	\nmid	nicht teilt; $n\nmid m$: m ist nicht Vielfaches von n
\neq	ungleich	\mathbb{N}	$= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen mit Null
$<$	kleiner als	\mathbb{N}^*	$= \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
\leq	kleiner als oder gleich	\mathbb{Z}	$= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen
$>$	größer als	\mathbb{Z}^*	$= \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen ohne Null
\geq	größer als oder gleich	\mathbb{Q}	$= \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N}^* \right\}$ Menge der rationalen Zahlen (Bruchzahlen)
∞	unendlich	\mathbb{Q}^*	$= \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}^* \wedge m \in \mathbb{N}^* \right\}$ Menge der rationalen Zahlen ohne Null
\parallel	parallel	\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\nparallel	nicht parallel	\mathbb{R}^*	Menge \mathbb{R} ohne Null
$\#$	parallelgleich: parallel und gleich lang	\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\perp	orthogonal zu	$n!$	$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, n Fakultät
\rightarrow	gegen (bei Grenzübergang), zugeordnet	$\binom{n}{k}$	$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ gelesen: n über k ; $k \leq n$; binomischer Koeffizient
\Rightarrow	aus... folgt...	$[a; b]$	$= a \dots b$; geschlossenes Intervall von a bis b , d. h. a und b eingeschlossen: $= \{x \mid a \leq x \leq b\}$
\Leftrightarrow	äquivalent (gleichwertig); aus... folgt... und umgekehrt	$]a; b[$	$= \{x \mid a < x < b\}$; offenes Intervall von a bis b , d. h. ohne die Grenzen a und b
\wedge	und, sowohl... als auch...	$]a; b]$	$= \{x \mid a < x \leq b\}$; halboffenes Intervall, a ausgeschlossen, b eingeschlossen
\vee	oder; das eine oder das andere oder beides (also nicht: entweder... oder...)	\lim	Limes, Grenzwert
$ x $	Betrag von x , Absolutwert	\log	Logarithmus, beliebige Basis
$\{x \dots\}$	Menge aller x , für die gilt...	\log_a	Logarithmus zur Basis a
$\{a, b, c\}$	Menge aus den Elementen a, b, c ; beliebige Reihenfolge der Elemente	$\lg x$	$= \log_{10} x$ Zehnerlogarithmus
(a, b)	Paar mit den geordneten Elementen (Komponenten) a und b ; vorgeschriebene Reihenfolge	$\ln x$	$= \log_e x$ natürlicher Logarithmus
(a, b, c)	Tripel mit den geordneten Elementen (Komponenten) a, b und c ; vorgeschriebene Reihenfolge	Δx	Delta x , Differenz von zwei x -Werten, z. B. $x_2 - x_1$
AB	Gerade AB ; geht durch die Punkte A und B		
\overline{AB}	Strecke AB		
$ \overline{AB} $	Betrag (Länge) der Strecke AB		
(A, B)	Pfeil AB		
\overrightarrow{AB}	Vektor AB ; Menge aller zu (A, B) parallelgleichen Pfeile		

Mathematik

Häufig gebrauchte Konstanten

dx Differenzial von x ,
 symbolischer Grenzwert von $\sum_{v=1}^n a_v = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, Summe
 Δx bei $\Delta x \rightarrow 0$

$\frac{dy}{dx}$ dy nach dx ,
 Differenzialquotient $y' = f'(x)$,
 $y'' = f''(x)$, ... Abkürzungen für
 $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df(x)}{dx} \right), \dots$

$\int \dots dx$ unbestimmtes Integral,
 Umkehrung des
 Differenzialquotienten

$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

erste, zweite, ... Ableitung;
 Differenzialquotient erster,
 zweiter, ... Ordnung

mit $F'(x) = f(x)$, bestimmtes
 Integral

1.2 Griechisches Alphabet

α A	Alpha	ι J	Jota	ρ P	Rho
β B	Beta	κ K	Kappa	σ Σ	Sigma
γ Γ	Gamma	λ Λ	Lamda	τ T	Tau
δ Δ	Delta	μ M	My	υ Y	Ypsilon
ϵ E	Epsilon	ν N	Ny	ϕ Φ	Phi
ζ Z	Zeta	ξ Ξ	Xi	χ X	Chi
η H	Eta	o O	Omikron	ψ Ψ	Psi
ϑ Θ	Theta	π Π	Pi	ω Ω	Omega

1.3 Häufig gebrauchte Konstanten

$\sqrt{2} = 1,4142\ 2$	$\sqrt{e} = 1,6487\ 21$	$1 : \pi^2 = 0,1013\ 21$
$\sqrt[3]{3} = 1,7320\ 5$	$\sqrt[3]{e} = 1,3956\ 12$	$\sqrt{1 : \pi} = 0,5641\ 90$
$\pi = 3,1415\ 93$	$e^{\pi/2} = 4,8104\ 77$	$\sqrt{1 : 2\pi} = 0,3989\ 42$
$2\pi = 6,2831\ 85$	$e^\pi = 23,1406\ 93$	$\sqrt{2 : \pi} = 0,7978\ 85$
$3\pi = 9,4247\ 78$	$e^{2\pi} = 535,4916\ 56$	$\sqrt[3]{1 : \pi} = 0,6827\ 84$
$4\pi = 12,5663\ 71$	$M = \lg e = 0,4342\ 94$	$1 : e = 0,3678\ 79$
$\pi : 2 = 1,5707\ 96$	$g = 9,81\ \text{m/s}^2$	$1 : e^2 = 0,1353\ 35$
$\pi : 3 = 1,0471\ 98$	$g^2 = 96,2361$	$\sqrt{1 : e} = 0,6065\ 31$
$\pi : 4 = 0,7853\ 98$	$\sqrt{g} = 3,13209$	$\sqrt[3]{1 : e} = 0,7165\ 32$
$\pi : 180 = 0,0174\ 53$	$\sqrt{2g} = 4,42945$	$e^{-\pi/2} = 0,2078\ 80$
$\pi^2 = 9,8696\ 04$	$1 : \pi = 0,3183\ 10$	$e^{-\pi} = 0,043214$
$\sqrt{\pi} = 1,7724\ 54$	$1 : 2\pi = 0,1591\ 55$	$e^{-2\pi} = 0,0018\ 67$
$\sqrt{2\pi} = 2,5066\ 28$	$1 : 3\pi = 0,1061\ 03$	$1 : M = \ln 10 = 2,3025\ 85$
$\sqrt{\pi : 2} = 1,2533\ 14$	$1 : 4\pi = 0,0795\ 77$	$1 : g = 0,10194$
$\sqrt[3]{\pi} = 1,4645\ 92$	$2 : \pi = 0,6366\ 20$	$1 : 2g = 0,050968$
$e = 2,7182\ 82$	$3 : \pi = 0,9549\ 30$	$\pi\sqrt{g} = 9,83976$
$e^2 = 7,3890\ 56$	$4 : \pi = 1,2732\ 40$	$\pi\sqrt{2g} = 13,91552$
	$180 : \pi = 57,2957\ 80$	

1.4 Multiplikation, Division, Klammern, Binomische Formeln, Mittelwerte

Produkt $n \cdot a$

$$n \cdot a = \frac{a + a + a + \dots + a}{n \text{ Summanden}} \quad n, a \text{ Faktoren}$$

Vorzeichenregeln

$$\begin{aligned} (+a)(+b) &= ab & (+a)(-b) &= -ab \\ (-a)(+b) &= -ab & (-a)(-b) &= ab \\ (+a) : (+b) &= a/b & (+a) : (-b) &= -a/b \\ (-a) : (+b) &= -a/b & (-a) : (-b) &= a/b \end{aligned}$$

Rechnen mit Null

$$a \cdot b = 0 \text{ hei\u00dft } a = 0 \text{ oder } b = 0; 0 \cdot a = 0; 0 : a = 0$$

Multiplizieren von Summen

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Quotient

$$a = b/n = b : n; n \neq 0; b \text{ Dividend; } n \text{ Divisor}$$

Division durch 0 gibt es nicht

Br\u00fcche

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{Br\u00fcche werden multipliziert, indem man ihre Z\u00e4hler und ihre Nenner multipliziert.}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \text{Br\u00fcche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert.}$$

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a+b-c}{d}; \quad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{mx} + \frac{b}{nx} - \frac{c}{px} = \frac{anp + bmp - cmn}{mnp x}$$

$mnp x$ Hauptnenner

Klammerregeln

$$\begin{aligned} a + (b - c) &= a + b - c \\ a - (b + c) &= a - b - c \\ a - (b - c) &= a - b + c \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Steht ein Minuszeichen vor der Klammer,} \\ \text{sind beim Weglassen der Klammer die} \\ \text{Vorzeichen aller in der Klammer stehenden} \\ \text{Summanden umzukehren.} \end{array}$$

Binomische Formeln, Polynome

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 & a^2 - b^2 &= \\ (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2 & (a + b)(a - b) &= \end{aligned}$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots + b^n \end{aligned}$$

Mathematik

Potenzrechnung (Potenzieren)

arithmetisches Mittel	$x_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$	z. B. $x_a = \frac{2 + 3 + 6}{3} = 3,67$
geometrisches Mittel	$x_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$	z. B. $x_g = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt[3]{36} = 3,3$
harmonisches Mittel	$x_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$	z. B. $x_h = \frac{1}{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)} = 3,0$
Beziehung zwischen x_a, x_g, x_h	$x_a \geq x_g \geq x_h$; Gleichheitszeichen nur bei $x_1 = x_2 = \dots = x_n$	

1.5 Potenzrechnung (Potenzieren)

Definition (a Basis, n Exponent, c Potenz)	$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n = c$	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$
Potenzen mit Basis $a = (-1)$ n ist ganze Zahl	$\left. \begin{matrix} (-1)^0 \\ (-1)^2 \\ (-1)^4 \\ (-1)^{2n} \end{matrix} \right\} = 1$	$\left. \begin{matrix} (-1)^1 \\ (-1)^3 \\ (-1)^5 \\ (-1)^{2n+1} \end{matrix} \right\} = -1$
erste und nullte Potenz	$a^1 = a; a^0 = 1$	$7^1 = 7; 7^0 = 1$
negativer Exponent	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a^{-1} = \frac{1}{a}$	$7^{-2} = \frac{1}{7^2}; 7^{-1} = \frac{1}{7}$
erst potenzieren, dann multiplizieren	$b a^n = b \cdot a^n = b \cdot (a^n)$	$6 \cdot 3^4 = 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 6 \cdot (3^4) = 486$ aber: $(6 \cdot 3)^4 = 18^4 = 104976$
Addition und Subtraktion	$p a^n + q a^n = (p + q) a^n$	$2 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^4 = 7 \cdot 3^4$
Multiplikation und Division bei gleicher Basis	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$ $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$
Multiplikation und Division bei gleichem Exponenten	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3$ $\frac{2^3}{4^3} = \left(\frac{2}{4}\right)^3 = (0,5)^3$
Potenzieren von Produkten und Quotienten	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$ $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$
Potenzieren einer Potenz	$(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 2^{4 \cdot 3}$
gebrochene Exponenten	$a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab}$ $(a^{1/m})^{1/n} = a^{1/mn} = \sqrt[mn]{a}$	$a^{1/n} : b^{1/n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(a^{1/n})^m = a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Zehnerpotenzen

$10^0 = 1$	10^6 ist 1 Million	$10^{-1} = 0,1$
$10^1 = 10$	10^9 ist 1 Milliarde	$10^{-2} = 0,01$
$10^2 = 100$	10^{12} ist 1 Billion	$10^{-3} = 0,001$
$10^3 = 1000$	10^{15} ist 1 Billiarde usw.	

1.6 Wurzelrechnung (Radizieren)

Definition

(c Radikand, n Wurzel-exponent, a Wurzel)

$$\sqrt[n]{c} = a \rightarrow a^n = c \qquad \sqrt[4]{81} = 3 \rightarrow 3^4 = 81$$

$$a \geq 0 \text{ und } c \geq 0$$

$\sqrt{\quad}$ immer positiv

Wurzeln sind Potenzen mit gebrochenen Exponenten, es gelten die Regeln der Potenzrechnung

$$\sqrt[n]{c} = c^{1/n} \qquad \sqrt[4]{81} = 81^{1/4} = 3$$

$$-^n\sqrt{c} = c^{-1/n} = \frac{1}{c^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[n]{\frac{1}{c}} = \sqrt[n]{c^{-1}}$$

Addition und Subtraktion

$$p\sqrt[n]{c} + q\sqrt[n]{c} = (p+q)\sqrt[n]{c} \qquad 3 \cdot \sqrt[4]{7} + 2 \cdot \sqrt[4]{7} = 5 \cdot \sqrt[4]{7}$$

Multiplikation

$$\sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{c \cdot d} \qquad \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{35}$$

Division

$$\sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}} \qquad \sqrt[4]{5} : \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{\frac{5}{7}}$$

Wurzel aus Produkt und Quotient

$$\sqrt[n]{c \cdot d} = \sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{d} \qquad \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6 = \sqrt{36}$$

$$\sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} \qquad \sqrt[4]{\frac{4}{9}} = \sqrt[4]{4} : \sqrt[4]{9} = \frac{2}{3}$$

Wurzel aus Wurzel

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[m \cdot n]{c} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{c}} \qquad \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Potenzieren einer Wurzel

$$(\sqrt[n]{c})^m = \sqrt[n]{c^m} \qquad (\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Wurzel aus Potenz

$$\sqrt[n]{c^m} = (\sqrt[n]{c})^m \qquad \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

Kürzen von Wurzel- und Potenzexponent

$$\sqrt[n^p]{c^{nq}} = (\sqrt[n]{c})^{nq} = \sqrt[n]{c^q} = (\sqrt[n]{c})^q$$

$$2 \cdot \sqrt[3]{8^2 \cdot 4} = (2 \cdot \sqrt[3]{8})^{2 \cdot 4} = (\sqrt[3]{8})^4 = 16$$

Erweitern der Wurzel

$$c \cdot \sqrt{c} = \sqrt{c^2 \cdot c} = \sqrt{c^3} \qquad 4\sqrt{4} = \sqrt{4^2 \cdot 4} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$\frac{1}{c} \sqrt{c^2 + 1} = \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}}$$

teilweises Wurzelziehen

$$\sqrt{c^3} = \sqrt{c^2 \cdot c} = c \cdot \sqrt{c} \qquad \sqrt[3]{5 \cdot c^3} = c \cdot \sqrt[3]{5}$$

Rationalmachen des Nenners

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}{a} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$\frac{a}{b + \sqrt{c}} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{(b + \sqrt{c})(b - \sqrt{c})} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{b^2 - c}$$

Mathematik
Logarithmen

1.7 Logarithmen

Definition
(c Numerus, a Basis, n Logarithmus)

Logarithmus c zur Basis a ist diejenige Zahl n, mit der man a potenzieren muss, um c zu erhalten.

$\log_a c = n \quad a^n = c$
 $\log_3 243 = 5 \quad 3^5 = 243$
„Logarithmus 243 zur Basis drei gleich fünf“

Logarithmensysteme

Dekadische (Briggs'sche) Logarithmen, Basis a = 10:
 $\log_{10} c = \lg c = n$,
wenn $10^n = c$.

Natürliche Logarithmen, Basis a = e = 2,71828 ... :
 $\log_e c = \ln c = n$,
wenn $e^n = c$.

spezielle Fälle

$a \log_a c = c$	$10^{\lg c} = c$	$e^{\ln c} = c$
$\log_a (a^n) = n$	$\lg 10^n = n$	$\ln e^n = n$
$\log_a a = 1$	$\lg 10 = 1$	$\ln e = 1$
$\log_a 1 = 0$	$\lg 1 = 0$	$\ln 1 = 0$
		$\ln \frac{1}{e} = -1$

Logarithmengesetze
(als dekadische Logarithmen geschrieben)

$\lg(xy) = \lg x + \lg y$	$\lg(10 \cdot 100) = \lg 10 + \lg 100 = 1 + 2 = 3$
$\lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y$	$\lg\left(\frac{10}{100}\right) = \lg 10 - \lg 100 = 1 - 2 = -1$
$\log x^n = n \lg x$	$\lg 10^{100} = 100 \lg 10 = 100$
$\lg \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \lg x$	$\lg \sqrt[100]{10} = \frac{1}{100} \lg 10 = \frac{1}{100}$

Beziehungen zwischen dekadischen und natürlichen Logarithmen

$\ln x = \ln 10 \cdot \lg x = \frac{\lg x}{\lg e} = 2,30259 \lg x$
 $\lg x = \lg e \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\ln 10} = 0,43429 \ln x$

Kennziffern der dekadischen Logarithmen

$\lg 1 = 0$	$\lg 0,1 = -1$
$\lg 10 = 1$	$\lg 0,01 = -2$
$\lg 100 = 2$	$\lg 0,001 = -3$ usw.
$\lg 1000 = 3$ usw.	
$\lg \infty = \infty$	$\lg 0 = -\infty$

n natürliche Zahl

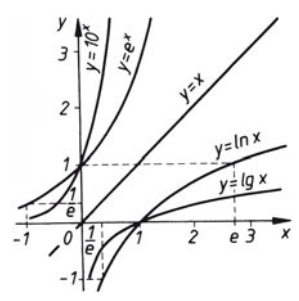
$\lg 10^n = n$ $\lg 10^{-n} = -n$

Lösen von Exponentialgleichungen

$a^x = b$ $10^x = 1000$
 $x \lg a = \lg b$ $x \lg 10 = \lg 1000$
 $x = \frac{\lg b}{\lg a}$ $x = \frac{\lg 1000}{\lg 10} = \frac{3}{1} = 3$

Exponentialfunktion und logarithmische Funktion

$y = e^x \xleftrightarrow{\text{Umkehrfunktion}} y = \ln x$
 $y = 10^x \xleftrightarrow{\text{Umkehrfunktion}} y = \lg x$



1.8 Komplexe Zahlen

imaginäre Einheit i und Definition

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{also auch: } i^3 = -i; i^4 = 1; i^5 = i \text{ usw.}$$

$$i^2 = -1 \quad \text{bzw. } i^{-1} = 1/i = -i; i^{-2} = -1$$

$$i^{-3} = i; i^{-4} = 1; i^{-5} = -i \text{ usw.}$$

$$\text{allgemein: } i^{4n+m} = i^m$$

rein imaginäre Zahl

ist darstellbar als Produkt einer reellen Zahl mit der imaginären Einheit
z. B.: $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$

komplexe Zahl z

ist die Summe aus einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl $b i$ (a, b reell):

**a Realteil
b Imaginärteil**

$$z = a + b i \quad \left. \begin{array}{l} z = a - b i \\ z = a + b i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{konjugiert komplexes} \\ \text{Zahlenpaar} \end{array}$$

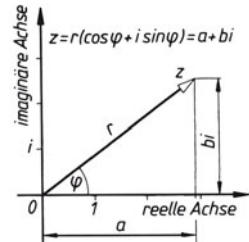
goniometrische Darstellung der komplexen Zahl

$$z = a + b i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \quad \text{absoluter Betrag oder Modul}$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}; \quad \varphi \text{ Argument}$$

$$a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi$$



Darstellungsbeispiel

$$z = 3 + 4 i = 5(\cos 53^\circ 8' + i \sin 53^\circ 8')$$

$$= 5(0,6 + 0,8 i)$$

Addition und Subtraktion

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$$

Beispiel: $(3 + 4 i) - (5 - 2 i) = -2 + 6 i$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + b_2 a_1)$$

$$(3 + 4 i) \cdot (5 - 2 i) = 23 + 14 i$$

z_1, z_2 sind konjugiert komplex

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_1 - b_1 i) = a^2 + b^2 =$$

$$= (3 + 4 i) \cdot (3 - 4 i) = 25$$

z_1, z_2 in goniometrischer Darstellung

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$= 5(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \cdot 13(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) =$$

$$= 65(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 65 i$$

z_1, z_2 in Exponentialform

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} =$$

$$= 3 e^{i 25^\circ} \cdot 5 e^{i 30^\circ} = 15 e^{i 55^\circ}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

$$\frac{(3 + 4 i)}{(5 - 2 i)} = \frac{(3 + 4 i)(5 + 2 i)}{(5 - 2 i)(5 + 2 i)} = \frac{7}{29} + \frac{26}{29} i$$

Mathematik

Quadratische Gleichungen

z_1, z_2
in goniometrischer
Darstellung

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

z_1, z_2
in Exponentialform

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i \varphi_1}}{r_2 e^{i \varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{3 e^{i 25^\circ}}{5 e^{i 30^\circ}} = \frac{3}{5} e^{-i 5^\circ}$$

Potenzieren mit einer
natürlichen Zahl

durch wiederholtes Multiplizieren mit sich selbst:
 $(a + b i)^3 = (a^3 - 3 a b^2) + (3 a^2 b - b^3) i$
 $(4 + 3 i)^3 = -44 + 117 i$

Potenzieren (radizieren)
mit beliebigen
reellen Zahlen (nur in
goniometrischer
Darstellung möglich)

man potenziert (radiziert) den Modul und multipliziert (dividiert) das Argument mit dem Exponenten (durch den Wurzelexponenten):

$$(a + b i)^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n] \sqrt[n]{a + b i} = \sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)$$

$$(4 + 3 i)^3 = [5 (\cos 36,87^\circ + i \sin 36,87^\circ)]^3$$

$$= 125 (\cos 110,61^\circ + i \sin 110,61^\circ)$$

$$= 125 (-\cos 69,39^\circ + i \sin 69,39^\circ)$$

$$= 125 (-0,3520 + 0,9360 i)$$

$$= -44,00 + 117,00 i$$

Ist der Wurzelexponent n
eine natürliche Zahl, gibt
es genau n Lösungen,
z. B. bei $\sqrt[3]{1}$

$$w_1 = \sqrt[3]{1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)} = 1 \quad w_3 = \sqrt[3]{1(\cos 720^\circ + i \sin 720^\circ)} = 1(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ)} = 1(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

Exponentialform der
komplexen Zahl

$$e^{i \varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad e^{-i \varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi = \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi}$$

$$|e^{-i \varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i \varphi} + e^{-i \varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i \varphi} - e^{-i \varphi}}{2i}$$

$\lg z = \ln r + i (\varphi + 2 \pi n)$
mit $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ und φ in Bogemaß

1.9 Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

- Die Lösungen x_1, x_2 sind
- beide verschieden und reell, wenn der Wurzelwert positiv ist
 - beide sind gleich und reell, wenn der Wurzelwert null ist
 - beide sind konjugiert komplex, wenn der Wurzelwert negativ ist.

Normalform

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = x^2 + p x + q = 0$$

Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel

$$\left. \begin{aligned} 25x^2 - 70x + 13 = 0 \\ x^2 - \frac{70}{25}x + \frac{13}{25} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_{1,2} &= +\frac{70}{50} \pm \sqrt{\left(\frac{70}{50}\right)^2 - \frac{13}{25}} \\ x_1 &= +\frac{7}{5} + \sqrt{\frac{49}{25} - \frac{13}{25}} = \frac{13}{5}; \quad x_2 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Kontrolle der Lösungen (Viéta)

$x_1 + x_2 = -p$ Im Beispiel ist $p = -\frac{70}{25}$ und $q = \frac{13}{25}$, also

$$x_1 + x_2 = \frac{13}{5} + \frac{1}{5} = \frac{14}{5} = \frac{70}{25} = -p$$

$x_1 \cdot x_2 = q$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{13}{25} = q$

1.10 Wurzel-, Exponential-, Logarithmische und Goniometrische Gleichungen in Beispielen

Wurzelgleichungen:

a) $11 - \sqrt{x+3} = 6$
 $\sqrt{x+3} = 11 - 6$
 $x + 3 = 25$ $x = 22$

b) $2x - \sqrt{3+x} + 5 = 0$
 $\sqrt{3+x} = 2x + 5$
 $3 + x = 4x^2 + 20x + 25$

$$x^2 + \frac{19}{4}x + \frac{11}{2} = 0$$

$x_1 = -2$ $x_2 = -\frac{11}{4}$

Nur x_1 ist Lösung der gegebenen Gleichung.

Logarithmische Gleichungen:

a) $\log_7(x^2 + 19) = 3$
 $x^2 + 19 = 7^3$ $x_{1,2} = \pm 18$

b) $\log_3(x + 4) = x$
 $x + 4 = 3^x$

Die Gleichung ist nicht geschlossen lösbar. Näherungslösung durch systematisches Probieren, z. B. mit Hilfe des programmierbaren Taschenrechners.
 $x \approx 1,561919$

Exponentialgleichungen:

$2^x = 5; \quad x = \log_2 5 = \log_{10} 5 : \log_{10} 2 = \frac{\lg 5}{\lg 2}$

$x = \frac{\lg 5}{\lg 2} = \frac{0,699}{0,301} = 2,32$

Goniometrische Gleichungen:

a) $\sin x = \sin 75^\circ$
 $x = \arcsin 75^\circ + 2n\pi$ und
 $x = \arcsin(180^\circ - 75^\circ) + 2n\pi$ mit
 $n = 0 \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$ oder
 $x = \arcsin(90^\circ \pm 15^\circ) + 2n\pi$, also
 $x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12} + 2n\pi$

b) $\sin^2 x + 2 \cos x = 1,5$
 Man setzt $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ und erhält eine quadratische Gleichung für $\cos x$:
 $1 - \cos^2 x + 2 \cos x = 1,5$
 $\cos x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 0,5}$
 $\cos x_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ scheidet aus, da $|\cos x| \leq 1$
 $\cos x_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0,293$
 $x_2 \approx 73,0^\circ \approx 1,274$ rad ist Hauptwert

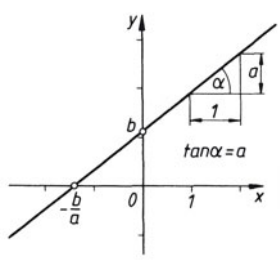
c) $\sin x + \cos x - 0,9x = 0$

Diese transzendente Gleichung ist nicht geschlossen lösbar. Näherungslösung durch Probieren (Interpolieren in der Nähe der Lösung), z. B. mit dem programmierbaren Taschenrechner.
 $x = 76^\circ 39' = 1,3377$ rad ist näherungsweise die einzige reelle Lösung.

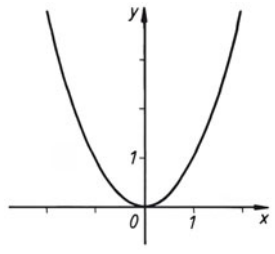
Mathematik

Graphische Darstellung der wichtigsten Relationen (schematisch)

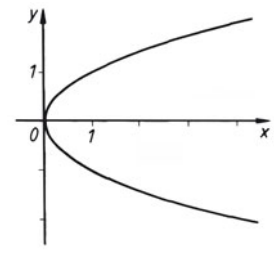
1.11 Graphische Darstellung der wichtigsten Relationen (schematisch)



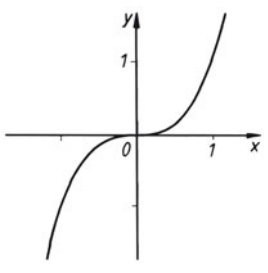
Gerade: $y = a x + b$



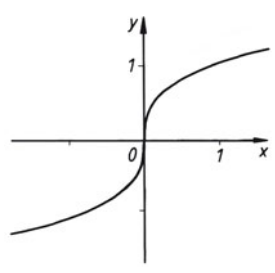
Parabel: $y = x^2$



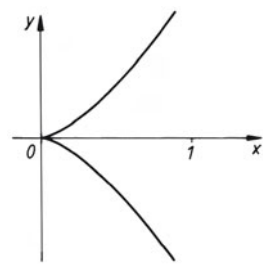
Parabel: $y = \pm\sqrt{x}$



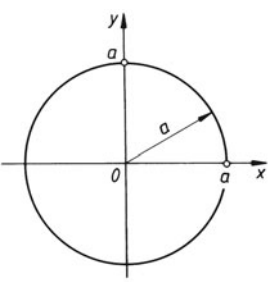
Kubische Parabel: $y = x^3$



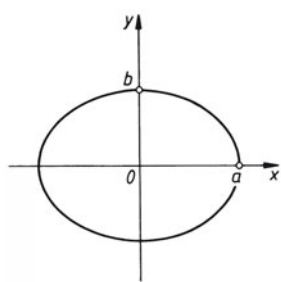
$y = \sqrt{x}$



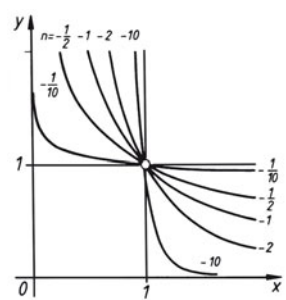
Semikubische Parabel:
 $y = \pm x^{3/2} = \pm\sqrt{x^3}$



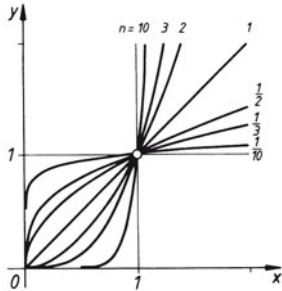
Kreis: $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$
 $x^2 + y^2 = a^2$



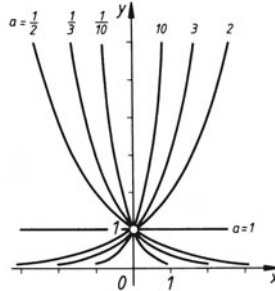
Ellipse: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



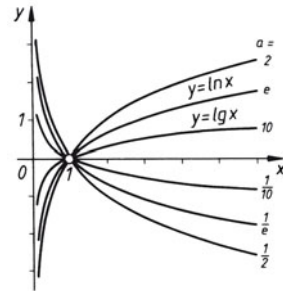
Potenzfunktionen:
 $y = x^n$ für $n < 0$
und $x > 0$



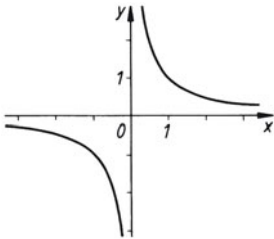
Potenzfunktionen:
 $y = x^n$ für $n > 0$ und $x > 0$



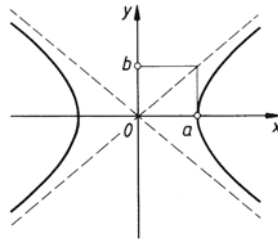
Exponentialfunktionen:
 $y = a^x$ für $a > 0$



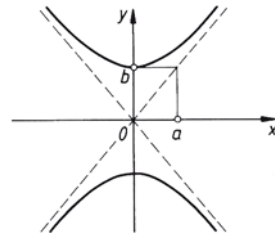
Logarithmische Funktionen:
 $y = \log_a x$ für $a > 0$ und $x > 0$



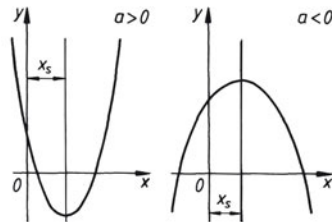
Hyperbel: $y = \frac{1}{x}$



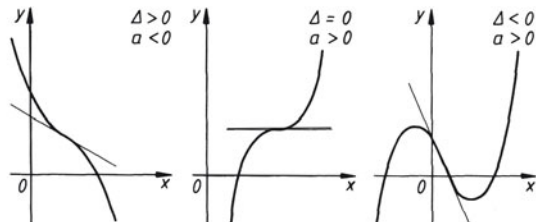
Hyperbel: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



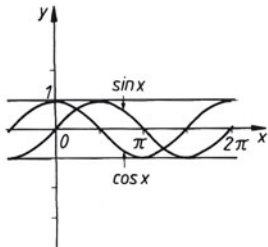
Hyperbel: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + a^2}$
 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$



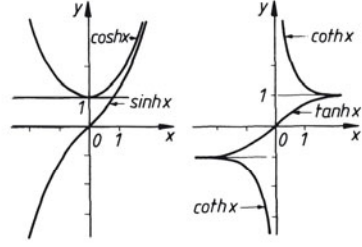
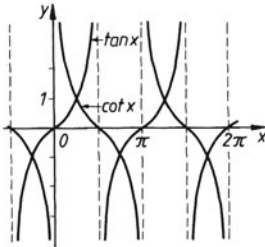
Quadratisches Polynom:
 $y = a x^2 + b x + c$ mit $x_s = \frac{-b}{2a}$



Polynom dritten Grades:
 $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$ (kubische Parabel); Diskriminante $\Delta = 3 a c - b^2$

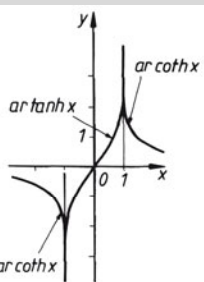
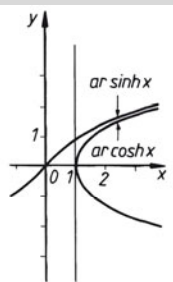
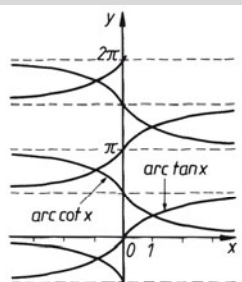
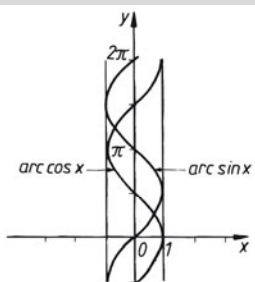


Trigonometrische Funktionen:
 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$



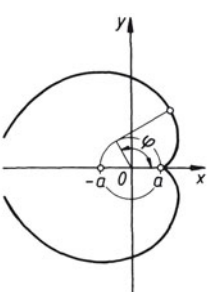
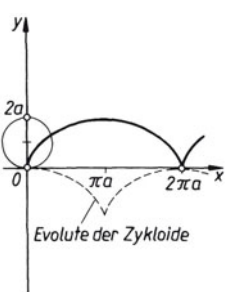
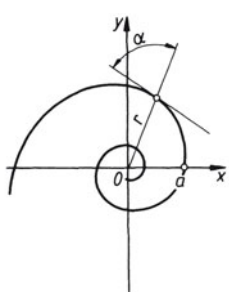
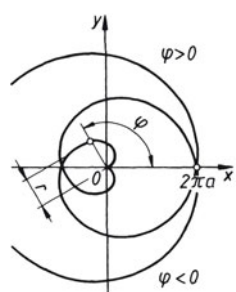
Hyperbelfunktionen:
 $y = \sinh x, y = \cosh x, y = \tanh x, y = \coth x$

Mathematik
Flächen



Inverse trigonometrische Funktionen:
 $y = \arcsin x, y = \arccos x,$
 $y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$

Inverse Hyperbelfunktionen:
 $y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
 $y = \operatorname{arcosh} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$
 $y = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$
 $y = \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$



Archimedische Spirale:
 $r = a \varphi$
 $\varrho = a \frac{(1 + \varphi^3)^{3/2}}{2 + \varphi^2}$

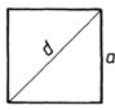
Logarithmische Spirale:
 $r = a e^{m \varphi}$
 $\alpha = \operatorname{arccot} m = \text{konstant}$
 $\varrho = r \sqrt{m^2 + 1}$

Zykloide:
 $x = a(t - \sin t)$
 $y = a(1 - \cos t)$
 (a Radius, t Wälzwinkel)

Kreisevolvente:
 $x = a \cos \varphi + a \varphi \sin \varphi$
 $y = a \sin \varphi - a \varphi \cos \varphi$

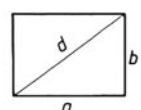
(ϱ Radius des Krümmungskreises)

1.12 Flächen (A Flächeninhalt, U Umfang)



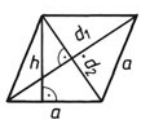
Quadrat

$A = a^2$
 $U = 4 a$
 $d = a \sqrt{2}$



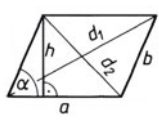
Rechteck

$A = a b$
 $U = 2(a + b)$
 $d = \sqrt{a^2 + b^2}$



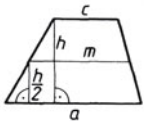
Rhombus

$A = a h = \frac{d_1 d_2}{2}$
 $U = 4 a$



Parallelogramm

$A = a h = a b \sin \alpha$
 $U = 2(a + b)$
 $d_1 = \sqrt{(a + h \cot \alpha)^2 + h^2}$
 $d_2 = \sqrt{(a - h \cot \alpha)^2 + h^2}$

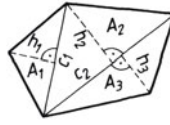


$$A = \frac{a+c}{2} h$$

$$= m h$$

$$m = \frac{a+c}{2}$$

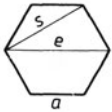
Trapez



$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= \frac{c_1 h_1 + c_2 h_2 + c_3 h_3}{2}$$

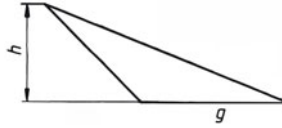
Vieleck



$$A = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$$

Schlüsselweite: $S = a\sqrt{3}$
Eckenmaß: $e = 2a$

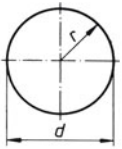
regelmäßiges Sechseck



$$A = \frac{g h}{2}$$

siehe auch unter 1.15 und 1.16

Dreieck

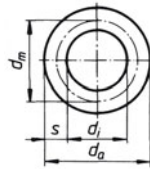


$$A = r^2 \pi = \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$U = 2 r \pi = d \pi$$

$$\pi = 3,141592$$

Kreis



$$A = \pi(r_a^2 - r_i^2)$$

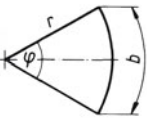
$$= \frac{\pi}{4}(d_a^2 - d_i^2)$$

$$= d_m \pi s$$

$$s = \frac{d_a - d_i}{2}$$

$$d_m = \frac{d_a + d_i}{2}$$

Kreisring



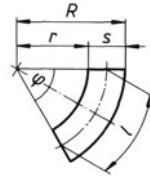
$$A = \frac{b r}{2} = \frac{\varphi^\circ}{360^\circ} \pi r^2$$

$$= \frac{\varphi r^2}{2}$$

Kreissektor

Bogenlänge b:

$$b = \varphi r = \frac{\varphi^\circ \pi r}{180^\circ}$$



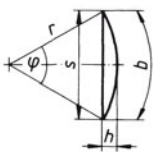
$$A = \frac{\varphi^\circ \cdot \pi}{360^\circ} (R^2 - r^2) = l s$$

mittlere Bogenlänge l:

$$l = \frac{R+r}{2} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \varphi^\circ$$

Ringbreite s:

$$s = R - r$$



$$A = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\varphi^\circ \pi}{180^\circ} - \sin \varphi \right)$$

$$= \frac{1}{2} [r(b-s) + s h]$$

$$\approx \frac{2}{3} s h$$

Kreisabschnitt

Sehnenlänge s:

$$s = 2 r \sin \frac{\varphi}{2}$$

Kreisradius r:

$$r = \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2}{2h}$$

Bogenhöhe h:

$$h = r \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$= \frac{s}{2} \tan \frac{\varphi}{4}$$

Bogenlänge b:

$$b = \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} h^2}$$

$$b = \frac{\varphi^\circ \pi r}{180^\circ} = \varphi r$$

1.13 Fläche A, Umkreisradius r und Inkreisradius ρ einiger regelmäßiger Vielecke

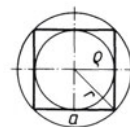


$$A = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

$$r = \frac{a}{3} \sqrt{3}$$

$$\rho = \frac{a}{6} \sqrt{3}$$

Dreieck (gleichseitiges)



$$A = a^2$$

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{2}$$

$$\rho = \frac{a}{2}$$

Viereck (Quadrat)

Mathematik
Körper

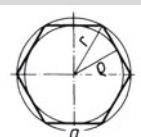


Fünfeck

$$A = \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

$$r = \frac{a}{10} \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$$

$$\ell = \frac{a}{10} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$



Sechseck

$$A = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$$

$$r = a$$

$$\ell = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$



Achteck

$$A = 2 a^2 (\sqrt{2} + 1)$$

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$\ell = \frac{a}{2} (\sqrt{2} + 1)$$

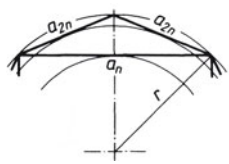


Zehneck

$$A = \frac{5}{2} a^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$r = \frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1)$$

$$\ell = \frac{a}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$



n-Eck

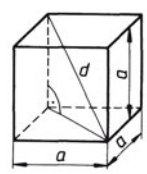
$$A = \frac{a_n}{2} r \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4r^2}}$$

$$\ell = r \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4r^2}}$$

Ist $a = a_n$ die Seite des n -Ecks, dann gilt für das $2n$ -Eck:

$$a_{2n} = r \sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{a_n^2}{r^2}}}$$

1.14 Körper (V Volumen, O Oberfläche, M Mantelfläche)

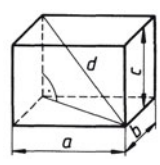


Würfel

$$V = a^3$$

$$O = 6 a^2$$

$$d = a\sqrt{3}$$

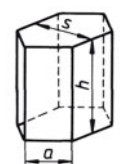


Quader

$$V = a b c$$

$$O = 2 (a b + a c + b c)$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

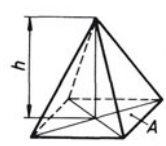


Sechskantsäule

$$V = \frac{3}{2} a^2 h \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} s^2 h$$

$$O = 3a(a\sqrt{3} + 2h)$$

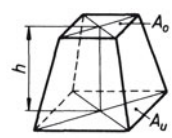
$$= \sqrt{3} s (s + 2h)$$



Pyramide

$$V = \frac{A h}{3}$$

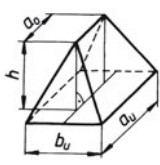
(gilt für jede Pyramide)



Pyramidenstumpf

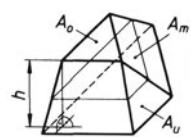
$$V = \frac{h}{3} (A_u + \sqrt{A_u A_o} + A_o)$$

$$\approx h \frac{A_u + A_o}{2}$$



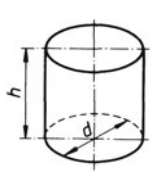
Keil

$$V = \frac{h}{6} b_u (2a_u + a_o)$$



Prismatoid (Prismoid)

$$V = \frac{h}{6} (A_o + 4A_m + A_u)$$



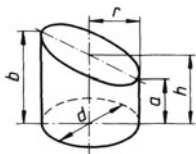
Kreiszyylinder

$$V = \frac{d^2 \pi}{4} h$$

$$M = d \pi h$$

$$O = \frac{\pi d}{2} (d + 2h)$$

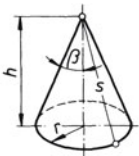
Volumen des Hohlzylinders als Differenz zweier Zylinder berechnen.



Kreiszylinder,
schief abgeschnitten

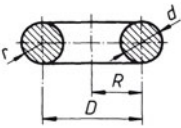
$$V = \pi r^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) \\ = \frac{d^2 \pi}{4} h \\ M = d \pi h \\ = \pi r (a+b)$$

$$O = \pi r \left[a+b+r + \sqrt{r^2 + \left(\frac{b-a}{2} \right)^2} \right]$$



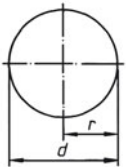
gerader
Kreiskegel

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h; M = r \pi s \\ s = \sqrt{r^2 + h^2} \\ O = r \pi (r+s) \\ \text{Abwicklung ist Kreissector mit \u00d6ffnungswinkel } \varphi: \\ \varphi^\circ = 360^\circ \frac{r}{s} = 360^\circ \sin \beta$$



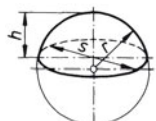
Kreisringtorus

$$V = \frac{d^2 \pi^2 D}{4} \\ = 2 r^2 \pi^2 R \\ M = d \pi^2 D \\ = 4 r \pi^2 R$$



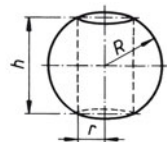
Kugel

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi \\ \approx 4,189 r^3 \\ O = 4 \pi r^2 = \pi d^2$$



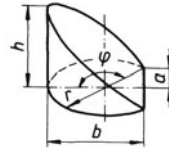
Kugelabschnitt
(K.-Segment,
K.-Kappe, K.-Kalotte)

$$V = \frac{\pi h}{6} \left(\frac{3}{4} s^2 + h^2 \right) \\ = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) \\ M = 2 \pi r h = \frac{\pi}{4} (s^2 + 4h^2)$$



zylindrisch
durchbohrte Kugel

$$V = \frac{\pi h^3}{6} \\ O = 2 \pi h (R+r)$$



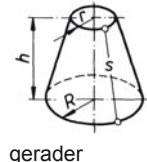
Zylinderhuf

$$V = \frac{h}{3b} [a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b-r)\varphi] \\ M = \frac{2rh}{b} [(b-r)\varphi + a] \\ (\varphi \text{ in rad})$$

F\u00fcr Halbkreisfl\u00e4che als Grundfl\u00e4che ist:

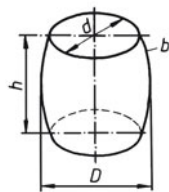
$$V = \frac{2}{3} r^2 h; M = 2 r h$$

$$O = M + \frac{r^2 \pi}{2} + \frac{r \pi \sqrt{r^2 + h^2}}{2}$$



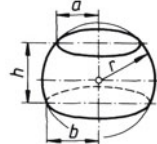
gerader
Kreiskegelstumpf

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2) \\ s = \sqrt{(R-r)^2 + h^2} \\ M = \pi s (R+r) \\ O = \pi [R^2 + r^2 + s (R+r)]$$



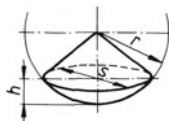
Fass

$$V = \frac{\pi h}{12} (2D^2 + d^2) \\ \text{bei kreisf\u00f6rmigem } b \\ V = \frac{\pi h}{15} \left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4} d^2 \right) \\ \text{bei parabelf\u00f6rmigem } b$$



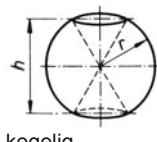
Kugelzone
(Kugelschicht)

$$V = \frac{\pi h}{6} (3a^2 + 3b^2 + h^2) \\ M = 2 \pi r h \\ O = \pi (2 r h + a^2 + b^2) \\ h = \sqrt{r^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - b^2}$$



Kugelausschnitt
(Kugelsektor)

$$V = \frac{2}{3} r^2 \pi h \\ O = \frac{\pi r}{2} (4h + s)$$



kegelig
durchbohrte Kugel

$$V = \frac{2 \pi r^2 h}{3} \\ O = 2 \pi r \left(h + \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}} \right)$$

Mathematik

Rechtwinkliges Dreieck

1.15 Rechtwinkliges Dreieck

allgemeine Beziehungen

Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

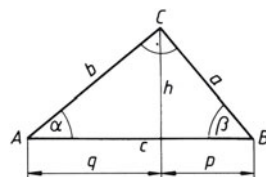
Euklid: $b^2 = c q; a^2 = c p; h^2 = p q$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}; \cot \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{b}{c}; h = \frac{ab}{c}; h^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}; \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

$$\text{Fläche } A = \frac{1}{2} a b = \frac{1}{2} a^2 \cot \alpha = \frac{1}{2} b^2 \tan \alpha = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha$$



gegeben a, b

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}; \alpha = 90^\circ - \beta; \tan \beta = \frac{b}{a}; \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\cos \alpha}$$

$$A = \frac{ab}{2}; h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

gegeben a, c

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \alpha = 90^\circ - \beta; \cos \beta = \frac{a}{c}; \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)} = c \cos \alpha = c \sin \beta = a \cot \alpha$$

$$A = \frac{a}{2} \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{1}{2} a c \sin \beta; h = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - a^2}$$

gegeben b, c

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}; \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}; A = \frac{1}{2} b^2 \tan \alpha; h = \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - b^2}$$

gegeben a, α

$$\beta = 90^\circ - \alpha; b = a \cot \alpha; c = \frac{a}{\sin \alpha}; A = \frac{1}{2} a^2 \cot \alpha; h = a \cos \alpha$$

gegeben b, α

$$\beta = 90^\circ - \alpha; a = b \tan \alpha; c = \frac{b}{\cos \alpha}; A = \frac{1}{2} b^2 \tan \alpha; h = b \sin \alpha$$

gegeben c, α

$$\beta = 90^\circ - \alpha; a = c \sin \alpha$$

$$b = c \cos \alpha; A = \frac{1}{2} c^2 \sin \alpha \cos \alpha; h = c \sin \alpha \cos \alpha$$

1.16 Schiefwinkliges Dreieck

allgemeine Beziehungen

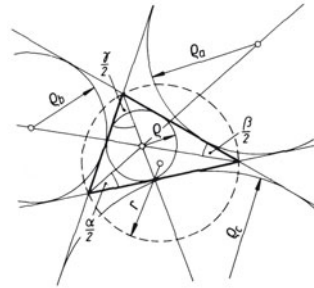
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}; \dots^1)$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$= \frac{q}{s-a}; \dots^1)$$

$$\tan \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}; \dots^1)$$



halber Umfang s

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

Radius des Inkreises q

$$q = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{abc}{4rs}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = s \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}$$

Radien der Ankreise

q_a, q_b, q_c

$$q_a = q \frac{s}{s-a} = s \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}; \dots^1)$$

Höhen

h_a, h_b, h_c

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta = \frac{bc}{a} \sin \alpha; \dots^1)$$

$$a h_a = b h_b = c h_c = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Seitenhalbierende Mittellinien

m_a, m_b, m_c

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}; \dots^1) \quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_a} + \frac{1}{q_b} + \frac{1}{q_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{q_a} = -\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}; \dots^1)$$

Winkelhalbierende

w_a, w_b, w_c

$$w_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)} = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}; \dots^1)$$

Flächeninhalt

$$A = qs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta$$

Radius des Umkreises r

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

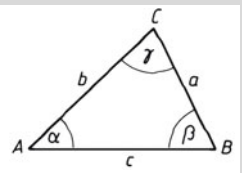
1) Die Punkte weisen darauf hin, dass sich durch zyklisches Vertauschen von a, b, c und alpha, beta, gamma noch zwei weitere Gleichungen ergeben.

Mathematik

Schiefwinkliges Dreieck

Sinussatz

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}; \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$



Kosinussatz (bei stumpfem Winkel α wird $\cos \alpha$ negativ)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha; \dots^1)$$

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc \cos^2(\alpha/2); \dots^1)$$

$$a^2 = (b-c)^2 + 4bc \sin^2(\alpha/2); \dots^1)$$

Projektionssatz

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta; \dots^1)$$

Mollweide'sche Formeln

$$\frac{a+b}{c} = \cos \frac{\alpha-\beta}{2} : \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = \cos \frac{\alpha-\beta}{2} : \sin \frac{\gamma}{2}; \dots^1)$$

$$\frac{a-b}{c} = \sin \frac{\alpha-\beta}{2} : \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \sin \frac{\alpha-\beta}{2} : \cos \frac{\gamma}{2}; \dots^1)$$

Tangenssatz

$$\frac{a+b}{a-b} = \tan \frac{\alpha+\beta}{2} : \tan \frac{\alpha-\beta}{2}; \dots^1)$$

gegeben:
1 Seite und 2 Winkel
(z. B. a, α, β)
WWS

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta); b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}; c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$A = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$$

gegeben:
2 Seiten und der eingeschlossene Winkel
(z. B. a, b, γ)
SWS

$$\tan \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{\gamma}{2}; \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

Mit $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ ergibt sich α und β und damit:

$$c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}; A = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$$

gegeben:
2 Seiten und der einer von beiden gegenüberliegende Winkel
(z. B. a, b, α)
SSW

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha$$

Ist $a \geq b$, so ist $\beta < 90^\circ$ und damit β eindeutig bestimmt.

Ist $a < b$, so sind folgende Fälle möglich:

- β hat für $b \sin \alpha < a$ zwei Werte ($\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$)
- β hat den Wert 90° für $b \sin \alpha = a$
- für $b \sin \alpha > a$ ergibt sich kein Dreieck.

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta); c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}; A = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$$

gegeben:
3 Seiten
(z. B. a, b, c)
SSS

$$e = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}; \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{e}{s-a}$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{e}{s-b}; \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{e}{s-c}$$

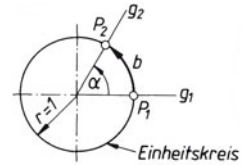
$$A = e s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

¹⁾ Die Punkte weisen darauf hin, dass sich durch zyklisches Vertauschen von a, b, c und α, β, γ noch zwei weitere Gleichungen ergeben.

1.17 Einheiten des ebenen Winkels

Begriff des ebenen Winkels

Der *ebene* Winkel α (kurz: Winkel α , im Gegensatz zum Raumwinkel) zwischen den beiden Strahlen g_1, g_2 ist die Länge des Kreisbogens b auf dem Einheitskreis, der im Gegenuhrzeigersinn von Punkt P_1 zum Punkt P_2 führt.



Bogenmaß des ebenen Winkels

Die Länge des Bogens b auf dem Einheitskreis ist das Bogenmaß des Winkels.

kohärente Einheit des ebenen Winkels

Die kohärente Einheit (SI-Einheit) des ebenen Winkels ist der Radiant (rad).

Der Radiant ist der ebene Winkel, für den das Verhältnis der Länge des Kreisbogens b zu seinem Radius r gleich eins ist. $1 \text{ rad} = \frac{b}{r} = 1$

Vollwinkel und rechter Winkel

Für den Vollwinkel α beträgt der Kreisbogen $b = 2 \pi r$. Es ist demnach:

$$\alpha = \frac{b}{r} = \frac{2 \pi r}{r} \text{ rad} = 2 \pi \text{ rad} \qquad \text{Vollwinkel} = 2 \pi \text{ rad}$$

Ebenso ist für den rechten Winkel (1^\perp):

$$\alpha = 1^\perp = \frac{b}{r} = \frac{2 \pi r}{4 r} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \qquad \text{rechter Winkel } 1^\perp = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Umrechnung von Winkleinheiten

Ein Grad (1°) ist der 360ste Teil des Vollwinkels (360°). Folglich gilt:

$$1^\circ = \frac{b}{r} = \frac{2 \pi r}{360 r} \text{ rad} = \frac{2 \pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,0175 \text{ rad} \quad \text{oder durch Umstellen:}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{1^\circ \cdot 180}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

Beispiel: a) $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} 90 \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

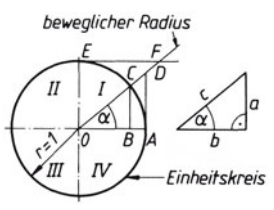
b) $\alpha = \pi \text{ rad} = \pi \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ$

Mathematik

Trigonometrische Funktionen (Graphen in 1.11)

1.18 Trigonometrische Funktionen (Graphen in 1.11)

Sinus = $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$	$\sin \alpha = \frac{BC}{c} = \frac{a}{c}$	} von -1... +1
Kosinus = $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$	$\cos \alpha = \frac{OB}{c} = \frac{b}{c}$	
Tangens = $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$	$\tan \alpha = \frac{AD}{b} = \frac{a}{b}$	} von -∞... +∞
Kotangens = $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$	$\cot \alpha = \frac{EF}{a} = \frac{b}{a}$	
Sekans = $\frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}}$	$\sec \alpha = \frac{OD}{b} = \frac{c}{b}$	} von -∞... -1 und +1... +∞
Kosekans = $\frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}}$	$\text{cosec } \alpha = \frac{OF}{a} = \frac{c}{a}$	



Beachte: Winkel werden vom festen Radius OA aus linksdrehend gemessen.

Vorzeichen der Funktion	Quadrant	Größe des Winkels	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
(richtet sich nach dem Quadranten, in dem der bewegliche Radius liegt)	I	von 0° bis 90°	+	+	+	+	+	+
	II	90° „ 180°	+	-	-	-	-	+
	III	180° „ 270°	-	-	+	+	-	-
	IV	270° „ 360°	-	+	-	-	+	-

Funktion	$\beta = 90^\circ \pm \alpha$	$\beta = 180^\circ \pm \alpha$	$\beta = 270^\circ \pm \alpha$	$\beta = 360^\circ - \alpha$
$\sin \beta$	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
$\tan \beta$	$\mp \cot \alpha$	$\pm \tan \alpha$	$\mp \cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$\cot \beta$	$\mp \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$	$\mp \tan \alpha$	$-\cot \alpha$

Beispiel ¹⁾: $\sin(205^\circ) = \sin(180 + 25^\circ) = -(\sin 25^\circ) = -0,4226$

Funktionen für negative Winkel werden auf solche für positive Winkel zurückgeführt:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

Beispiel ¹⁾: $\sin(-205^\circ) = -205^\circ$

Funktionen für Winkel über 360° werden auf solche von Winkeln zwischen 0°... 360° zurückgeführt (bzw. zwischen 0°... 180°); „n“ ist ganzzahlig:

$$\begin{aligned} \sin(360^\circ \cdot n + \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(360^\circ \cdot n + \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(180^\circ \cdot n + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(180^\circ \cdot n + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

Beispiel ¹⁾:
 $\sin(-660^\circ) = -\sin 660^\circ = -\sin(360^\circ \cdot 1 + 300^\circ) = -\sin 300^\circ = -\sin(270^\circ + 30^\circ) = +\cos 30^\circ = 0,8660.$

¹⁾ Der Rechner liefert die Funktionswerte direkt, z. B. $\sin(-660^\circ) = 0,866\ 025\ 403\ 8$

1.19 Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen

Grundformeln

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Umrechnung zwischen Funktionen desselben Winkels (die Wurzel erhält das Vorzeichen des Quadranten, in dem der Winkel α liegt)

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha = \sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\tan \alpha$	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	$\cot \alpha$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta & \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} & \cot(\alpha + \beta) &= \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} & \cot(\alpha - \beta) &= \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha} \end{aligned}$$

Summenformeln

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha + \tan \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} & \cot \alpha + \cot \beta &= \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} \\ \tan \alpha - \tan \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} & \cot \alpha - \cot \beta &= -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \sin \alpha &= \sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha) & \cos \alpha - \sin \alpha &= \sqrt{2} \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \tan(45^\circ + \alpha) \quad \frac{\cot \alpha + 1}{\cot \alpha - 1} = \cot(45^\circ - \alpha)$$

Mathematik

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen

Funktionen für Winkelvielfache

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\sin 4\alpha &= 8 \sin \alpha \cos^3 \alpha - \\ &\quad - 4 \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$$

Für $n > 3$ berechnet man $\sin n\alpha$ und $\cos n\alpha$ nach der Moivre-Formel:

$$\sin n\alpha = n \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - \binom{n}{3} \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha \pm \dots$$

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha \mp \dots$$

Funktionen der halben Winkel (die Wurzel erhält das Vorzeichen des entsprechenden Quadranten)

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Produkte von

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = -\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

$$\cot \alpha \cdot \cot \beta = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = -\frac{\cot \alpha - \cot \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

Potenzen von Funktionen

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha)$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3)$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3)$$

Funktionen dreier Winkel

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1 \\ \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma &= \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma \\ \cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} &= \cot \frac{\alpha}{2} \cdot \cot \frac{\beta}{2} \cdot \cot \frac{\gamma}{2} \\ \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= 2(\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1) \\ \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{aligned} \right\} \text{gültig für } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

1.20 Arcusfunktionen

Die Arcusfunktionen sind invers zu den Kreisfunktionen.

Invers zur Kreisfunktion	ist die Arcusfunktion	mit der Definition (y in Radiant)	Hauptwert der Arcusfunktion im Bereich	Definitionsbereich
$y = \sin x$	$y = \arcsin x$	$x = \sin y$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$-1 \leq x \leq 1$
$y = \cos x$	$y = \arccos x$	$x = \cos y$	$0 \leq y \leq \pi$	$-1 \leq x \leq 1$
$y = \tan x$	$y = \arctan x$	$x = \tan y$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < +\infty$
$y = \cot x$	$y = \operatorname{arccot} x$	$x = \cot y$	$0 < y < \pi$	$-\infty < x < +\infty$

Beziehungen zwischen den Arcusfunktionen (Formeln in eckigen Klammern gelten nur für positive Werte von x)

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = [\arccos \sqrt{1-x^2}] = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right]$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = -\frac{\pi}{2} - \arcsin x = [\arcsin \sqrt{1-x^2}] = \left[\arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right] = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beispiel: Der Kosinus eines Winkels x beträgt: $\cos x = 0,88$.
Lässt sich der Winkel x nur mit der Arcus-Tangensfunktion berechnen (z. B. auf dem PC) gilt:

$$x = \arctan \left(\frac{\sqrt{1-0,88^2}}{0,88} \right) = 29,36^\circ$$

Beziehungen zwischen den Arcusfunktionen (Formeln in eckigen Klammern gelten nur für positive Werte von x)

$$\arctan x = -\arctan(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right] = \left[\operatorname{arccot} \frac{1}{x} \right]$$

$$\operatorname{arccot} x = \pi - \operatorname{arccot}(-x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \left[\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right] = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\arctan \frac{1}{x} \right]$$

Mathematik

Arcusfunktionen

Additionstheoreme und andere Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \arcsin x + \arcsin y &= \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) && [xy \leq 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 \leq 1] \\
 &= \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) && [x > 0, y > 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 > 1] \\
 &= -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) && [x < 0, y < 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 > 1] \\
 \arcsin x - \arcsin y &= \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) && [xy \geq 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 \leq 1] \\
 &= \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) && [x > 0, y < 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 > 1] \\
 &= -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) && [x < 0, y > 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 > 1] \\
 \arccos x + \arccos y &= \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) && [x + y \geq 0] \\
 &= 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) && [x + y < 0] \\
 \arccos x - \arccos y &= -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) && [x \geq y] \\
 &= \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) && [x < y] \\
 \arctan x + \arctan y &= \arctan \frac{x+y}{1-xy} && [xy < 1] \\
 &= \pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy} && [x > 0, xy > 1] \\
 &= -\pi + \arctan \frac{x+y}{1-xy} && [x < 0, xy > 1] \\
 \arctan x - \arctan y &= \arctan \frac{x-y}{1+xy} && [xy > -1] \\
 &= \pi + \arctan \frac{x-y}{1+xy} && [x > 0, xy < -1] \\
 &= -\pi + \arctan \frac{x-y}{1+xy} && [x < 0, xy < -1] \\
 2 \arcsin x &= \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) && \left[|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \\
 &= \pi - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) && \left[\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1 \right] \\
 &= -\pi - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) && \left[-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \\
 2 \arccos x &= \arccos(2x^2 - 1) && [0 \leq x \leq 1] \\
 &= 2\pi - \arccos(2x^2 - 1) && [-1 \leq x < 0] \\
 2 \arctan x &= \arctan \frac{2x}{1-x^2} && [|x| < 1] \\
 &= \pi + \arctan \frac{2x}{1-x^2} && [x > 1] \\
 &= -\pi + \arctan \frac{2x}{1-x^2} && [x < -1]
 \end{aligned}$$

1.21 Hyperbelfunktionen

Definitionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}; \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

Grundbeziehungen

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \left| \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}; \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \right.$$

Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen (vgl. die entsprechenden Formeln der trigonometrischen Funktionen)

$$\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$$

$$\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{\coth x}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} = \frac{1}{\coth x}$$

$$\coth x = \frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x} = \frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\tanh x}$$

Für negative x gilt:

$$\begin{aligned} \sinh(-x) &= -\sinh x & \tanh(-x) &= -\tanh x \\ \cosh(-x) &= \cosh x & \coth(-x) &= -\coth x \end{aligned}$$

Additionstheoreme und andere Beziehungen

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \cdot \tanh y}; \quad \coth(x \pm y) = \frac{1 \pm \coth x \cdot \coth y}{\coth x \pm \coth y}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x \quad \left| \quad \tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \right.$$

$$\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x \quad \left| \quad \coth 2x = \frac{1 + \coth^2 x}{2 \coth x} \right.$$

$$(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$$

+ für $x > 0$
- für $x < 0$

$$\sinh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}; \quad \tanh \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

$$\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}; \quad \coth \frac{x}{2} = \frac{\sinh x}{\cosh x - 1} = \frac{\cosh x + 1}{\sinh x}$$

$$\sinh x \pm \sinh y = 2 \sinh \frac{1}{2}(x \pm y) \cosh \frac{1}{2}(x \mp y)$$

$$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{1}{2}(x + y) \cosh \frac{1}{2}(x - y)$$

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{1}{2}(x + y) \sinh \frac{1}{2}(x - y)$$

$$\tanh x \pm \tanh y = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cosh y}$$

Mathematik

Analytische Geometrie: Punkte in der Ebene

1.22 Areafunktionen

Die Areafunktionen sind die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen.

Invers zur Hyperbelfunktion	ist die Areafunktion	mit der Definition	Grenzen der Funktion	Definitionsbereich
$y = \sinh x$	$y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$x = \sinh y$	$-\infty < y < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
$y = \cosh x$	$y = \operatorname{arcosh} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$	$x = \cosh y$	$-\infty < y < +\infty$	$1 \leq x < +\infty$
$y = \tanh x$	$y = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$x = \tanh y$	$-\infty < y < +\infty$	$-1 < x < 1$
$y = \operatorname{coth} x$	$y = \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$	$x = \operatorname{coth} y$	$-\infty < y < +\infty$	$-1 > x > 1$

Beziehungen zwischen den Areafunktionen

$$\operatorname{arsinh} x = \pm \operatorname{arcosh} \sqrt{x^2 + 1} = \operatorname{artanh} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{arcoth} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$\operatorname{arcosh} x = \pm \operatorname{arsinh} \sqrt{x^2 - 1} = \pm \operatorname{artanh} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \pm \operatorname{arcoth} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\operatorname{artanh} x = \operatorname{arsinh} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \pm \operatorname{arcosh} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcoth} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{arcoth} x = \operatorname{arsinh} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \pm \operatorname{arcosh} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{artanh} \frac{1}{x}$$

+ für $x > 0$
- für $x < 0$

Für negative x gilt

$$\operatorname{arsinh}(-x) = -\operatorname{arsinh} x \quad \operatorname{artanh}(-x) = -\operatorname{artanh} x$$

$$\operatorname{arcosh}(-x) = \operatorname{arcosh} x \quad \operatorname{arcoth}(-x) = -\operatorname{arcoth} x$$

Additionstheoreme

$$\operatorname{arsinh} x \pm \operatorname{arsinh} y = \operatorname{arsinh}(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2})$$

$$\operatorname{arcosh} x \pm \operatorname{arcosh} y = \operatorname{arcosh}(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)})$$

$$\operatorname{artanh} x \pm \operatorname{artanh} y = \operatorname{artanh} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}$$

1.23 Analytische Geometrie: Punkte in der Ebene

Entfernung zweier Punkte

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

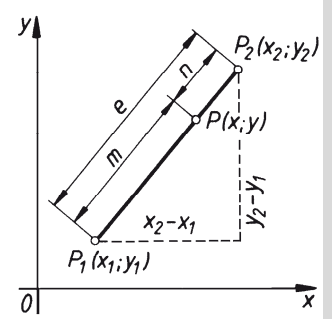
Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Teilungsverhältnis λ einer Strecke

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m}{n} = \frac{P_1P}{PP_2}$$

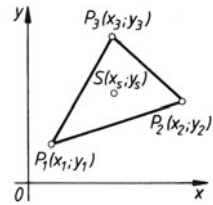
(+) innerhalb, (-) außerhalb $\overrightarrow{P_1P_2}$



Koordinaten des Teilungspunktes P einer Strecke

$$x_p = \frac{m x_2 + n x_1}{m + n} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y_p = \frac{m y_2 + n y_1}{m + n} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$



Flächeninhalt eines Dreiecks

$$A = \frac{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}{2}$$

Schwerpunkt S eines Dreiecks (Koordinaten von S)

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

1.24 Analytische Geometrie: Gerade

Normalform der Geraden

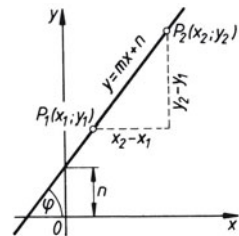
$$y = m x + n \quad n \text{ ist Ordinatenabschnitt}$$

Achsenabschnittsform der Geraden

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \begin{array}{l} a \text{ Abschnitt auf der } x\text{-Achse} \\ b \text{ Abschnitt auf der } y\text{-Achse} \end{array}$$

Punkt-Steigungsform der Geraden

$$m = \tan \varphi = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

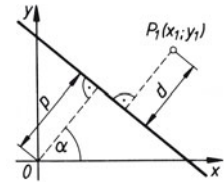


Zweipunkteform der Geraden

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Steigung m und Steigungswinkel φ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Hesse'sche Normalform

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

Senkrechter Abstand d eines Punktes P_1 von einer Geraden

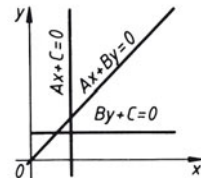
$$d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$$

(+) wenn P und 0 auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen; sonst (-)

Allgemeine Linearform der Geradengleichung

$$A x + B y + C = 0$$

Bei $A = 0$ ist die Gerade parallel zur x -Achse, bei $B = 0$ parallel zur y -Achse, bei $C = 0$ geht die Gerade durch 0 .



Schnittpunkt s zweier Geraden

$$x_s = \begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \quad y_s = \begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}$$

Mathematik

Analytische Geometrie: Lage einer Geraden im rechtwinkligen Achsenkreuz

Sonderfälle

bei $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} = 0$ sind die gegebenen Geraden parallel,

bei $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ fallen sie zusammen.

Schnittpunkt s zweier Geraden, die in Normalform gegeben sind

gegeben: $y_1 = m_1 x + n_1$; $y_2 = m_2 x + n_2$

$$x_s = \frac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1}; \quad y_s = \frac{n_1 m_2 - n_2 m_1}{m_2 - m_1}$$

Sonderfall

Die dritte Gerade geht durch den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden, wenn

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \\ A_3 B_3 C_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Schnittwinkel φ zweier Geraden

$$\tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \begin{matrix} y = m_1 x + n_1 \\ y = m_2 x + n_1 \end{matrix}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 - B_1 B_2} \quad \begin{matrix} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{matrix}$$

Schnittwinkel φ wird beim Drehen der Geraden g_1 in der Lage von g_2 überstrichen (im entgegengesetzten Sinn des Uhrzeigers).

Sonderfälle

bei $m_2 = m_1$ bzw. $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ sind Gerade parallel,

bei $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $\frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2}$ stehen sie rechtwinklig aufeinander

Winkelhalbierende w_1, w_2 zweier Geraden g_1, g_2

Sind g_{1H} und g_{2H} die Hesse'schen Normalformen der Geraden, so wird $w_{1,2} = g_{1H} \pm g_{2H}$.

w_1, w_2 sind die Gleichungen für die Winkelhalbierenden.

1.25 Analytische Geometrie: Lage einer Geraden im rechtwinkligen Achsenkreuz

Zur Kontrolle der Rechnungen nach 1.25 wird die Gleichung der Geraden auf die Form $A x + B y + C = 0$ gebracht, die Konstanten A, B und C bestimmt und die Lage der Geraden der folgenden Tabelle entnommen. Gleichungen mit positiver Konstante C müssen vorher mit (-1) multipliziert werden.

Vorzeichen der Konstanten			Beziehung zwischen Konstanten A und B	Lage der Geraden	
A	B	C		Steigungswinkel φ mit positiver x-Achse	Lage zum Koordinatenursprung
+	+	-	$A > B$ $A = B$ $A < B$	$90^\circ < \varphi < 135^\circ$ 135° $135^\circ < \varphi < 180^\circ$	rechts oberhalb
-	+	-	$ A < B$ $ A = B$ $ A > B$	$0^\circ < \varphi < 45^\circ$ 45° $45^\circ < \varphi < 90^\circ$	links oberhalb
-	-	-	$ A > B $ $A = B$ $ A < B $	$90^\circ < \varphi < 135^\circ$ 135° $135^\circ < \varphi < 180^\circ$	links unterhalb
+	-	-	$A < B $ $A = B $ $A > B $	$0^\circ < \varphi < 45^\circ$ 45° $45^\circ < \varphi < 90^\circ$	rechts unterhalb

Beispiel: Gegeben ist eine Gerade mit $16x - 11y + 6 = 0$; mit (-1) multipliziert: $-16x + 11y - 6 = 0$; also ist $A = -16$, $B = +11$ und $C = -6$, d. h. $|A| > |B|$. Nach der Tabelle liegt die Gerade links oberhalb des Koordinatenursprungs mit Steigungswinkel φ zwischen 45° und 90° ($\varphi = 56,4^\circ$).

Zusammenfassung der Sonderfälle

Konstante	$A = 0$ ¹⁾	$B = 0$ ¹⁾	$C = 0$	$A = 0; C = 0$	$B = 0; C = 0$
Gleichung	$y = -\frac{C}{B}$	$x = -\frac{C}{A}$	$y = -\frac{A}{B}x$	$y = 0$	$x = 0$
Lage der Geraden	Parallele zur x-Achse im Abstand $-C/B$	Parallele zur y-Achse im Abstand $-C/A$	Gerade durch den Koordinatenursprung	Gerade fällt zusammen mit x-Achse	Gerade fällt zusammen mit y-Achse

1) Bei $A = 0$ und $B = 0$ unendlich ferne Gerade.

1.26 Analytische Geometrie: Kreis

Kreisgleichung
(Mittelpunkt M liegt im Nullpunkt)

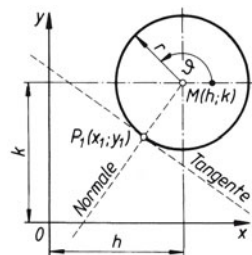
$$x^2 + y^2 = r^2$$

in Parameterform

$$x = h + r \cos \vartheta; \quad y = k + r \sin \vartheta$$

Kreisgleichung für beliebige Lage von $M(h; k)$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



Scheitelfgleichung
(M liegt auf x-Achse, Kreis geht durch Nullpunkt)

$$y^2 = x(2r - x)$$

Schnitt von Kreis und Gerade

Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ wird von der Geraden $y = m x + n$ geschnitten, wenn Diskriminante $\Delta = r^2(1 + m^2) - n^2 > 0$ ist. Bei $r^2(1 + m^2) - n^2 = 0$ ist die Gerade eine Tangente.

Abszissen der Geraden-schnittpunkte

$$x_{1,2} = \frac{1}{1 + m^2} [-mn \pm \sqrt{r^2(1 + m^2) - n^2}]$$

Tangentengleichung für Berührungspunkt $P_1(x_1; y_1)$

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

$$(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$$

Für den Kreis mit:
 $x^2 + y^2 = r^2$
 $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Normalengleichung

$$y = \frac{y_1}{x_1} x; \quad \frac{y - k}{x - h} = \frac{k - y_1}{h - x_1}$$

Mathematik

Analytische Geometrie: Ellipse und Hyperbel

1.27 Analytische Geometrie: Parabel

x-Achse ist Symmetrieachse

y-Achse ist Symmetrieachse

Halbparameter p

Tangentengleichungen für Berührungspunkt $P_1(x_1; y_1)$

Normalengleichung

Krümmungsradius ρ in $P(x_1; y_1)$

Krümmungsradius im Scheitel

Schnitt der Parabel $y^2 = 2px$ mit der Geraden $y = mx + n$ ergibt

1.28 Analytische Geometrie: Ellipse und Hyperbel

Grundeigenschaft der Ellipse: $PF_1 + PF_2 = 2a$
 der Hyperbel: $PF_2 - PF_1 = 2a$
 F_1, F_2 Brennpunkte,
 r_1, r_2 Brennstrahlen,
 a große, b kleine Halbachse,
 S_1, S_2 Hauptscheitel,
 S'_1, S'_2 Nebenscheitel

Scheiteltgleichungen und Lage der Parabel

im Nullpunkt	Scheitel S beliebig	Lage der Parabel bei	
		$p > 0$	$p < 0$
$y^2 = 2px$	$(y - k)^2 = 2p(x - h)$	nach rechts geöffnet	nach links geöffnet
$x^2 = 2py$	$(x - h)^2 = 2p(y - k)$	nach oben geöffnet	nach unten geöffnet

$k; h$ sind Koordinaten des Scheitels S (siehe Kreis und Ellipse)

Entfernung des Brennpunkts F von der Leitlinie l (Strecke FL)

$$y y_1 = p(x + x_1) \quad \text{für Scheiteltgleichung } y^2 = 2px$$

$$x x_1 = p(y + y_1) \quad \text{für Scheiteltgleichung } x^2 = 2py$$

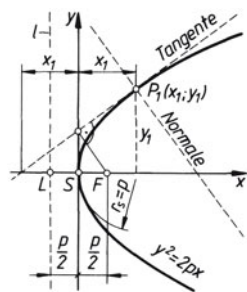
$$(y - k)(y_1 - k) = p(x + x_1 - 2h) \quad \text{für Scheiteltgleichung } (y - k)^2 = 2p(x - h)$$

$$(x - h)(x_1 - h) = p(y + y_1 - 2k) \quad \text{für Scheiteltgleichung } (x - h)^2 = 2p(y - k)$$

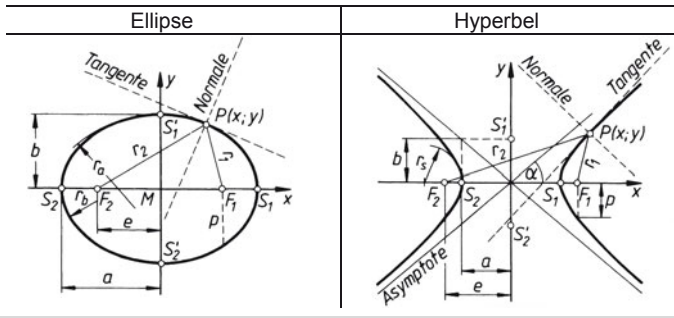
$$p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0$$

$$\rho = \frac{(p + 2x_1)^{3/2}}{\sqrt{p}}$$

$$r_s = p$$



zwei reelle Schnittpunkte für $p > 2mn$,
 eine Tangente für $p = 2mn$,
 keinen reellen Schnittpunkt für $p < 2mn$.



	Ellipse	Hyperbel
Mittelpunktsgleichung (M liegt im Nullpunkt)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
in Parameterform	$x = a \cos \vartheta; y = b \sin \vartheta$	$x = a \cosh \vartheta; y = b \sinh \vartheta$
für beliebige Lage von $M(h; k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
lineare Exzentrizität e	$e = \sqrt{a^2 - b^2}$	$e = \sqrt{a^2 + b^2}$
numerische Exzentrizität ε	$\varepsilon = \frac{e}{a} < 1$	$\varepsilon = \frac{e}{a} > 1$
Länge des Lotes p in den Brennpunkten	$p = \frac{b^2}{a}$	$p = \frac{b^2}{a}$
Scheitelgleichung	$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$	$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$
Polargleichung (Mittelpunkt ist Pol)		$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$
Brennstrahlenlänge r_1, r_2	$r_1 = F_1 P = a - \varepsilon x$ $r_2 = F_2 P = a + \varepsilon x$	$r_1 = F_1 P = \pm(\varepsilon x - a)$ $r_2 = F_2 P = \pm(\varepsilon x + a)$
Tangentengleichung für $M(0; 0)$	$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$	$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$
Normalengleichung für $M(0; 0)$	$\frac{x - x_1}{x_1 b^2} = \frac{y - y_1}{y_1 a^2}$	$\frac{x - x_1}{x_1 b^2} = -\frac{y - y_1}{y_1 a^2}$
Scheitelradien r_a, r_b, r_s	$r_a = \frac{a^2}{b}; r_b = \frac{b^2}{a}$	$r_s = \frac{b^2}{a}$
Radius ϱ des Krümmungskreises im Punkt $(x_1; y_1)$	$\varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} \right)^{3/2}$	$\varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} \right)^{3/2}$
Ellipsenumfang U (Näherung)	$U \approx \pi [1,5(a+b) - \sqrt{ab}]$	
Flächeninhalt A	$A = \pi a b$	
Steigungswinkel α der Asymptoten aus		$\tan \alpha = m = \pm \frac{b}{a}$

Die gleichseitige Hyperbel hat gleiche Achsen: $a = b$; ihre Gleichung lautet: $x^2 - y^2 = a^2$; ihre Asymptoten stehen rechtwinklig aufeinander; sind die Koordinatenachsen die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel, so gilt $x y = a^2/2$ als deren Gleichung.

1.29 Reihen

Definition

Arithmetische Reihen

In einer arithmetischen Reihe $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ist die Differenz d zweier aufeinander folgender Glieder konstant; jedes Glied ist arithmetisches Mittel seiner beiden Nachbarglieder:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$$

allgemeine Form
(s Summe)

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d]$$

Schlussglied z

$$z = a + (n - 1)d$$

Anfangsglied a

$$a = z - (n - 1)d$$

Differenz d

$$d = \frac{z - a}{n - 1}$$

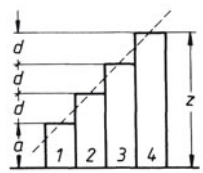
Anzahl der Glieder n

$$n = \frac{z - a + d}{d} = \frac{z - a}{d} + 1$$

Summe s von n Gliedern
der Reihe

$$s = \frac{n}{2}(a + z) = an + \frac{n(n-1) \cdot d}{2} = \frac{n}{2}(2a + nd - d)$$

$$s = \frac{n}{2}(2z - nd + d) = \frac{a + z}{2} \cdot \frac{z - a + d}{d}$$



$n = 4$ Glieder

Schema einer arithmetischen Stufung

Definition

Geometrische Reihen

In einer geometrischen Reihe $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ist der Quotient q zweier aufeinander folgender Glieder konstant; jedes Glied ist geometrisches Mittel seiner beiden Nachbarglieder:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

allgemeine Form
(s Summe)

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

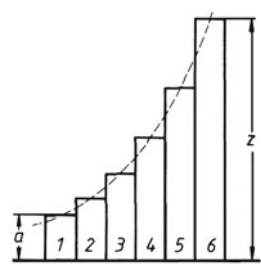
Schlussglied z

$$z = aq^{n-1}$$

Summe s von n Gliedern
der Reihe

$$s = a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a - qz}{1 - q} \quad (\text{für } q < 1)$$

$$s = a \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{qz - a}{q - 1} \quad (\text{für } q > 1)$$



$n = 6$ Glieder

Schema einer geometrischen Stufung

Quotient a
(Stufensprung)

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$$

1.30 Potenzreihen

Funktion	Potenzreihe	Konvergenzbereich
$(1 \pm x)^n$	$= 1 \pm \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 \pm \binom{n}{3}x^3 + \pm \dots$ (n beliebig)	$ x \leq 1$
$(1 \pm x)^{1/2}$	$= 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \dots$ $= 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm \dots$	$ x \leq 1$
$(1 \pm x)^{1/3}$	$= 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}x^2 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \pm \dots$ $= 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \pm \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 \pm \dots$	$ x \leq 1$
$(1 \pm x)^{1/4}$	$= 1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 \pm \frac{7}{128}x^3 - \frac{77}{2048}x^4 \pm \frac{231}{8192}x^5 - \dots$	$ x \leq 1$
$\frac{1}{(1 \pm x)^n}$	$= 1 \mp \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}x^2 \mp \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$	$ x < 1$
$\frac{1}{(1 \pm x)^{1/2}}$	$= 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$\frac{1}{(1 \pm x)^{1/3}}$	$= 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}x^2 \mp \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$\frac{1}{(1 \pm x)^{1/4}}$	$= 1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}x^2 \mp \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$\frac{1}{(1 \pm x)}$	$= 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$\frac{1}{(1 \pm x)^2}$	$= 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots$	$ x < 1$
$\frac{1}{(1 \pm x)^3}$	$= 1 \mp \frac{1}{2}(2 \cdot 3x \mp 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 \mp 5 \cdot 6x^4 + \dots)$	$ x < 1$
a^x	$= 1 + \ln a \frac{x}{1!} + (\ln a)^2 \frac{x^2}{2!} + (\ln a)^3 \frac{x^3}{3!} + (\ln a)^4 \frac{x^4}{4!} + \dots$	$ x < \infty$
e^x	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$; daraus e :	$ x < \infty$
	$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2,718281828459$	
e^{-x}	$= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$; daraus e^{-1} :	$ x < \infty$
	$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots = 0,367879441$	
e^{ix}	$= \cos x + i \sin x = 1 + i \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \dots$	Formeln von Euler
e^{-ix}	$= \cos x - i \sin x = 1 - i \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	

Mathematik
Potenzreihen

Funktion	Potenzreihe	Konvergenzbereich
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\ln(1-x)$	$-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	$2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \dots\right)$	$ x \leq 1$
$\ln \frac{x+1}{x-1}$	$2\left(x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} + \frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{7}x^{-7} + \dots\right)$	$ x > 1$
$\ln x$	$2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7 + \dots\right]$	$x > 0$
$\ln(a+x)$	$\ln a + 2\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5 + \dots\right]$	$a > 0; x > -a$
$\ln 2$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots = 0,693147180$	
$\ln 3$	$1 + \frac{2}{3 \cdot 2^3} + \frac{2}{5 \cdot 2^5} + \frac{2}{7 \cdot 2^7} + \dots = 1,098612288$	
$\sin x$	$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$	$ x < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$	$ x < \infty$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \frac{17x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{62x^9}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$	$ x < \pi/2$
$\cot x$	$\frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} - \frac{2x^5}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{x^7}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots$	$0 < x < \pi$
$\sin 1$	$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = 0,841470984$	
$\cos 1$	$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots = 0,540302305$	
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$	$ x < 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \arcsin x$	$ x < 1$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$	$ x < 1$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{\pi}{2} - \arctan x$	$ x < 1$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	$ x < \infty$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$	$ x < \infty$
$\sinh 1$	$1,175\,201\,193; \quad \cosh 1 = 1,543\,080\,634$	

1.31 Differenzialrechnung: Grundregeln

Funktion	Ableitung	Beispiele
Funktion mit konstantem Faktor $y = a f(x)$	$y' = a f'(x)$	$y = 3 x^2$ $y' = 6 x$ $y = -3 x^4$ $y' = -12 x^3$
Potenzfunktion: $y = x^n$	$y' = n x^{n-1}$	$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Konstante $y = a$	$y' = 0$	$y = 50$ $y' = 0$
Summe oder Differenz $y = u(x) \pm v(x)$	$y' = u'(x) \pm v'(x)$	$y = x + x^3$ $y' = 1 + 3 x^2$ $y = 5 - 2 x + x^2$ $y' = -2 + 2 x = 2(x - 1)$
Produktregel: $y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u'v + uv'$	$y = \sin x \cdot \cos x$ $y' = \sin(x) \cdot (-\sin x) + \cos x \cdot \cos x$ $= \cos 2x$
bei mehr als zwei Faktoren: $y = u \cdot v \cdot w \cdot z = f(x)$	$y' = u'v w z + u v' w z + u v w' z + u v w z'$	$y = e^x \arcsin x x^4$ $y' = e^x \arcsin x x^4 + e^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x^4 + e^x \arcsin x 4 x^3$ $y' = e^x x^3 \left(x \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 4 \arcsin x \right)$
Quotientenregel: $y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \frac{x+1}{x-1}$ $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$
Kettenregel: $y = f[u(x)]$	$y' = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$	$y = \cos(3x + 5)$, also $u = 3x + 5$ und damit $y' = -\sin(3x + 5) \cdot 3 = -3 \sin x(3x + 5)$
Umkehrfunktion: $x = \varphi(y)$	$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}$	$y = \tan x$ $x = \arctan y$ $\varphi'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$ $y' = \frac{1}{\varphi'(y)} = 1 + y^2$
logarithmische Regel	Erst logarithmieren, dann nach der Kettenregel differenzieren	$y = (2x)^{\sin x}$ $\ln y = \ln(2x)^{\sin x} = \sin x \cdot \ln(2x)$ $\frac{1}{y} \cdot y' = \sin x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 + \ln(2x) \cdot \cos x$ $y' = (2x)^{\sin x} \left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln(2x) \right]$

Mathematik Integrationsregeln

Funktion	Ableitung	Beispiele
implizites Differenzieren	Die Funktion wird nicht nach einer Veränderlichen aufgelöst, sondern implizit gliedweise differenziert	$x^2 + y^2 = r^2$ $2x + 2y \cdot y' = 0$ $y' = \frac{-x}{y}$

1.32 Differenzialrechnung: Ableitungen elementarer Funktionen

$\frac{da}{dx} = 0 \ (a = \text{konst})$ $\frac{dx^n}{dx} = n x^{n-1}$ $\frac{d(mx+a)}{dx} = m$ $\frac{dax^n}{dx} = n a x^{n-1}$ $\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\frac{de^x}{dx} = e^x$ $\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a$ $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$ $\frac{d^a \log x}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$	$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$ $\frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\frac{d \cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$ $\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ $\frac{d \operatorname{arccot} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x$ $\frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x$ $\frac{d \tanh x}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ $\frac{d \operatorname{coth} x}{dx} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \operatorname{coth}^2 x$ $\frac{d \operatorname{arsinh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\frac{d \operatorname{arcosh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\frac{d \operatorname{artanh} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$ $\frac{d \operatorname{arcoth} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$
--	---	---

1.33 Integrationsregeln

Konstantenregel

Ein Faktor k beim Integranden $f(x)$ dx kann vor das Integral gezogen werden:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int 7 \cdot x^2 dx = 7 \cdot \int x^2 dx = 7 \left[\frac{x^3}{3} \right] + C$$

Summenregel

Eine Summe wird gliedweise integriert:

$$\int [u(x) + v(x)] dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx$$

$$\int (1 + x + x^2 + x^3) dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$$

Einsetzregel (Substitutionsmethode)

1. Form: In den Integranden wird eine Funktion $z(x)$ so eingeführt, dass deren Ableitung z' als Faktor von dx auftritt:

$$\int f(x) dx = \int \varphi(z) \cdot z' \cdot dx = \int \varphi(z) dz$$

2. Form: Eine neue Funktion z einführen; aus der Substitutionsgleichung dx berechnen und alles unter dem Integral einführen:

$$\int \sin x \cos x dx; \sin x = z; z' = \frac{dz}{dx} = \cos x$$

$$\int \sin x \cos x dx = \int z \cdot z' dx =$$

$$= \int z dz = \frac{z^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos z} \cos z dz = \arcsin x$$

$$x = \sin z; \sqrt{1-\sin^2 z} = \sqrt{1-x^2} = \cos z$$

$$dx = \cos z dz; z = \arcsin x$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int \varphi(z) dz$$

$$(ax+b) = z; \frac{dz}{dx} = a \Rightarrow dx = \frac{dz}{a}$$

Sonderregeln

Ist der Zähler eines Integranden die Ableitung des Nenners, so ist das Integral gleich dem natürlichen Logarithmus des Nenners:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)$$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx} dx = \ln(ax^2+bx)$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln(x+a)$$

Produktregel (partielle Integration)

Lässt sich der Integrand als Produkt zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ darstellen, so kann der neue Integrand einfacher zu integrieren sein:

$$\int f(x) g(x) dx = \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x$$

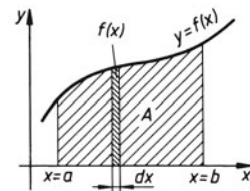
$$\begin{pmatrix} u = x; v' = \cos x \\ u' = 1; v = \sin x \end{pmatrix}$$

Flächenintegral (bestimmtes Integral)

Ist A der Flächeninhalt unter der Kurve $y = f(x)$, begrenzt durch die Ordinaten $x = a$ und $x = b$, so gilt

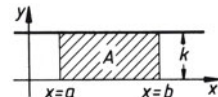
$$A = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

d. h. das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ stellt den Flächeninhalt unter der Kurve $y = f(x)$ bis zur x -Achse im Intervall von a bis b dar ($a \leq x \leq b$)



Integrieren einer Konstanten k

$$\int_a^b k \cdot dx = [kx]_a^b = k(b-a)$$



Vorzeichenwechsel

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

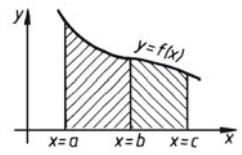
Vertauschen der Grenzen bedeutet Vorzeichenwechsel (Integrieren von anderer Richtung kommend)

Mathematik

Lösungen häufig vorkommender Integrale

Aufspalten des bestimmten Integrals in Teilintegrale

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

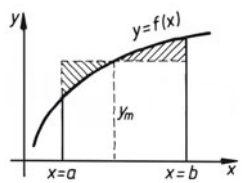


Definition des Mittelwertes y_m

Mittelwert y_m ist die Höhe des flächengleichen Rechtecks gewonnen aus:

$$(b-a)y_m = \int_a^b f(x) dx$$

$$y_m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$



1.34 Grundintegrale

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $n \neq -1$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C; x \neq 0$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C$ $ x > 1$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C'$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artanh} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C; x < 1$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arcoth} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + C; x > 1$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $0 < a \neq 1$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{coth} x + C$ $x \neq 0$	

1.35 Lösungen häufig vorkommender Integrale (ohne Integrationskonstante C geschrieben)

Integrale algebraischer Funktionen

$\int (a \pm bx)^n dx = \pm \frac{(a \pm bx)^{n+1}}{b(n+1)}; n \neq -1$	$\int \frac{x dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{a+bx} + \ln a+bx \right)$
$= \pm \frac{1}{b} \ln a \pm bx ; n = -1$	
$\int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln a+bx $	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{artanh} \frac{x}{a}; \left| \frac{x}{a} \right| < 1$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arcoth} \frac{x}{a}; \left| \frac{x}{a} \right| > 1$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctan} \frac{bx}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{a + bx}{a - bx} \right|$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^n} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1); n = 1$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}}; n > 1$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctan} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$= -\frac{2}{2ax + b} \quad b^2 - 4ac = 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| \quad b^2 - 4ac > 0$$

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{1}{(n-1)(4ac - b^2)} \cdot \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}$$

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = -\frac{A}{2a(n-1)} \cdot \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} +$$

$$+ \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcosh} \left| \frac{a}{x} \right| = -\frac{1}{2a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arsinh} \frac{a}{x} = -\frac{1}{2a} \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \ln(bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \left(\frac{bx}{a} \right)$$

Mathematik**Lösungen häufig vorkommender Integrale**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax + b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| \quad a > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad a < 0$$

$$\int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} + \frac{a^2}{2b} \operatorname{arsinh} \left(\frac{b}{a} x \right)$$

$$\int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} - \frac{a^2}{2b} \arccos \left(\frac{b}{a} x \right)$$

$$\int \sqrt{ax^2 - b} dx = \frac{x}{2} \sqrt{ax^2 - b} - \frac{b^2}{2a} \operatorname{arcosh} \left(\frac{a}{b} x \right)$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left(\frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{8} a^2 x \right) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{8} a^4 \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx = \left(\frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{8} a^2 x \right) \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{8} a^4 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx = \left(\frac{1}{4} x^3 + \frac{1}{8} a^2 x \right) \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8} a^4 \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}|$$

Integrale transzendenter Funktionen

$$\int \ln(ax) dx = x[\ln(ax) - 1]$$

$$\int \frac{1}{x} (\ln x)^n dx = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1}$$

$$\int \ln(a + bx) dx = \frac{a + bx}{b} [\ln(a + bx) - 1]$$

$$\int e^x x^n dx = e^x [x^n - n x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \dots + (-1)^n n!]$$

$$\int e^{-x} x^n dx = -e^{-x} [x^n + n x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!]$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \left(\sin bx - \frac{b}{a} \cos bx \right)$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \left(\frac{b}{a} \sin bx + \cos bx \right)$$

$$\int \sin(a + bx) dx = -\frac{1}{b} \cos(a + bx)$$

$$\int \cos(a + bx) dx = \frac{1}{b} \sin(a + bx)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\tan x|$$

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} = \frac{1}{a} \sin \varphi \ln \left| \tan \frac{x + \varphi}{2} \right| \quad \tan \varphi = \frac{a}{b}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 2 \cot 2x$$

$$\int \sin m x \sin n x \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right) \quad |m| \neq |n|$$

$$\int \cos m x \cos n x \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right) \quad |m| \neq |n|$$

$$\int \sin m x \cos n x \, dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right) \quad |m| \neq |n|$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\int \operatorname{arccot} x \, dx = -x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| \quad \int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$$

$$\int \tanh x \, dx = \ln|\cosh x| \quad \int \operatorname{coth} x \, dx = \ln|\sinh x|$$

Rekursionsformeln

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \left(\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \right) \quad n \neq 1$$

$$\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx$$

$$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x^n} \, dx = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x}{x^{n-1}} \, dx \quad n > 1$$

$$\int \frac{\cos x}{x^n} \, dx = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin x}{x^{n-1}} \, dx \quad n > 1$$

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx \quad n \neq 1$$

$$\int \cot^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x \, dx \quad n \neq 1$$

$$\int (\ln x)^n \, dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx \quad n > 0$$

$$\int \sinh^n x \, dx = \frac{1}{n} \sinh^{n-1} x \cosh x - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} x \, dx$$

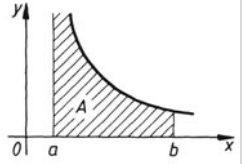
$$\int \cosh^n x \, dx = \frac{1}{n} \cosh^{n-1} x \sinh x + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} x \, dx$$

Mathematik Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung

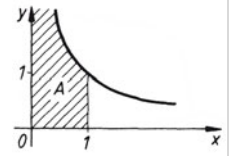
1.36 Uneigentliche Integrale (Beispiele)

Integrand im Intervall unendlich

$$A = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x-a}} dx = 2\sqrt{x-a} \Big|_a^b = 2\sqrt{b-a} - 0 = 2\sqrt{b-a}$$

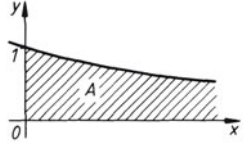


$$A = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = \infty$$

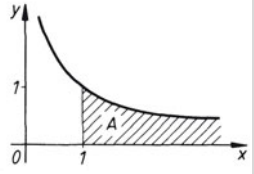


Integrationsweg unendlich

$$A = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = e^{-x} \Big|_0^\infty = e^{-0} - 0 = 1$$



$$A = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^\infty x^{-2/3} dx = 3x^{1/3} \Big|_1^\infty = 3(\infty - 1) = \infty$$



1.37 Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung

Nullstelle

Eine Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle $x = x_0$ dann eine Nullstelle, wenn $y = f(x) = 0$ ist.
 Hat die Funktion $y = f(x)$ die Form $y = A(x)/B(x)$, so muss $A(x_0) = 0$ und reell und $B(x_0) \neq 0$ sein. A ist Zähler, B ist Nenner des Bruchs.

Schnittpunkt mit der y-Achse

Eine Funktion $y = f(x)$ hat dann an der Stelle y_1 einen Schnittpunkt mit der y-Achse, wenn $x_1 = 0$ ist. Bei allen transzendenten Funktionen muss y_1 immer reell sein.

Polstelle

Eine Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle $x = x_2$ bei $\lim_{y \rightarrow \infty} f(x)$ eine Unendlichkeitsstelle.
 Hat die Funktion $y = f(x)$ die Form $y = A(x)/B(x)$, hat sie Pole, wenn $A(x_2) \neq 0$ und $B(x_2) = 0$ ist.

Asymptote

Eine Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle y_4 eine Unendlichkeitsstelle, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

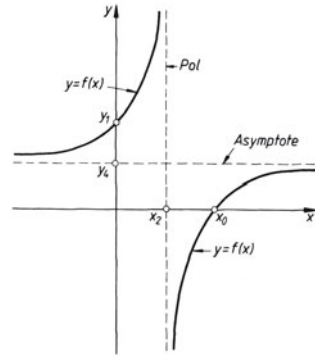
gebildet werden kann.

Eine Funktion von der Form

$$y = f(x) = \frac{x^m}{x^n}$$

hat eine Asymptote:

1. parallel zur x-Achse bei $m = n$,
2. als x-Achse selbst bei $m < n$.



Extremwerte

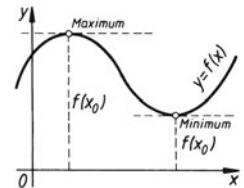
Voraussetzung muss sein, dass eine Funktion $y = f(x)$ mindestens zweimal stetig differenzierbar ist. Ein (relatives) Maximum (Minimum) einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ tritt dann auf, wenn in einer hinreichend kleinen Umgebung alle $f(x)$ kleiner (größer) als $f(x_0)$ sind.

Maximum

Für das Auftreten eines Maximums an der Stelle $x = x_0$ sind die Bedingungen

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0$$

hinreichend.



Minimum

Für das Auftreten eines Minimums an der Stelle $x = x_0$ sind die Bedingungen

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

hinreichend.

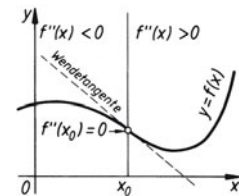
Wendepunkt

Ist eine Funktion $y = f(x)$ dreimal stetig differenzierbar, so besitzt sie an der Stelle $x = x_0$ einen Wendepunkt, wenn sie dort von einer Seite der Tangente auf die andere Seite übertritt.

Für das Auftreten eines Wendepunkts an der Stelle $x = x_0$ sind die Bedingungen

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0$$

hinreichend.

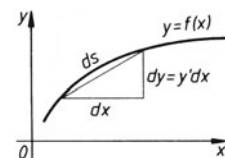


Bogenelement ds bei rechtwinkligen Koordinaten

Für die differenzierbare Funktion $y = f(x)$ zeigt die Anschauung:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx^2$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

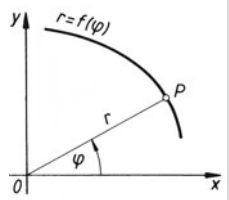


Mathematik

Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung

in Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}
 x &= x(t) & dx &= \dot{x} dt \\
 y &= y(t) & dy &= \dot{y} dt \\
 ds^2 &= \dot{x}^2 dt^2 + \dot{y}^2 dt^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt^2 \\
 ds &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt
 \end{aligned}$$



in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
 r &= f(\varphi); \quad ds^2 = dr^2 + d\varphi^2 r^2; \quad dr = \dot{r} d\varphi \\
 ds^2 &= \dot{r}^2 d\varphi^2 + r^2 d\varphi^2 = d\varphi^2 (r^2 + \dot{r}^2) \\
 ds &= \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi
 \end{aligned}$$

Krümmung k und Krümmungsradius ρ

Aus der Definition $k = d\varphi / ds$ und $\rho = 1/k$ ergibt sich für die Kurve $y = f(x)$:

bei rechtwinkligen Koordinaten

$$k = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} \quad \rho = \frac{1}{|k|} = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''}$$

in Parameterdarstellung

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} \quad \rho = \frac{1}{|k|} = \frac{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

in Polarkoordinaten

$$k = \frac{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{\sqrt{(r^2 + \dot{r}^2)^3}} \quad \rho = \frac{1}{|k|} = \frac{\sqrt{(r^2 + \dot{r}^2)^3}}{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}$$

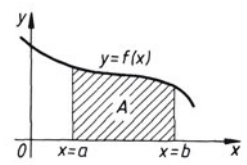
Flächenberechnung in rechtwinkligen Koordinaten

$$A = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

$$A = F(b) - F(a)$$

Beispiel: Fläche unter Sinuskurve

$$A = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi$$



Vorzeichenwechsel beim Vertauschen der Grenzen:

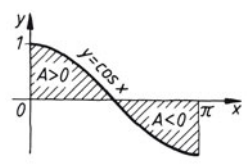
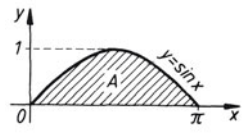
$$A = [\cos x]_\pi^0 = \cos 0 - \cos \pi$$

$$A = 1 - (-1) = 2$$

Beispiel:

$$A = \int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi$$

$$A = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

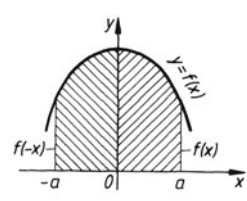


positiver und negativer Flächeninhalt

gerade Funktionen $f(-x) = f(x)$

liegen symmetrisch zur y-Achse, z. B. $\cos x, \cos^2 x, x^2, x \sin x$

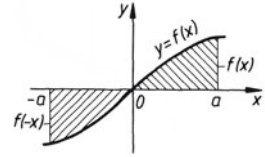
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$



ungerade Funktionen
 $f(-x) = -f(x)$

liegen symmetrisch zum Nullpunkt, z. B.
 $\sin x, \tan x, x \cos x, x^3$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$



Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen

$$A = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$$

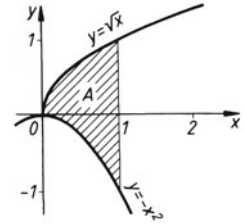
Obere Funktion minus untere Funktion.
 Intervall: $0 \leq x \leq b$

Beispiel:

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-x^2)] dx$$

$$A = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$



Flächenberechnung in Parameterdarstellung

$$A = \int_{x_0}^x y(t) dx = \int_{t_0}^t y \dot{x} dt$$

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad dx = \dot{x} dt$$

Beispiel: Fläche unter Zykloidenbogen

$$x = r(t - \sin t)$$

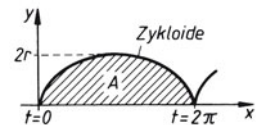
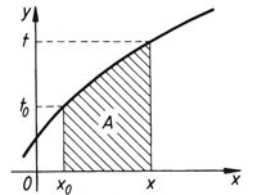
$$y = r(1 - \cos t) \quad \dot{x} = r(1 - \cos t)$$

Intervall: $0 \leq t \leq 2\pi$

$$A = \int_0^{2\pi} y \dot{x} dt = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t)r(1 - \cos t) dt$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

$$A = r^2 (2\pi + 0 + \pi) = 3r^2 \pi$$



Flächeninhalt der geschlossenen Kurve

Integration vom Anfangsparameter bis zum Endparameter als Grenzpunkt:

$$A = \int_{t_0}^{t_2} y \dot{x} dt$$

Beispiel: Kreisfläche

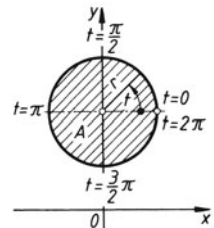
$$x = r \cos t \quad \text{Intervall: } 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$y = 2r + r \sin t \quad \dot{x} = -r \sin t$$

$$A = \int_0^{2\pi} y \dot{x} dt = - \int_0^{2\pi} r(2 + \sin t)r \cdot \sin t dt$$

$$A = -r^2 \int_0^{2\pi} [2\sin t + \sin^2 t] dt$$

$$A = -r^2 (0 + \pi) = -r^2 \pi$$



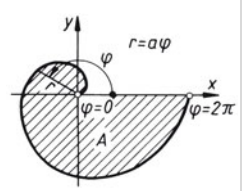
Mathematik

Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung

Flächenberechnung in Polarkoordinaten

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$$

Beispiel: Archimedische Spirale, überstrichene Fläche von $\varphi_1 = 0$ bis $\varphi_2 = 2\pi$
 $r = a\varphi$



$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi$$

$$A = \left[\frac{a^2}{6} \varphi^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{4 a^2 \pi^3}{3}$$

Volumen V von Rotationskörpern

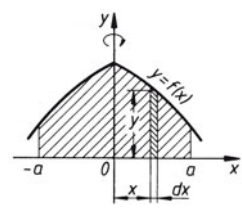
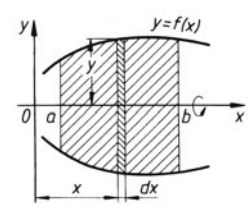
aus erzeugender Fläche mal Schwerpunktsweg bei einer Umdrehung:

um die x-Achse:

um die y-Achse

$$V = \pi \int_{x=a}^{x=b} y^2 dx$$

$$V = 2\pi \int_{x=-a}^{x=a} x y dy \quad \text{bzw.} \quad V = \pi \int_{y=a}^{y=b} x^2 dy$$



Beispiel: Kugelvolumen mit $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Beispiel: Volumen eines Rotationsparaboloids mit $y = a x^2$

Intervall: $-r \leq x \leq r$

Intervall: $0 \leq y \leq h$

$$V = \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r$$

$$V = \pi \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi}{a} \int_0^h y dy$$

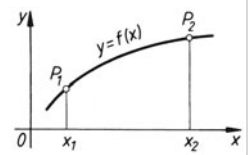
$$V = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$V = \left[\frac{\pi}{2a} y^2 \right]_0^h = \frac{\pi h^2}{2a}$$

Kurvenlängen s in rechtwinkligen Koordinaten

Ist die Funktion $y = f(x)$ im Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$ eindeutig, also $f'(x)$ stetig, so ist die Länge s der Kurve:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$



in Parameterdarstellung

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} dy = \dot{y} dt \\ dx = \dot{x} dt \end{matrix} \quad \text{Intervall } t_1 \leq t \leq t_2$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

in Polarkoordinaten

$r = f(\varphi)$ Länge s des Kurvenstückes zwischen den Leitstrahlen $r_1 = f(\varphi_1)$ und $r_2 = f(\varphi_2)$:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi$$

Beispiel: Bogen s des Viertelkreises $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ mit Radius r :

$$s = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} = \left[r \cdot \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = \frac{\pi r}{2}$$

mit $x = r \cos t$ und $y = r \sin t$; $\dot{x}^2 = r^2 \sin^2 t$, $\dot{y}^2 = r^2 \cos^2 t$ wird:

$$s = r \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = r \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi r}{2};$$

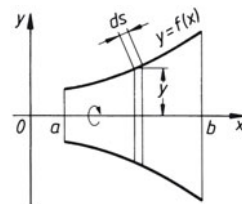
ebenso mit $r = \text{konstant}$, $dr/d\varphi = 0$:

$$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2} d\varphi = r \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi r}{2}, \text{ wie oben.}$$

Mantelflächen M von Rotationskörpern

aus erzeugender Kurve mal Schwerpunktsweg bei einer Umdrehung um

die x -Achse:



$$M = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

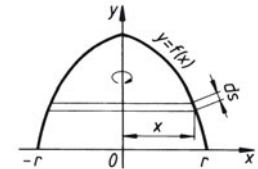
Beispiel: Kurvendiskussion der Gleichung

$$y = f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x^3}{2x^2 - 3x - 2}$$

Nullstellen:

$$y = f(x) = 0 \Rightarrow A(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \mathcal{P}_1$$

die y -Achse:



$$M = 2\pi \int_0^r x ds = 2\pi \int_0^r x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

(siehe dazu Bild am Ende des Abschnitts)

$x_1 = 0$ ist eine Lösung der Gleichung, da $B(x) \neq 0$ ist und kein unbestimmter Ausdruck vorliegt.

Mathematik

Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung

Schnittpunkt mit der y -Achse:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{0 - 0 - 2} = 0; \left. \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array} \right\} P_2$$

Die Kurve schneidet die y -Achse bei $y_2 = 0$.

Polstellen:

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow B(x) = 0$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x_{3/4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \quad \left. \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x_4 = -0,5 \end{array} \right\} P_3, P_4$$

Die Funktion besitzt zwei Pole (Unendlichkeitsstellen). Ein unbestimmter Ausdruck liegt nicht vor, weil $A(x_3, x_4) \neq 0$ ist.

Asymptoten:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow y = f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4} + \frac{\frac{13}{4}x + \frac{3}{2}}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$y_A = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

Die unecht gebrochene rationale Funktion lässt sich in die Summe der ganzen und der gebrochenen Funktionen zerlegen.

Schnittpunkt zwischen Kurve und Asymptote:

$$y = y_A \Rightarrow \frac{x^3}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}; \left. \begin{array}{l} x_5 = -0,461 \\ y_5 = 0,51 \end{array} \right\} P_5$$

Durch Gleichsetzen der ganzen Funktion mit der Teilfunktion ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunkts.

Extremwerte:

$$y' = f'(x) = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x^2(x^2 - 3x - 3)}{(2x^2 - 3x - 2)^2}$$

$$2x^2(x^2 - 3x - 3) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} x_6 = 0 \\ y_6 = 0 \end{array} \right\} P_6$$

$$2x^2 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} x_7 = 3,8 \quad y_7 = 3,58 \\ x_8 = -0,7 \quad y_8 = -0,315 \end{array} \right\} P_7, P_8$$

Die Nullsetzung des Zählers der ersten Ableitung ergibt die x -Koordinaten der Extremwerte. Die zugehörigen y -Koordinaten ergeben sich durch Einsetzen der x -Werte in die Stammfunktion.

$$y'' = f''(x) = \frac{2x(13x^2 + 18x + 12)}{(2x^2 - 3x - 2)^3}$$

$$y'' = f''(x_7) = 131,6 > 0 \quad \text{Minimum}$$

$$y'' = f''(x_8) = -32,9 < 0 \quad \text{Maximum}$$

Die errechneten x -Koordinaten (x_7, x_8) werden in die Funktion $y'' = f''(x)$ eingesetzt, um ein Maximum bzw. Minimum bestimmen zu können.

Wendepunkte:

$$y''' = f'''(x) = 0$$

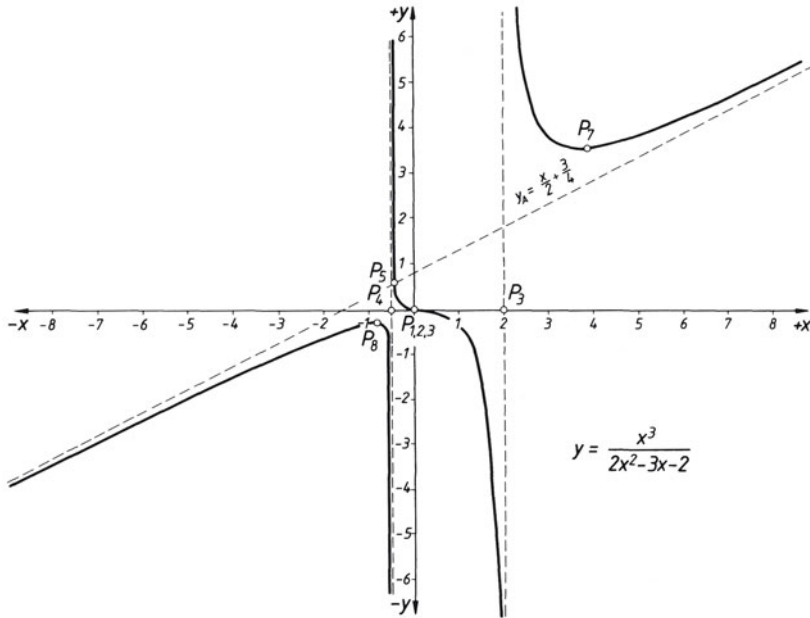
$$2x(13x^2 + 18x + 12) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} x_6 = 0 \\ y_6 = 0 \end{array} \right\} P_6$$

$13x^2 + 18x + 12 = 0$ führt zu einem imaginären Ergebnis

$$y''' = f'''(x) = \frac{-12(13x^2 + 18x + 12)}{(2x^2 - 3x - 2)^4}$$

$$y''' = f'''(x_6) = 3 \neq 0$$

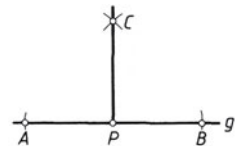
Es ergeben sich die Koordinaten eines Wendepunkts, der dann existiert, wenn die dritte Ableitung ungleich null ist.



1.38 Geometrische Grundkonstruktionen

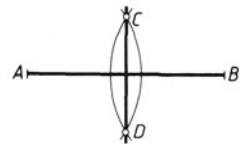
Senkrechte im Punkt P einer Geraden errichten

Von P aus gleiche Strecken nach links und rechts abtragen ($\overline{PA} = \overline{PB}$). Kreisbögen mit gleichem Radius um A und B schneiden sich in C . \overline{PC} ist gesuchte Senkrechte.



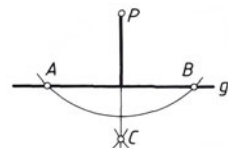
Strecke halbieren (Mittelsenkrechte)

Kreisbögen mit gleichem Radius um A und B nach oben und unten schneiden sich in C und D . \overline{CD} steht rechtwinklig auf \overline{AB} und halbiert diese.



Lot vom Punkt P auf Gerade g fällen

Kreisbogen um P schneidet g in A und B . Kreisbögen mit gleichem Radius um A und B schneiden sich in C . \overline{PC} ist das Lot auf die Gerade g .

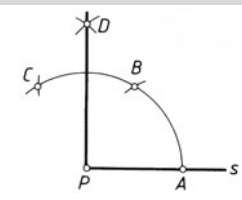


Mathematik

Geometrische Grundkonstruktionen

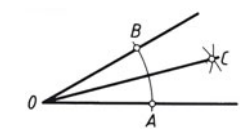
Senkrechte im Endpunkt P einer Strecke s (eines Strahles) errichten

Kreis von beliebigem Radius um P ergibt A . Gleicher Kreis um A ergibt B , um B ergibt C . Kreise von beliebigem Radius um B und C schneiden sich in D . \overline{PD} ist die gesuchte Senkrechte in P .



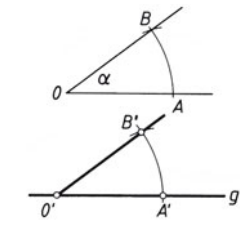
Winkel halbieren

Kreis um O schneidet die Schenkel in A und B . Kreise mit gleichem Radius ergeben Schnittpunkt C . \overline{OC} halbiert den gegebenen Winkel.



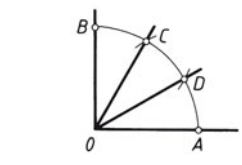
einen gegebenen Winkel α an eine Gerade g antragen

Kreis um O mit beliebigem Radius schneidet die Schenkel des gegebenen Winkels α in A und B . Kreis mit gleichem Radius um O' gibt A' . Kreis mit \overline{AB} um A' ergibt Schnittpunkt B' . Strahl von O' durch B' schließt mit Gerade g Winkel α ein.



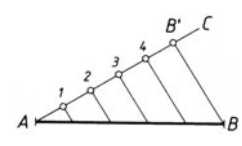
einen rechten Winkel dreiteilen

Kreis um O ergibt Schnittpunkte A und B . Kreise um A und B mit gleichem Radius wie vorher schneiden den Kreis um O in C und D .



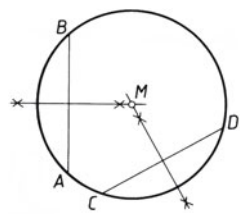
Strecke AB in gleiche Teile teilen

Auf beliebig errichtetem Strahl \overline{AC} von A aus fortschreitend mit beliebiger Zirkelöffnung die gewünschte Anzahl gleicher Teile abtragen, z. B. 5 Teile. B' mit B verbinden und Parallele zu $\overline{BB'}$ durch Teilpunkte 1 ... 4 legen.



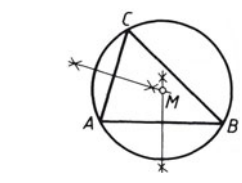
Mittelpunkt eines Kreises ermitteln

Zwei beliebige Sehnen \overline{AB} und \overline{CD} eintragen und darauf Mittelsenkrechte errichten. Schnittpunkt M ist Kreismittelpunkt.



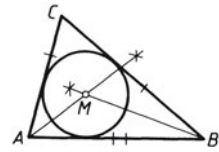
Außenkreis für gegebenes Dreieck

Mittelsenkrechte auf zwei Dreieckseiten schneiden sich im Mittelpunkt M des Außenkreises.



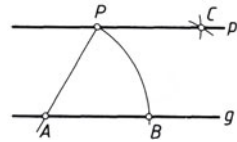
Innenkreis für gegebenes Dreieck

Schnittpunkt von zwei Winkelhalbierenden ist Mittelpunkt M des Innenkreises.



Parallele zu gegebener Gerade g durch Punkt P

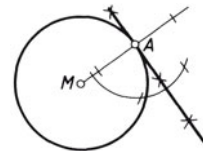
Beliebig gerichteter Strahl von P aus trifft Gerade g in A . Kreis mit \overline{PA} um A schneidet g in B . Kreise mit gleichem Radius \overline{PA} um P und B schneiden sich in C . Strecke \overline{PC} ist Teil der zu g parallelen Geraden p .



Tangente an Kreis im gegebenen Punkt A

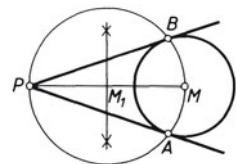
M mit A verbinden und über A hinaus verlängern und in A Senkrechte errichten – oder –

Strecke \overline{MA} zeichnen und im Endpunkt A Senkrechte errichten.



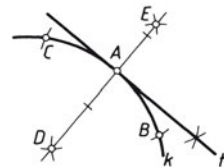
Tangenten an Kreis von gegebenem Punkt P aus

P mit Mittelpunkt M verbinden und \overline{PM} halbieren ergibt M_1 . Kreis mit Radius MM_1 um M_1 schneidet gegebenen Kreis in A und B . \overline{PA} und \overline{PB} sind Teile der gesuchten Tangenten.



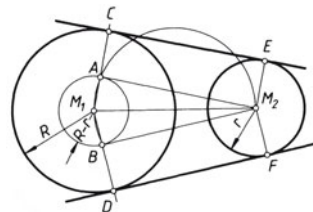
Tangente t im gegebenen Punkt A an Kreis k mit unbekanntem Mittelpunkt

Kreis um A von beliebigem Radius ergibt Schnittpunkte B und C . Kreise von beliebigem Radius um B und C ergeben D und E , deren Verbindungsline Teil des Radiussees von k ist. Senkrechte in A auf \overline{DE} ist Teil der Tangente t .



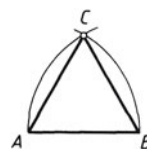
Tangenten an zwei gegebene Kreise

Hilfskreis um M_1 mit Radius $(R - r)$ zeichnen und von M_2 aus die Tangenten $\overline{M_2A}$ und $\overline{M_2B}$ anlegen. Strecken $\overline{M_1A}$ und $\overline{M_1B}$ bis C und D verlängern. Parallele zu $\overline{M_1C}$ und $\overline{M_1D}$ durch M_2 ergeben E und F . \overline{CE} und \overline{DF} sind die gesuchten Tangenten.



Gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge \overline{AB}

Kreise mit Radius \overline{AB} um A und B ergeben Schnittpunkt C und damit das gesuchte Dreieck ABC .

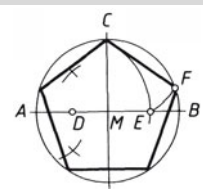


Mathematik

Geometrische Grundkonstruktionen

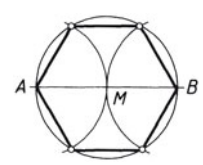
regelmäßiges Fünfeck

Radius \overline{MA} des Umkreises halbieren, ergibt D . Kreisbogen mit \overline{CD} um D ergibt E , mit \overline{CE} um C ergibt F . \overline{CF} ist die gesuchte Fünfeckseite.



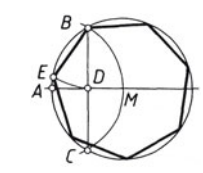
regelmäßiges Sechseck

Radius \overline{MA} des Umkreises ist Sechseckseite. Kreisbögen mit \overline{AM} um A und B schneiden den Umkreis in den Eckpunkten des Sechsecks.



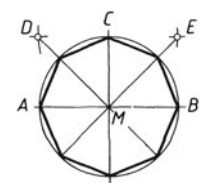
regelmäßiges Siebeneck

Kreisbogen mit Umkreisradius \overline{MA} um A ergibt B und C . Kreisbogen mit Radius \overline{BD} um B ergibt Eckpunkt E . \overline{BE} ist die gesuchte Siebeneckseite.



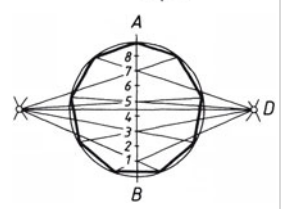
regelmäßiges Achteck

Kreise mit Umkreisradius \overline{MA} um A, B, C ergeben Schnittpunkte D und E . Geraden durch D und M sowie E und M schneiden den Umkreis in den Eckpunkten des Achtecks.



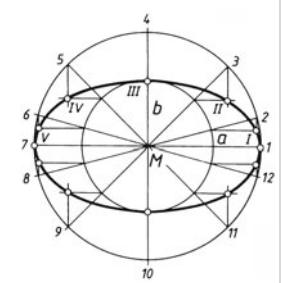
regelmäßiges Neuneck (gilt entsprechend für alle regelmäßigen Vielecke)

Durchmesser \overline{AB} des Umkreises in neun gleiche Teile teilen. Kreise mit Radius \overline{AB} um A und B ergeben Schnittpunkte C und D . Strahlen von C und D durch die Teilpunkte 1, 3, 5, 7 des Durchmessers schneiden den Umkreis in den Eckpunkten des Neunecks.



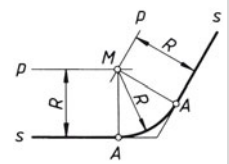
Ellipsenkonstruktion

Hilfskreise um M mit Halbachse a und b als Radius zeichnen und beliebige Anzahl Strahlen 1, 2, 3 ... durch Kreismittelpunkt M legen. In den Schnittpunkten der Strahlen mit den beiden Hilfskreisen Parallele zu den Ellipsenachsen zeichnen, die sich in I, II, III ... als Punkte der gesuchten Kurve schneiden.



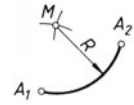
Bogenanschluss: Kreisbogen an die Schenkel eines Winkels

Parallelen p im Abstand R zu den beiden Schenkeln s des Winkels ergeben Schnittpunkt M als Mittelpunkt des gesuchten Kreisbogens. Senkrechte von M auf s ergeben die Anschlusspunkte A .



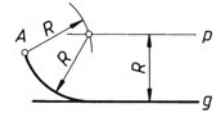
**Bogenanschluss:
Kreisbogen durch zwei
Punkte**

Kreisbogen mit R um gegebene Punkte A_1, A_2 legen Mittelpunkt M des gesuchten Kreisbogens fest.



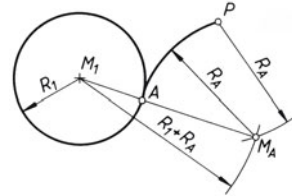
**Bogenanschluss:
Gerade mit Punkt durch
Kreisbogen verbinden**

Parallele p im Abstand R zur Geraden g und Kreisbogen mit R um A legen Mittelpunkt M des gesuchten Kreisbogens fest.



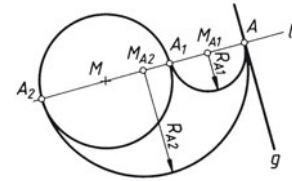
**Bogenanschluss: Kreis
mit Punkt; R_A Radius des
Anschlussbogens**

Kreisbögen mit $R_1 + R_A$ um M_1 und mit R_A um P ergeben Mittelpunkt M_A des Anschlussbogens. $\overline{M_1 M_A}$ schneidet den gegebenen Kreis im Anschlusspunkt A .



**Bogenanschluss:
Kreis mit Gerade g ;
 R_{A1}, R_{A2} Radien der
Anschlussbögen**

Lot l von M auf gegebene Gerade g ergibt Anschlusspunkte A, A_1, A_2 . Die halbierten Strecken $\overline{AA_1}$ und $\overline{AA_2}$ legen die Mittelpunkte M_{A1}, M_{A2} der beiden Anschlussbögen fest.



2.1 Physikalische Größen, Definitionsgleichungen und Einheiten

2.1.1 Mechanik

Größe	Formelzeichen	Definitionsgleichung	SI-Einheit ¹⁾	Bemerkung, Beispiel, andere zulässige Einheiten
Länge	l, s, r	Basisgröße	m (Meter)	1 Seemeile (sm) = 1852 m
Fläche	A	$A = l^2$	m ²	Hektar (ha), 1 ha = 10 ⁴ m ² Ar (a), 1 a = 10 ² m ²
Volumen	V	$V = l^3$	m ³	Liter (l) 1 l = 10 ⁻³ m ³ = 1 dm ³
ebener Winkel	α, β, γ	$\alpha = \frac{\text{Kreisbogen}}{\text{Kreisradius}}$	rad \equiv 1 (Radiant)	$\alpha = 1,7 \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1,7 \text{ rad}$
Raumwinkel	Ω	$\Omega = \frac{\text{Kugel\,fl\,che}}{\text{Radiusquadrat}}$	sr \equiv 1 (Steradian)	$\Omega = 0,4 \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} = 0,4 \text{ sr}$
Zeit	t	Basisgröße	s (Sekunde)	1 min = 60 s; 1 h = 60 min 1 d = 24 h = 86400 s
Frequenz	f	$f = \frac{1}{T}$	$\frac{1}{\text{s}} = \text{s}^{-1} = \text{Hz}$ (Hertz)	bei Umlauffrequenz wird U/s statt 1/s benutzt Periodendauer
Drehfrequenz (Drehzahl)	n	$n = 2 \pi f$	$\frac{1}{\text{s}} = \text{s}^{-1}$	$\frac{\text{U}}{\text{min}} = \frac{1}{\text{min}} = \text{min}^{-1} = \frac{1}{60 \text{ s}}$
Geschwindigkeit	v	$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}$
Beschleunigung	a	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$\frac{\text{cm}}{\text{h}^2}, \frac{\text{km}}{\text{s}^2} \dots$
Fallbeschleunigung	g		$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Normfallbeschleunigung $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$
Winkelgeschwindigkeit	ω	$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{v_u}{r}$	$\frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	φ Drehwinkel in rad
Umfangsgeschwindigkeit	v_u	$v_u = \pi d n = \omega r$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	d Durchmesser n Drehzahl
Winkelbeschleunigung	α	$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{r}$	$\frac{1}{\text{s}^2} = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$	ω Winkelgeschwindigkeit

¹⁾ Einheit des „Système International d'Unités“ (Internationales Einheitensystem)

Physik

Physikalische Größen, Definitionsgleichungen und Einheiten

Größe	Formelzeichen	Definitionsgleichung	SI-Einheit	Bemerkung, Beispiel, andere zulässige Einheiten
Masse	m	Basisgröße	kg	$1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$ $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$
Dichte	ρ	$\rho = \frac{m}{V}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$
Kraft	F	$F = m a$	$\text{N} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$ (Newton)	$1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$
Gewichtskraft	F_G	$F_G = m g$	$\text{N} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$	Normgewichtskraft $F_{Gn} = m g_n$
Druck	p	$p = \frac{F}{A}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kgm}}{\text{m}^2 \text{s}^2}$	$1 \text{ bar} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ $\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$ (Pascal)
dynamische Viskosität	η		$\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kgms}}{\text{m}^2 \text{s}^2}$	$\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \cdot \text{s}$ $1 \text{ P} = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (P Poise)
kinematische Viskosität	ν (Ny)	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}} = \frac{\text{Ns}/\text{m}^2}{\text{kg}/\text{m}^3}$	$1 \text{ St} = 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ (St Stokes)
Arbeit	W	$W = F s$	$\text{J} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$	$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws}$ J Joule Nm Newtonmeter Ws Wattsekunde kWh Kilowattstunde $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}$
Energie	W	$W = \frac{m}{2} v^2$ $W = m g h$	$\text{J} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$	
Leistung	P	$P = \frac{W}{t}$	$\text{W} = \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$	$1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ W}$
Drehmoment	M	$M = F l$	$\text{Nm} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$	Biegemoment M_b Torsionsmoment T
Trägheitsmoment	J	$J = \int dm \rho^2$	kgm^2	Massenmoment 2. Grades (früher: Massenträgheitsmoment)
Flächenmoment 2. Grades	I_x I_y I_p	$I_x = \int dA x^2$ $I_y = \int dA y^2$ $I_p = \int dA \rho^2$	m^4	mm^4 I_x, I_y axiales Flächenmoment 2. Grades I_p polares Flächenmoment 2. Grades (früher: Flächenträgheitsmoment)
Elastizitätsmodul	E	$E = \sigma \frac{l_0}{\Delta l}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \text{m}}$	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
Schubmodul	G	$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \text{m}}$	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ (μ Poisson-Zahl)

Physik

Physikalische Größen, Definitionsgleichungen und Einheiten

2.1.2 Thermodynamik

Größe	Formelzeichen	Definitionsgleichung	SI-Einheit	Bemerkung, Beispiel, andere zulässige Einheiten
Temperatur (thermodynamische Temperatur)	T, ϑ	Basisgröße	K (Kelvin)	$1 \text{ K} = 1^\circ \text{C}$ t, ϑ Celsius-Temperatur
spezifische innere Energie	u	$\Delta u = q + W_V$	$\frac{\text{J}}{\text{kg}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2 \text{ kg}}$	$1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$
Wärme (Wärmemenge)	Q	$Q = m c \Delta \vartheta$ $Q = U - w_V$	$\text{J} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$	$1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$
spezifische Wärme	q	$q = \Delta U - w_V$	$\frac{\text{J}}{\text{kg}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2 \text{ kg}}$	
spezifische Wärmekapazität	c	$c = \frac{Q}{m \Delta \vartheta} = \frac{q}{\Delta T}$	$\frac{\text{J}}{\text{kgK}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2 \text{ kgK}}$	
Enthalpie	H	$H = U + pV$ $h = u + p v$	$\text{J} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$	$h = \frac{H}{m}$ spezifische Enthalpie
Wärmeleitfähigkeit	λ		$\frac{\text{W}}{\text{mK}} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3 \text{ K}}$	$\frac{\text{J}}{\text{m h K}}$ $1 \text{ K} = 1^\circ \text{C}$
Wärmeübergangskoeffizient	α		$\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^3 \text{ K}}$	$\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{ h K}}$ $1 \text{ K} = 1^\circ \text{C}$
Wärmedurchgangskoeffizient	k		$\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^3 \text{ K}}$	$\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{ h K}}$ $1 \text{ K} = 1^\circ \text{C}$
spezifische Gaskonstante	$R_i = \frac{R}{M}$	$R_i = \frac{p}{T \rho}$	$\frac{\text{J}}{\text{kgK}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{ K}}$	M molare Masse
universelle Gaskonstante	R	$R = 8315 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$	$\frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$	$1 \text{ kmol} = 1 \text{ Kilomol}$
Strahlungskonstante	C		$\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^3 \text{ K}^4}$	$C_s = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4}$ C_s Strahlungskonstante des schwarzen Körpers

Physik

Physikalische Größen, Definitionsgleichungen und Einheiten

2.1.3 Elektrotechnik

Größe	Formelzeichen	Definitionsgleichung	SI-Einheit	Bemerkung, Beispiel, andere zulässige Einheiten
elektrische Stromstärke	I	Basisgröße	A (Ampere)	
elektrische Spannung	U	$U = \sum E \Delta s$	V (Volt)	$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{W}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3 \text{A}}$ W (Watt)
elektrischer Widerstand	R		Ω	$1 \frac{\text{V}}{\text{A}} = 1 \Omega = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3 \text{A}^2}$
elektrischer Leitwert	G		$\frac{1}{\Omega}$	$1 \frac{\text{A}}{\text{V}} = 1 \text{ S} = 1 \frac{\text{A}^2 \text{s}^3}{\text{kgm}^2}$ S (Siemens)
elektrische Ladung (Elektrizitätsmengen)	Q		C = As (Coulomb)	1 As = 1 C 1 Ah = 3600 As
elektrische Kapazität	C	$C = \frac{Q}{U}$	$F = \frac{\text{As}}{\text{V}}$ (Farad)	$1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}} = 1 \frac{\text{A}^2 \text{s}^4}{\text{kgm}^2}$
elektrische Flussdichte	D	$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$	$\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	$1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$
elektrische Feldstärke	E	$E = \frac{F}{Q}$	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$	$1 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3 \text{A}}$
Permittivität (früher Dielektrizitätskonstante)	ϵ	$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ϵ_0 elektrische Feldkonstante ϵ_r Permittivitätszahl	$\frac{\text{F}}{\text{m}} = \frac{\text{A}^2 \text{s}^4}{\text{kgm}^3}$	$1 \frac{\text{s}}{\text{V}} = \frac{\text{s}^2 \text{C}^2}{\text{kgm}^3}$
elektrische Energie	W_e	$W_e = \frac{QU}{2}$	Ws	$1 \text{ Nm} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$
magnetische Feldstärke	H	$H = \frac{I}{2\pi r}$	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$	
magnetische Flussdichte, Induktion	B	$B = \mu H$	$T = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \text{A}}$ T (Tesla)	$1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \text{A}}$ $T = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$ Wb (Weber)
magnetischer Fluss	Φ	$\Phi = \sum B \Delta A$	$\text{Wb} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2 \text{A}}$	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2 \text{A}}$
Induktivität	L	$L = \frac{N\Phi}{I}$ (Windungszahl)	$\text{H} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2 \text{A}^2}$ H (Henry)	$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2 \text{A}^2}$
Permeabilität	μ	$\mu = \mu_0 \mu_r$ μ_0 magnetische Feldkonstante μ_r Permeabilitätszahl	$\frac{\text{H}}{\text{m}} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2 \text{A}^2}$	$1 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = 1 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2 \text{A}^2}$

2.1.4 Optik

Größe	Formelzeichen	Name der Einheit	SI-Einheit	Bemerkung
Lichtstärke	I_v	Candela ¹⁾	cd	Basisgröße
Beleuchtungsstärke	E_v	Lux	lx	
Lichtstrom	Φ_v	Lumen	lm	1 lm = 1 cd sr (sr Steradian)
Lichtmenge	Q_v	Lumen · Sekunde	lm · s	
Lichtausbeute	η	$\frac{\text{Lumen}}{\text{Watt}}$	$\frac{\text{lm}}{\text{W}}$	
Leuchtdichte	L_v	$\frac{\text{Candela}}{\text{Quadratmeter}}$	$\frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$	

1)	Farbtemperatur	HK/cd	cd/HK
Umrechnungsfaktoren von	2043 K (Platinpunkt)	0,903	1,107
Candela in Hefnerkerzen (HK)	2360 K (Wolfram-Vakuum-Lampe)	0,877	1,140
und umgekehrt	2750 K (gasgefüllte Wolframlampe)	0,861	1,162

2.2 Allgemeine und atomare Konstanten

Bezeichnung	Beziehung
Avogadro-Konstante	$N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	$k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
elektrische Elementarladung	$e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
Faraday-Konstante	$F = 96485,309 \text{ C/mol}$
Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum	$c_0 = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1,2566370614 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$
molares Normvolumen idealer Gase	$V_{mn} = 2,24208 \cdot 10^4 \text{ cm}^3/\text{mol}$
Planck-Konstante	$h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Ruhemasse des Elektrons	$m_e = 9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Ruhemasse des Protons	$m_p = 1,672622 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5,67051 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
(universelle) Gaskonstante	$R = 8,314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
Gravitationskonstante	$G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Physik

Umrechnungstafel für Leistungseinheiten

2.3 Umrechnungstafel für metrische Längeneinheiten

Einheit	Pico- meter pm	Ång- ström ¹⁾ Å	Nano- meter nm	Mikro- meter µm	Milli- meter mm	Zenti- meter cm	Dezi- meter dm	Meter m	Kilo- meter km
1 pm =	1	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁹	10 ⁻¹⁰	10 ⁻¹¹	10 ⁻¹²	10 ⁻¹⁵
1 Å ¹⁾ =	10 ²	1	10 ⁻¹	10 ⁻⁴	10 ⁻⁷	10 ⁻⁸	10 ⁻⁹	10 ⁻¹⁰	10 ⁻¹³
1 nm =	10 ³	10	1	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁷	10 ⁻⁸	10 ⁻⁹	10 ⁻¹²
1 µm =	10 ⁶	10 ⁴	10 ³	1	10 ⁻³	10 ⁻¹	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	10 ⁻⁹
1 mm =	10 ⁹	10 ⁷	10 ⁶	10 ³	1	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁶
1 cm =	10 ¹⁰	10 ⁸	10 ⁷	10 ⁴	10	1	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻⁵
1 dm =	10 ¹¹	10 ⁹	10 ⁸	10 ⁵	10 ²	10	1	10 ⁻¹	10 ⁻⁴
1 m =	10 ¹²	10 ¹⁰	10 ⁹	10 ⁶	10 ³	10 ²	10	1	10 ⁻³
1 km =	10 ¹⁵	10 ¹³	10 ¹²	10 ⁹	10 ⁶	10 ⁵	10 ⁴	10 ³	1

¹⁾ Das Ångström ist nicht als Teil des Meters definiert, gehört also nicht zum metrischen System. Es ist benannt nach dem schwedischen Physiker A. J. Ångström (1814–1874).

Beachte: Der negative Exponent gibt die Anzahl der Nullen (vor der 1) *einschließlich* der Null vor dem Komma an, z. B. 10⁻⁴ = 0,0001; 10⁻¹ = 0,1; 10⁻⁶ = 0,000001. Der positive Exponent gibt die Anzahl der Nullen (nach der 1) an, z. B. 10⁴ = 10000; 10¹ = 10; 10⁶ = 1000000.

2.4 Vorsatzzeichen zur Bildung von dezimalen Vielfachen und Teilen von Grundeinheiten oder hergeleiteten Einheiten mit selbständigem Namen

Vorsatz	Kurzzeichen	Bedeutung
Tera	T	1000000000000 (= 10 ¹²) Einheiten
Giga	G	1000000000 (= 10 ⁹) Einheiten
Mega	M	1000000 (= 10 ⁶) Einheiten
Kilo	k	1000 (= 10 ³) Einheiten
Hekto	h	100 (= 10 ²) Einheiten
Deka	da	10 (= 10 ¹) Einheiten
Dezi	d	0,1 (= 10 ⁻¹) Einheiten
Zenti	c	0,01 (= 10 ⁻²) Einheiten
Milli	m	0,001 (= 10 ⁻³) Einheiten
Mikro	µ	0,000001 (= 10 ⁻⁶) Einheiten
Nano	n	0,000000001 (= 10 ⁻⁹) Einheiten
Pico	p	0,000000000001 (= 10 ⁻¹²) Einheiten

2.5 Umrechnungstafel für Leistungseinheiten

Einheit	Nm/s = W	kpm/s	PS	kW	kcal/s
1 Nm/s = 1 W =	1	0,101972	1,35962 · 10 ⁻³	0,001	2,38846 · 10 ⁻⁴
1 kpm/s =	9,80665	1	0,0133333	9,80665 · 10 ⁻³	2,34228 · 10 ⁻³
1 PS =	735,499	75	1	0,735499	0,175671
1 kW =	1000	101,972	1,35962	1	0,238846
1 kcal/s =	4186,80	426,935	5,69246	4,18680	1

2.6 Schallgeschwindigkeit c , Dichte ρ und Elastizitätsmodul E einiger fester Stoffe

Stoff	c in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	ρ in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	E in $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
Aluminium in Stabform	5080	2700	$7,1 \cdot 10^{10}$
Blei	1170	11400	$1,6 \cdot 10^{10}$
Stahl in Stabform	5120	7850	$21 \cdot 10^{10}$
Kupfer	3700	8900	$12,5 \cdot 10^{10}$
Messing	3500	8100	$10 \cdot 10^{10}$
Nickel	4780	8800	$20 \cdot 10^{10}$
Zink	3800	7100	$10,5 \cdot 10^{10}$
Zinn	2720	7300	$5,5 \cdot 10^{10}$
Quarzglas	5360	2600	$7,6 \cdot 10^{10}$
Plexiglas	2090	1200	$0,5 \cdot 10^{10}$

2.7 Schallgeschwindigkeit c und Dichte ρ einiger Flüssigkeiten

Flüssigkeit	t in $^{\circ}\text{C}$	c in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	ρ in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Benzol	20	1330	878
Petroleum	34	1300	825
Quecksilber	20	1450	13595
Transformatoröl	32,5	1425	895
Wasser	20	1485	997

2.8 Schallgeschwindigkeit c , Verhältnis $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ einiger Gase bei $t = 0^{\circ}\text{C}$

Gas	c in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	κ
Helium	965	1,66
Kohlenoxid	338	1,4
Leuchtgas	453	–
Luft	331 (344 bei 20°C)	1,402
Sauerstoff	316	1,396
Wasserstoff	1284 (1306 bei 20°C)	1,408

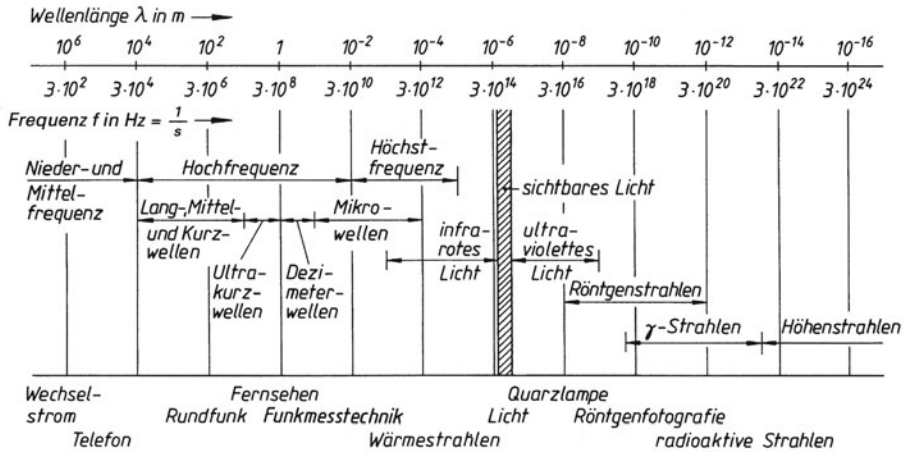
2.9 Schalldämmung von Trennwänden

Baustoff	Dicke s in cm	Masse m' in kg/m^2	mittlere Dämmzahl D in dB
Dachpappe	–	1	13
Sperrholz, lackiert	0,5	2	19
Dickglas	0,6 ... 0,7	16	29
Heraklithwand, verputzt	–	50	38,5
Vollziegelwand, $\frac{1}{4}$ Stein verputzt	9	153	41,5
bei $\frac{1}{2}$ Stein	15	228	44
bei $\frac{1}{1}$ Stein	27	457	49,5

Physik

Brechzahlen n für den Übergang des Lichtes aus dem Vakuum in optische Mittel

2.10 Elektromagnetisches Spektrum



2.11 Brechzahlen n für den Übergang des Lichtes aus dem Vakuum in optische Mittel ¹⁾ (durchsichtige Stoffe)

Luft	1,000 293 \approx 1	Kalkspat (ao Strahl)	1,49
Wasser	1,33	Kalkspat (o Strahl)	1,66
Acrylglas (Plexiglas)	1,49	Steinsalz	1,54
Kronglas ²⁾	1,48 ... 1,57	Saphir	1,76
Flintglas ²⁾	1,56 ... 1,9	Diamant	2,4
Kanadabalsam	1,54	Schwefelkohlenstoff	1,63

¹⁾ Das optisch dichtere (dünnere) Mittel ist das mit der größeren (kleineren) Brechzahl.

²⁾ Kronglas ist Glas mit geringer, Flintglas mit hoher Farberstreuung (Dispersion).

3.1 Atombau und Periodensystem

Elementarteilchen (beständige)

Name	Symbol	Masse in g	Relative Masse als Vielfaches der atomaren Masseneinheit u	Ladung in As
Proton	p	$1,673 \cdot 10^{-24}$	1,00728	$+1,6 \cdot 10^{-19}$
Neutron	n	$1,675 \cdot 10^{-24}$	1,00867	0
Elektron	e^-	$9,109 \cdot 10^{-28}$	0,00054	$-1,6 \cdot 10^{-19}$

Atomkern

Kugelähnliches Gebilde aus Nukleonen, das sind schwere Elementarteilchen (Protonen und Neutronen).
Das Verhältnis von Protonen und Neutronen in einem Kern ist nicht konstant. Kerndurchmesser etwa 10^{-14} m.

Ordnungszahl

gibt die Stellung des Elementes im Periodischen System an:
Ordnungszahl = Protonenzahl = Elektronenzahl.

Massenzahl

gibt die Anzahl der schweren Kernteilchen, d. h. der Protonen und Neutronen an.

relative Atommasse A_r (Atomgewicht)

Verhältniszahl, Vielfaches der atomaren Masseneinheit u .

atomare Masseneinheit u

ist der 12te Teil der Masse eines Atoms des Nuklids ^{12}C (Kohlenstoffisotop mit der Massenzahl 12). $u = 1,66 \cdot 10^{-24}$ g.

Isotope

Atomarten (Nuklide) gleicher Protonenzahl = Kernladungszahl, aber unterschiedlicher Neutronenzahl, damit auch verschiedener Massenzahl.

Reinelemente

Chemische Elemente, die nur aus einem Nuklid bestehen, es sind etwa 22.

Mischelemente

Chemische Elemente, die aus verschiedenen Nukliden bestehen (Mischungen aus zwei oder mehr Nukliden).
Chlor besteht zu 75,53 % aus $^{35}_{17}\text{Cl}$ und 24,47 % aus $^{37}_{17}\text{Cl}$. Daraus errechnet sich die relative Atommasse zu 35,45.

Chemie

Atombau und Periodensystem

Haupt		Periodensystem der Elemente															
I a	II a																
1 1.00797 H 1,008 Wasserstoff																	
2 6.939 Li 6,941 Lithium	2 9,0122 Be 9,012 Beryllium																
2 22.990 Na 22,99 Natrium	2 24.312 Mg 24,31 Magnesium																
2 39.102 K 39,10 Kalium	2 40.08 Ca 40,08 Calcium																
2 85.47 Rb 85,47 Rubidium	2 87.62 Sr 87,62 Strontium																
2 132.90 Cs 132,9 Cäsium	2 137.34 Ba 137,3 Barium																
2 190.23 Au 190,2 Gold	2 200.59 Hg 200,6 Quecksilber																
2 223.02 Fr 223,0 Francium	2 226.02 Ra 226,0 Radium																
2 261.10 Nh 261,1 Nihonium	2 262.10 Fl 262,1 Flerovium																
2 288.10 Og 288,1 Oganesson																	
		Lanthanide und Actinide															
		2 140.12 Ce 140,1 Cer	2 140.91 Pr 140,9 Praseodym	2 144.24 Nd 144,2 Neodym	2 150.35 Sm 150,3 Samarium	2 151.96 Eu 151,9 Europium	2 157.25 Gd 157,2 Gadolinium	2 158.92 Tb 158,9 Terbium	2 162.50 Dy 162,5 Dysprosium	2 164.93 Ho 164,9 Holmium	2 167.26 Er 167,2 Erbium	2 168.93 Tm 168,9 Thulium	2 173.04 Yb 173,0 Ytterbium	2 174.97 Lu 174,9 Lutetium			
		2 232.04 Th 232,0 Thorium	2 231.04 Pa 231,0 Protactinium	2 238.03 U 238,0 Uran	2 237.04 Np 237,0 Neptunium	2 239.04 Pu 239,0 Plutonium	2 244.06 Am 244,0 Americium	2 247.07 Cm 247,0 Curium	2 247.07 Bk 247,0 Berkelium	2 251.08 Cf 251,0 Californium	2 252.08 Es 252,0 Einsteinium	2 257.10 Fm 257,0 Fermium	2 261.10 Md 261,0 Mendelevium	2 265.10 No 265,0 Nobelium	2 269.10 Lw 269,0 Lawrencium		
		s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s		
		p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p		
		d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d		
		f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f		

Chemie

Atombau und Periodensystem

Periode	Waagerechte Zeile im Periodischen System der Elemente. Die Periodennummer entspricht der Anzahl der besetzten Elektronenschalen. <i>Beispiel:</i> Die 18 Elemente der Periode 4 haben eine angefangene Außenschale 4, die beim letzten Element dieser Periode, dem Krypton ${}_{36}\text{Kr}$ mit 8 Elektronen besetzt ist.
Gruppe	Senkrechte Spalte im Periodensystem. Die Gruppennummer entspricht der Anzahl der energiereichsten Elektronen (Valenzelektronen).
Elektronenhülle	Aufenthaltsbereich der Elektronen. Sie geben im Grundzustand des Atoms keine Energie ab. Beschreibung des Energiezustandes eines Elektrons durch die Quantenzahlen.
Orbital	Unterteilung der Elektronenhülle in Ladungswolken. Jeder Orbital kann höchstens 2 Elektronen aufnehmen, die sich durch einen antiparallelen Spin unterscheiden.
Hauptquantenzahl n	kennzeichnet den <i>Abstand des Orbitals</i> vom Kern. Sie hat die Beträge 1... 7 vom Kern nach außen gezählt.
Nebenquantenzahl l	kennzeichnet die <i>Form des Orbitals</i> mit den Buchstaben s , p , d und f . l liegt zwischen 0 und $(n - 1)$.
Magnetquantenzahl m	kennzeichnet die <i>Lage des Orbitals</i> im Raum. m ist ganzzahlig und liegt zwischen $-l$ und $+l$ einschließlich der Null.
Spinquantenzahl s	kennzeichnet die <i>Richtung des Spins</i> , vorstellbar als Eigendrehung des Elektrons. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten: Parallel und antiparallel. s hat die Beträge $+1/2$ oder $-1/2$.
Pauli-Prinzip	In der Elektronenhülle eines Atoms treten niemals zwei Elektronen des gleichen Energiezustandes auf, d. h. sie stimmen niemals in allen vier Quantenzahlen überein.
Hund'sche Regel	In der Elektronenhülle eines Atoms besitzen die Elektronen von den möglichen Zuständen die jeweils energieärmsten. Orbitale mit gleicher Haupt- und Nebenquantenzahl werden deshalb zunächst einfach besetzt. Erst nach der Einfachbesetzung aller dieser Orbitale werden sie durch ein zweites Elektron mit antiparallelem Spin aufgefüllt.

Besetzung der Hauptniveaus mit Elektronen

Hauptquantenzahl	1	2	3	4	5	6	7	Striche in dieser Zeile geben an, dass bei natürlichen und künstlichen Atomen im Grundzustand diese Energieniveaus noch nicht beobachtet wurden.
Bezeichnung des Hauptniveaus	K	L	M	N	O	P	Q	
Anzahl der möglichen Nebenniveaus	1	2	3	4	5	6	7	
Bezeichnung dieser Niveaus	1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d —	7s — — —	
Max. Elektronenbesetzung des Haupt- Niveaus $Z_{\max} = 2n^2$	2	8	18	32	(50)	—	—	

Maximale Besetzung der Nebenniveaus

Nebenquantenzahl	0	1	2	3	Beispiel für die Beschreibung der Elektronenkonfiguration, Element Nr. 15 P, Phosphor mit insgesamt 15 Elektronen: $1s^2; 2s^2; 2p^6; 3s^2; 3p^3$
Bezeichnung des Nebenniveaus	s	p	d	f	
Max. Anzahl der Orbitale	1	3	5	7	
Max. Anzahl der Elektronen	2	6	10	14	

Symbolische Darstellung für **P, Phosphor** 15 +

↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	↑	↑
1s	2s	2p			3s	3p			

Einfach besetzt

3.2 Metalle

Element	Symbol	Ordnungszahl	Rel. Atommasse	Häufigste Isotope	Oxidations-Zahlen ¹⁾ ↓	Dichte ρ g/cm ³ ³⁾	Schmelz-Pkt. °C
Alkalimetalle ¹⁾ häufigste h'fett gedruckt							
Lithium	Li	3	6,94	7	1	0,53	180
Natrium	Na	11	22,99	23	1	0,97	98
Kalium	K	19	39,1	39	1	0,86	64
Rubidium	Rb	37	85,48	85	1	1,53	39
Cäsium	Cs	55	132,91	133	1	1,90	28
Erdalkalimetalle							
Beryllium	Be	4	9,01	9	2	1,85	1280
Magnesium	Mg	12	24,32	24	2	1,74	650
Calcium	Ca	20	40,08	40	2	1,55	840
Strontium	Sr	38	87,63	88	2	2,63	770
Barium	Ba	56	137,36	138	2	3,65	725
Erdmetalle							
Aluminium	Al	13	26,98	27	3	2,70	660
Scandium	Sc	21	44,96	45	3	2,99	1540
Yttrium	Y	39	88,91	89	3	4,47	1520
Lanthan	La	57	138,92	139	3	6,16	920
Seltene Erden (Lanthanoiden)							
Cer	Ce	58	140,13	140	4,3	6,77	798
Praseodym	Pr	59	140,92	141	4,3	6,43	931
Neodym	Nd	60	144,27	142	3	7,00	1010
Promethium	Pm	61	147	145	3	7,229	1080
Samarium	Sm	62	150,35	152	3,2	7,54	1072
Europium	Eu	63	152	153	3,2	5,25	822
Gadolinium	Gd	64	157,26	158	3	7,90	1312
Terbium	Tb	65	158,93	159	4,3	8,25	1360
Dysprosium	Dy	66	162,51	164	3	8,56	1409
Holmium	Ho	67	164,94	165	3	8,78	1470
Erbium	Er	68	167,27	166	3	9,05	1522
Thulium	Tm	69	168,94	169	3,2	9,32	1545
Ytterbium	Yb	70	173,04	174	3,2	6,97	824
Lutetium	Lu	71	174,99	175	3	9,84	1656

Chemie

Metalle

Element	Sym- bol	OZ	KG	Gitter- konstante ¹⁾ a pm	Radien pm ²⁾ Atom / Ion	Dichte ρ ³⁾ kg/dm ³	Schmelz- punkt T_m °C ⁶⁾	Leitfähigkeit für Strom ⁴⁾ Wärme m/mm ² Ω W/mK	Wärme- ausdeh- nung α ⁵⁾	E- Modul GPa	
Leichtmetalle (nach Dichte geordnet)											
Magnesium	Mg	12	hdP	320/1,62	160/78 (2)	1,74	650	22,4	156	25,8	44
Beryllium	Be	4	hdP	229/1,57	113/34 (2)	1,85	1280	23,8	204	11	293
Aluminium	Al	13	kfz.	404	143/57 (3)	2,7	(660,323)	37,7	236	23,9	72
Titan	Siehe unter „höchstschmelzende Metalle“					4,51					
Niedrigschmelzende Schwermetalle											
Gallium	Ga	31	rhomb.	452	122/62 (3)	5,90	30	7,3	—	—	—
Indium	In	49	tetr.	325/1,52	163/92 (3)	7,30	156	12,2	82	33	—
Zinn α -Sn >13°C β -Sn	Sn	50	diam tetr.	<13°C	141/74 (4)	7,28	(231,982)	9,9	66	26,7	55
Wismut	Bi	83	hex	455/2,61	155/96 (3)	9,80	271	0,93	8	13,4	34
Cadmium	Cd	48	hdP	298/1,88	149/114 (2)	8,64	321	14	95	29,7	63
Blei	Pb	82	kfz.	495	175/132 (2)	11,35	327	5,2	35	29,2	16
Zink	Zn	30	hdP	266/1,86	133/83 (2)	7,13	(429,527)	18	112	21,1	9
Antimon	Sb	51	hex	431/2,61	145/89 (3)	6,69	630	3	24	10,9	56
Hochschmelzende Metalle											
Germanium	Ge	32	kfz	566	123/53 (4)	5,32	936	2,21 10^{-2}	63	—	—
Kupfer	Cu	29	kfz	361	128/72 (2)	8,93	(1084,62)	64	398	16,5	125
Mangan	Mn	25	kub	376	112/91 (2)	7,44	1245	n.b.	7,8	22,8	201
Nickel	Ni	28	kfz	352	124/78 (2)	8,91	1450	16,3	85	13,0	215
Cobalt α -Co >417°C β -Co	Co	27	hdP kfz	250/1,62 355	153/82 (2)	8,89	1490	13,8	101	18,1	213
Eisen α -Fe >912°C γ -Fe	Fe	26	krz kfz	287 365	124/67 (3) 127	7,85	1535	12	75	11,9	215
Höchstschmelzende Metalle											
Titan α -Ti >882°C β -Ti	Ti	22	hdP krz	295/1,59 332	148/61 (4)	4,51	1668	2,3	22	9,0	105
Zirkon α -Zr >852°C β -Zr	Zr	40	tetr. krz	323/1,59 361	162/87 (4)	6,53	1855	2,5	22,7	6,3	90
Vanadium	V	23	krz	302	131/59 (5)	5,96	1900	5	30,7	n.b.	150
Chrom	Cr	24	krz	288 *	150/64 (3)	7,19	1860	6,6	94	8,4	190
Niob	Nb	41	krz	329	142/69 (5)	8,58	2470	—	54	7,4	160
Molybdän	Mo	42	krz	315	136/62 (6)	10,22	2620	20	135	5,2	330
Tantal	Ta	73	krz	330	143/64 (5)	16,68	3000	8	56	6,5	188
Wolfram	W	74	krz	317	137/62 (6)	19,26	3400	20	173	4,5	400
Edelmetalle											
Quecksilber	Hg	80	—		160/112 (2)	13,55	(-38,83)	1	—	9,5	—
Silber	Ag	47	kfz	409	145/113 (1)	10,5	(961,78)	66	428	19,7	81
Gold	Au	79	kfz	408	144/137 (1)	19,32	(1064,18)	49	318	14,2	79
Palladium	Pd	46	kfz	n.b.	138/86 (2)	12,02	1550	10,2	72	11,8	—
Platin	Pt	78	kfz	392	139/85 (2)	21,45	1770	10	72	9,1	173
Rhodium	Rh	45	kfz	379	134/75 (3)	12,41	1970	23	150	8	280
Hafnium	Hf	72	hdP	n.b.	156/84 (4)	13,31	2230	3,8	—	—	—
Ruthenium	Ru	44	hdP	n.b.	134/77 (3)	12,40	2310	15	117	10	—
Iridium	Ir	77	kfz	384	136/66 (4)	22,65	2450	21	147	6,5	530
Osmium	Os	76	hdP	273/1,58	135/67 (4)	22,61	3040	11	88	7	570
Rhenium	Re	75	kfz	380	137/72 (4)	21,03	3180	—	—	—	—

1) Bei hexagonalen (tetr.) Metallen ist das Verhältnis der senkrechten Konstante c/a angegeben;

2) In Klammern die zugehörige, häufigste Oxidationszahl der Ionen;

3) bei 20 °C;

4) bei 0 °C = 273 K;

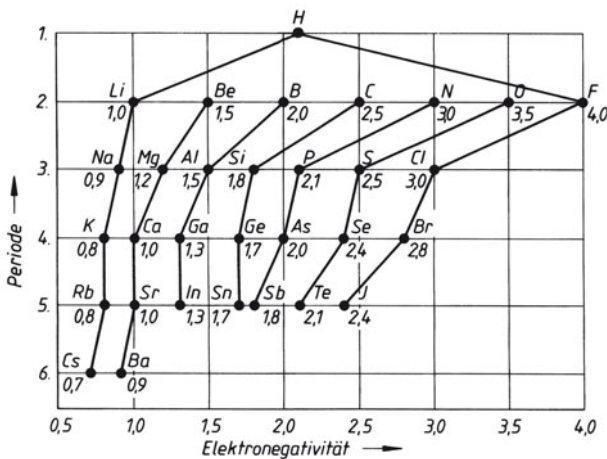
5) Bereich 0...100 °C, Werte mit 10^{-6} multiplizieren!;

6) Klammerwerte nach der IST-90 (Internationale Temperatur Skala)

3.3 Nichtmetalle

Element	Symbol	Ordnungszahl	Rel. Atommasse	Bekannte Isotope	Häufigste Isotope	Dichte ρ bei 20 °C Gasein g/l	Oxidationszahlen (wichtigste h' fett)
Edelgase							
Helium	He	2	4,00	2	4	1,17	0-wertig
Neon	Ne	10	20,18	3	20	0,84	
Argon	Ar	18	39,95	3	40	1,66	
Krypton	Kr	36	83,80	6	84	3,48	
Xenon	Xe	54	131,30	9	132	4,49	
Radon	Rn	86	222	3	—	9,23	
Halogene							
Fluor	F	9	19	1	19	1,58	$\left. \begin{matrix} 1, -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} 7, 5, 3, 1, -1$
Chlor	Cl	17	35,45	2	35	2,95	
Brom	Br	35	79,90	2	79	3,14 g/cm ³	
Jod	J	53	126,90	1	127	4,44 g/cm ³	
Astat	At	85	210	—	—	—	
Gase							
Wasserstoff	H	1	1,008	3	1	0,084	1, -1
Stickstoff	N	7	14,007	2	14	1,17	5, 4, 3, 2, -3
Sauerstoff	O	8	16,00	1	16	1,33	-2, -1
Feste Nichtmetalle Dichte in g/cm³							
Arsen	As	33	74,92	1	75	5,72	5, 3, -3
Bor	B	5	10,81	2	11	2,3	3
Kohlenstoff	C	6	12,01	2	12	3,51	4, 2, -4
Phosphor	P	15	30,97	1	31	2,20 (rot)	5, 3, -3
Schwefel	S	16	32,06	4	32	2,06	6, 4, 2, -2
Selen	Se	34	78,96	6	80	4,81	6, 4, -2
Silicium	Si	14	28,09	3	28	2,33	4, 2, -4
Tellur	Te	52	127,60	8	130	6,24	6, 4, 2, -2

3.4 Elektronegativität



Elektronegativitätsskala (Pauling)

Nichtmetalle sind elektronegative Elemente. Sie ziehen Elektronen an und bilden dann negativ geladene Ionen (Anionen).

Der Grad der Anziehung, die so genannte Elektronegativität, wird nach einer Skala mit empirischen Zahlen bewertet. Danach ist Fluor das Element mit der stärksten Anziehung für Elektronen, während das Cäsium das elektropositivste Metall ist.

Chemie

Chemische Bindungen, Wertigkeitsbegriffe

3.5 Chemische Bindungen, Wertigkeitsbegriffe

	Metallbindung	Ionenbindung heteropolare, elektrovalente Bindung	Atombindung homöopolare, kovalente Bindung	
Bindungspartner	Metallatome	Metallatome + Nichtmetallatome	Nichtmetallatome	
Elektronegativität der Partner	elektropositive Elemente	Elemente mit unter- schiedlicher Elektronega- tivität	Elemente mit gleicher oder gering unterschiedlicher Elektronegativität	
Änderung in der Elektronenhülle	Abgabe der Va- lenzelektronen, nicht lokalisierte Elektronen → „Elektronengas“	Übergang der Valenz- elektronen zum Anion, lokalisierte Elekt- ronen → Ionenbildung	Elektronenpaarbildung durch Überlappung einfach besetzter Orbitale, lokalisierte Elektronen → Mole- külbildung	
Richtung der Bin- dung	Bindungskräfte allseitig	Bindungskräfte allseitig	Bindungskräfte gerichtet	
Struktur und Art der Teilchen	Metallgitter aus gleichen Gitter- bausteinen von platzwechselnden Elektronen zu- sammgehalten	Ionengitter aus Kationen und Anionen mit starken elektrostatischen Kräften zusammgehalten	Moleküle bestimmter räumlicher Gestalt bilden Molekülgitter mit schwachen zwischen- molekularen Kräften	Sonderfall, Gruppe IV (PSE) Atomgitter mit Elektronen- paarbindung nach 4 Rich- tungen → Diamantgitter
Eigenschaften der entstehenden Stoffe	elektrische Leiter I. Klasse, plasti- sche Verformbar- keit in kaltem Zu- stand	elektrische Leiter II. Klasse (Ionenleiter), keine plastische Ver- formbarkeit in kaltem Zustand, hohe Schmelz- und Siedepunkte	Nichtleiter, niedrige Schmelz- und Siede- punkte, z.T. Gase	Halbleiter (evtl. durch Er- wärmung), hohe Härte und Schmelzpunkte, keine plas- tische Verformbarkeit im kalten Zustand
Beispiele	Metalle und Legie- rungen	Metalloxide, -hydroxide, Salze	Elementare Gase (au- ßer Edelgase), Koh- lenstoffverbindungen	Diamant, Quarz SiO_2 , Siliciumcarbid SiC , Borcarbid B_4C

Polarisierte Atombindung

Atombindung zwischen Nichtmetallen mit unterschiedlicher Elektronegativität. Das bindende Elektro-
nenpaar verlagert sich zum negativeren Partner.

Beispiel: $\text{H} = 2,1$; $\text{Cl} = 3,0$; Chlorwasserstoff HCl



Folge: $+ \text{H} - \text{Cl} -$

Ladung $\delta \approx 0,2 \cdot e^-$

Dipol

Die polarisierte Atombindung ist als fließender Übergang zwischen den reinen Formen der Atombin-
dung (Nichtmetallatome gleicher Elektronegativität) und der Ionenbindung (Metall- mit Nichtmetallatom)
zu betrachten.

Dipol

Molekül mit polarisierter Atombindung, bei dem die Schwerpunkte der Ladung beider Teilchen nicht zusammenfallen, so dass das Molekül ein positives und negatives Ende besitzt.

Wichtige Dipole: Wasser H_2O , Ammoniak NH_3 (flüssig)
Fluorwasserstoff HF (flüssig).

Dipole haben hohe Dielektrizitätskonstante und sind dadurch Lösungsmittel für Ionenverbindungen.

Die beiden Enden eines Dipolmoleküls wirken auf Ionen anziehend bzw. abstoßend. Dadurch umgeben sich Ionen mit einer Hülle von Dipolen, welche die elektrostatische Anziehung der Ionen verringern. Dadurch entstehen die freibeweglichen Ionen in z. B. Lösungen des Wassers → elektrolytische Dissoziation, 3.15.

stöchiometrische Wertigkeit

Ganzzahlige Angabe über das Verhältnis, mit dem Atome oder -gruppen das Wasserstoffatom binden oder ersetzen können. Neben dem einwertigen Wasserstoff H kann auch der zweiwertige Sauerstoff O als Bezugsgröße dienen.

Ionenwertigkeit Ladungszahl

Ganzzahlige Angabe mit Vorzeichen; kennzeichnet die Anzahl der aufgenommenen Elektronen (Minus-Zeichen) oder der abgegebenen Elektronen (Pluszeichen).

Der Betrag der Ionenwertigkeit stimmt mit der stöchiometrischen Wertigkeit überein.

Beispiel: Schwefelsäure H_2SO_4 : der Säurerest $(\text{SO}_4)^{2-}$ hat die Ladungszahl -2 und die stöchiometrische Wertigkeit 2 .

Bindigkeit, Bindungswertigkeit

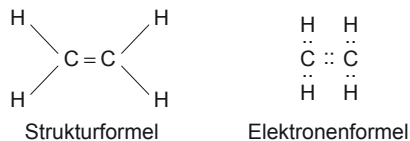
Ganzzahlige Angabe; kennzeichnet die Anzahl der Elektronen, die das Atom mit seinen Partnern gemeinsam besitzt. Bindigkeit und Wertigkeit stimmen nicht immer überein!

Beispiel C-Atome:

Methan CH_4 : Wertigkeit 4 Bindigkeit 4

Äthen C_2H_4 : Wertigkeit 2 Bindigkeit 4

Bindigkeit mit Hilfe der Elektronenformeln oder Strukturformeln erklärbar.

**Oxydationszahl**

Rechengröße zur Erfassung von Redoxreaktionen. Die Oxydationszahl ist die gedachte Ladung eines Elementes in einer chemischen Verbindung unter der Annahme, sie würde aus Ionen bestehen (auch wenn es eine Atombindung ist).

Dabei sind folgende Regeln der Reihe nach anzuwenden:

1. Alle Metalle sowie Bor und Silicium erhalten positive Oxydationszahlen.
2. Fluor, als elektronegativstes Element erhält -1 .
3. Wasserstoff erhält $+1$ und Sauerstoff -2 , soweit nicht bereits durch Anwendung von Regel 1 und 2 andere Zahlen festliegen.

Chemie

Chemische Bindungen, Wertigkeitsbegriffe

Mit Hilfe der Oxydationszahlen können Reaktionsgleichungen nachgeprüft werden unter Beachtung folgender Grundsätze: Alle Elemente, auch die elementaren Gase, haben die Oxydationszahl Null.

Bei einer chemischen Verbindung ist die Summe aller Oxydationszahlen gleich null.

Beispiel: Oxydationszahlen des Schwefels

$\overset{+1}{\text{H}_2\text{S}}$ für Schwefelwasserstoff ergibt sich -2

$\overset{-2}{\text{SO}_2}$ für Schwefeldioxid ergibt sich $+4$

$\overset{-2}{\text{SO}_3}$ für Schwefeltrioxid ergibt sich $+6$

Bei einem Ion ist die Summe der Oxydationszahlen gleich der Ionenwertigkeit (Ladungszahl).

Beispiel: Oxydationszahl des Stickstoffs im Nitrat-Ion, Ladung -1 .

$\left[\overset{-2}{\text{NO}_3}\right]^{-1}$ für Stickstoff ergibt sich $+5$.

Bei einer Reaktionsgleichung muss die Summe der Oxydationszahlen auf beiden Seiten gleich groß sein. Dabei können die Oxydationszahlen von Elementen, die sich nicht ändern, fortgelassen werden. Es müssen jedoch die Koeffizienten und Multiplikatoren berücksichtigt werden.

Beispiel: Aluminothermische Reduktion von Silicium

$\overset{+4}{\text{SiO}_2} + \overset{0}{\text{Al}} \rightarrow \overset{+3}{\text{Al}_2\text{O}_3} + \overset{0}{\text{Si}}$ Vergleich der 0-Zahlen links und rechts lässt auf fehlende Koeffizienten schließen.

(Faktor 3) (Faktor 2)
 $3 \text{SiO}_2 + \text{Al} \rightarrow 2 \text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Si}$ Probe auf Gleichheit der Massen ergibt restliche Koeffizienten.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{4 \text{ Al}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{3 \text{ Si}}$
 $3 \text{SiO}_2 + 4 \text{Al} \rightarrow 2 \text{Al}_2\text{O}_3 + 3 \text{Si}$ Reaktionsgleichung

Koordinationszahl

Angabe über die Zahl der unmittelbaren Nachbarpartikel in Raumgittern und Komplex-Ionen. Sie lässt einen Schluss auf die Struktur und den Modellkörper zu, den das Teilchen mit diesen Nachbarn bildet.

Koordinationszahl	Modellkörper	Raumgitterstruktur, Beispiel
4	Tetraeder	Diamantgitter
6	Oktaeder	kubisch-einfach, Kochsalzgitter
8	Würfel	kubisch-raumzentriert, α -Eisen
12	Würfel	kubisch-flächenzentriert, γ -Eisen, Blei
12	hexagonales Prisma	hexagonal-dichteste Packung, Zink, Magnesium

Bei Komplex-Ionen gibt die Koordinationszahl an, wie viele Liganden (Ionen oder Moleküle) um das so genannte Zentralion angeordnet sind. Es sind alle Zahlen von 2...8 möglich, häufig sind die geraden Koordinationszahlen.

Beispiel: Natriumhexafluoraluminat, $\text{Na}_3(\text{AlF}_6)$. Als Kryolith für die Al-Schmelzflusselektrolyse ein wichtiges Flussmittel.

$3\text{Na}^+ + (\text{AlF}_6)^{3-}$ Im Anion ist das Al von 6 Fluorionen umgeben. Aus den Oxydationszahlen errechnet sich die dreifach negative Ladung des Ions.

Komplex-Ionen haben einen räumlichen Bau, der durch die in der Tafel angegebenen Modellkörper beschrieben wird.

3.6 Systematische Benennung anorganischer Verbindungen

allgemeine Regeln

Grundsätzlich wird der Name des elektropositiveren Elementes (Metall) an erster Stelle (meist unverändert) genannt. Daran wird der Name des elektronegativeren Elementes (oder Gruppe) mit einer *Endung* angehängt.

Bei Verbindungen aus zwei Elementen heißt die Endung – id.

Die Reihenfolge der Benennung wird durch die Elektronegativitätsskala nach *Pauling* geregelt.

K	Na	Ba	Li	Ca	Mg	Al	Zn	Si	H	P	C	S	N	Cl	O	F
0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	1,7	1,8	2,1	2,1	2,5	2,5	3,0	3,0	3,5	4,0		
←elektropositiver										elektronegativer→						

Verbindungen von	Name	Verbindungen von	Name
Wasserstoff	-hydrid	Sauerstoff	-oxid
Fluor	-fluorid	Schwefel	-sulfid
Chlor	-chlorid	Stickstoff	-nitrid
Brom	-bromid	Kohlenstoff	-carbid
Jod	-jodid	Phosphor	-phosphid

Metallverbindungen

Wenn mehrere Verbindungen des Metalls mit einem Element (oder Gruppe) existieren, wird zur eindeutigen Kennzeichnung die Oxydationsstufe des Metalles zwischen die beiden Teile gesetzt:

Beispiele:

FeO Eisen(II)-oxid Fe₂O₃ Eisen(III)-oxid
 Fe₃O₄ Eisen(II,III)-oxid, dagegen nur
 Al₂O₃ Aluminiumoxid (kein weiteres Oxid bekannt)

Verbindungen von zwei Nichtmetallen

1	mon(o)
2	di
3	tri
4	tetr(a)
5	pent(a)
6	hex(a)
7	hept(a)

Wenn mehrere Verbindungen zwischen beiden Elementen existieren, wird zur eindeutigen Kennzeichnung zu einem oder auch zu beiden Teilen ein griechisches Zahlwort hinzugefügt.

Grundsatz: Nur so viel Zahlworte, als zur zweifelsfreien Bezeichnung erforderlich! Für das elektropositivere Element entfällt das Zahlwort „mono“.

Beispiele:

CO Kohlenmonoxid CO₂ Kohlendioxid
 SO₂ Schwefeldioxid SO₃ Schwefeltrioxid
 N₂O Distickstoffoxid
 N₂O₄ Distickstofftetroxid

Hydroxide

Namen werden aus dem Metall (evtl. unter Angabe der Oxydationsstufe) und der Hydroxidgruppe (OH) gebildet. Die Zahl der OH-Gruppen wird nicht angegeben.

Beispiele:

Fe(OH)₂ Eisen(II)-hydroxid
 Fe(OH)₃ Eisen(III)-hydroxid, dagegen:
 Al(OH)₃ Aluminiumhydroxid (kein weiteres bekannt)

Säuren

Keine systematische Benennung. Es werden Trivialnamen (gewerbliche Bezeichnungen) verwendet.

Chemie

Systematische Benennung organischer Verbindungen

Salze

Salznamen werden aus dem Metall (evtl. unter Angabe der Oxydationsstufe) und dem Namen des Säurerestes gebildet. Saure Salze, die noch Säurewasserstoff enthalten, werden durch ein zwischengeschaltetes -hydrogen- gekennzeichnet (siehe Tabelle).

3.7 Systematische Benennung von Säuren und Säureresten

Säure	Formel	Säurerest	Ladung	Salzname
Fluorwasserstoffsäure	HF	F	1-	-fluorid
Flusssäure				
Chlorwasserstoffsäure	HCl	Cl	1-	-chlorid
Salzsäure				
Bromwasserstoffsäure	HBr	Br	1-	-bromid
Jodwasserstoffsäure	HJ	J	1-	-jodid
Schwefelwasserstoffsäure	H ₂ S	S	2-	-sulfid
Cyanwasserstoffsäure	HCN	CN	1-	-cyanid
Blausäure				
chlorige Säure	HClO ₂	ClO ₂	1-	-chlorit
Chlorsäure	HClO ₃	ClO ₃	1-	-chlorat
Perchlorsäure	HClO ₄	ClO ₄	1-	-perchlorat
Cyansäure	HOCN	OCN	1-	-cyanat
Kieselsäure	H ₂ SiO ₃	SiO ₃	2-	-silikat
Kohlensäure	H ₂ CO ₃	CO ₃	2-	-carbonat
		HCO ₃	1-	-hydrogencarbonat
Phosphorsäure	H ₃ PO ₄	PO ₄	3-	-phosphat
		HPO ₄	2-	-hydrogenphosphat
salpetrige Säure	HNO ₂	NO ₂	1-	-nitrit
Salpetersäure	HNO ₃	NO ₃	1-	-nitrat

3.8 Systematische Benennung organischer Verbindungen

Kettenförmige Kohlenwasserstoffe (Aliphaten)

Der Name einer chemischen Verbindung besteht aus dem Stammnamen, Endungen bzw. Vorsilben und Ziffern, die die Stellung der Gruppen in der Kette angeben.

Stammname

wird nach der Zahl der C-Atome in der Hauptkette gebildet.

Stamm	Zahl	Stamm	Zahl
Meth-	1	Hex-	6
Äth-	2	Hept-	7
Prop-	3	Okt-	8
But-	4	Non-	9
Pent-	5	Dec-	10

Endung

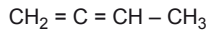
wird nach der Bindung der C-Atome in der Kette gebildet

Endung	Name der Reihe	Formel allgemein	Beispiel	Bindungen
-an	Alkan (Paraffin)	C_nH_{2n+2}	C_2H_6 Äthan, Ethan $\begin{array}{c} \quad \\ -C-C- \\ \quad \end{array}$	Einfachbindung, gesättigt
-en	Alken (Olefin)	C_nH_{2n}	C_2H_4 Äthen, Ethen $\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ C=C \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$	Doppelbindung, ungesättigt
-dien	Alkadien (Diolefin)	C_nH_{2n-2}	C_4H_6 Butadien $\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ C=C-C=C \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array}$	2 Doppelbindungen, ungesättigt
-in	Alkin (Acetylen)	C_nH_{2n-2}	C_2H_2 Äthin, Ethin $-C \equiv C-$	Dreifachbindung, ungesättigt

Ziffern

Nachgestellte Ziffern geben an, hinter welchem (oder welchen) C-Atom(en) die Mehrfachbindung liegt. Sie kann weggelassen werden, wenn bei kurzen Ketten keine Zweideutigkeit vorliegt.

Beispiele:

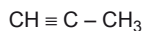


Butadien-(1,2)

Stellung der Doppelbindungen

2 Doppelbindungen

4 C-Atome in der Kette



Propin

Dreifachbindung

3 C-Atome in der Kette

Hier kann die Stellungsziffer weggelassen werden, da die beiden Möglichkeiten für die Lage der Dreifachbindung gleichwertig sind.

verzweigte Ketten

wurden früher mit der Vorsilbe Iso- gekennzeichnet. Systematische Benennung nach vier Regeln:

1. Stammname wird nach der Anzahl der C-Atome in der längsten Kette gebildet
2. Radikalname(n) der Seitenketten als Vorsilben vorgestellt
3. Zahlwörter vor den Radikalnamen, wenn mehrere gleiche Radikale vorliegen
4. Stellungsziffer vor dem Radikalnamen gibt an, bei welchem Glied der C-Kette die Seitenkette abzweigt (kleinstmögliche Ziffer), kann bei Eindeutigkeit fortfallen

Chemie

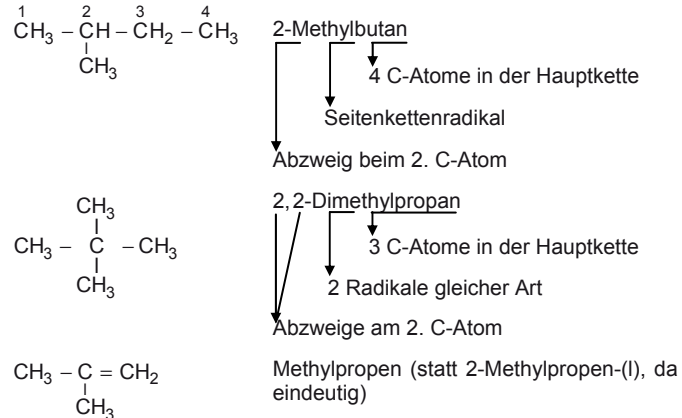
Systematische Benennung organischer Verbindungen

Radikale

Kohlenwasserstoffreste (Alkyle) sind ein- oder mehrbindige Atomgruppen, die nicht selbstständig existieren, bei chemischen Reaktionen aber meist zusammenbleiben. Sie leiten sich von den Stammnamen der Kohlenwasserstoffe ab und haben die Endung -yl.

$\text{CH}_3\text{-}$	Methyl	$\text{C}_3\text{H}_7\text{-}$	Propyl	$\text{CH}_2 = \text{CH-}$	Äthenyl
$\text{C}_2\text{H}_5\text{-}$	Äthyl	$\text{C}_4\text{H}_9\text{-}$	Butyl	$\text{CH}_2 = \text{CH - CH}_2$	Propenyl

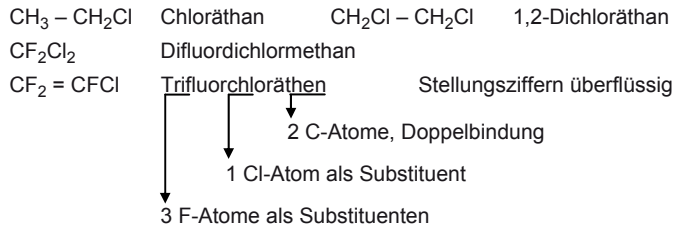
Beispiele:



Halogenderivate

Hierfür gelten die Regeln die auf verzweigten Ketten angewendet werden. Anstelle der Alkyl-Radikale treten die Namen der Halogenelemente.

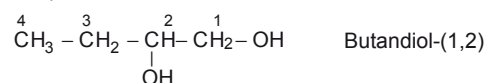
Beispiele:



weitere Derivate

Durch Einbau funktioneller Gruppen in die Stammkohlenwasserstoffe entstehen Derivate, deren Namen meist mit Endung gebildet werden, die von der funktionellen Gruppe abhängen. Bei längeren Ketten muss die Stellung der Gruppe in der Kette angegeben werden. Gleiche Gruppen zwei- oder mehrfach werden durch Zahlwörter berücksichtigt.

Beispiel:



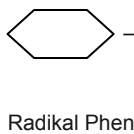
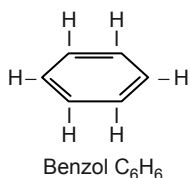
3.9 Benennung von funktionellen Gruppen

In Klammern stehende Namen sind bekannte Trivialnamen der Verbindungen

Derivatname	Endung	kennzeichnende Gruppe			Beispiel
		Name	Struktur	Formel	
Alkanol (Alkohol)	-ol	Hydroxy-	$R-OH$	$-OH$	C_2H_5-OH Äthanol $C_3H_5(OH)_3$ Propantriol (Glycerin)
Alkanal (Aldehyd)	-al	Aldehyd-	$R-C \begin{array}{l} \text{O} \\ // \\ \text{H} \end{array}$	$-CHO$	CH_3-CHO Äthanal (Acetaldehyd)
Alkanon (Keton)	-on	Oxo-	$R-C \begin{array}{l} \text{O} \\ // \\ \text{O} \end{array}-R$	$=CO$	$CH_3-CO-CH_3$ Propanon (Aceton)
Alkansäure (Karbonsäure) Alkensäure	-säure	Carboxyl-	$R-C \begin{array}{l} \text{O} \\ // \\ \text{OH} \end{array}$	$-COOH$	CH_3-COOH Äthansäure (Essigsäure) $CH_2=CH-COOH$ Propensäure (Acrylsäure)
Aminoalkane	-amin	Amino-	$R-N \begin{array}{l} \text{H} \\ / \\ \text{H} \end{array}$	$-NH_2$	CH_3-NH_2 Methylamin Aminomethan
Alkanamide	-amid		$R-C \begin{array}{l} \text{O} \\ // \\ \text{NH}_2 \end{array}$	$-CONH_2$	CH_3-CONH_2 Äthanamid
Alkannitril	-nitril	Nitril-	$R-C \equiv N$	$-CN$	CH_3-CN Äthannitril
Alkennitril					$CH_2=CH-CN$ Propennitril (Acrylnitril)
Nitroalkan	-	Nitro-	$R-N \begin{array}{l} \text{O} \\ // \\ \text{H} \end{array}$	$-NO_2$	CH_3-NO_2 Nitromethan
Alkylsulfone	-sulfon	Sulfon-	$R-S \begin{array}{l} \text{O} \\ // \\ \text{O} \end{array}-R$	$=SO_2$	$CH_3-SO_2-CH_3$ Dimethylsulfon
Alkansäure- alkyl-Ester	-ester		$R_1-C \begin{array}{l} \text{O} \\ // \\ \text{OR}_2 \end{array}$	$-COO-$	CH_3COOCH_3 Äthansäure methylester
Alkoxyalkane Äther	-oxy-		R_1-O-R_2		$C_2H_5-O-C_2H_5$ Äthoxy-äthan (Diäthyläther)

3.10 Ringförmige Kohlenwasserstoffe (Aromaten)

Für diese Verbindungen und ihre Derivate (Ableitungen) sind meist Trivialnamen im Gebrauch. Deswegen werden die Regeln auf Benzol und die wichtigsten Derivate beschränkt.

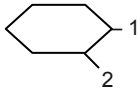


Chemie

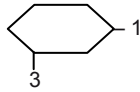
Basen, Laugen

Stellungsziffern

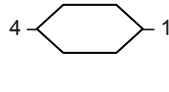
Die H-Atome können durch Alkylradikale, Halogene oder funktionelle Gruppen substituiert werden. Bei mehreren Substituenten wird die Stellung am Benzolring durch Ziffern bezeichnet, die direkt an der Bezeichnung für den Substituenten stehen (siehe Beispiele).



1,2-Stellung
(ortho-), o-

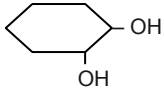


1,3-Stellung
(meta-), m-

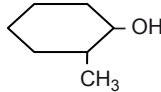


1,4-Stellung
(para-), p-

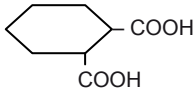
Beispiele:



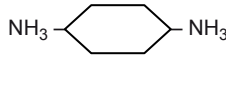
1,2-Dimethylbenzol
(o-Xylol)



2-Methylhydroxybenzol
(o-Kresol)



Benzoldicarbonsäure-(1,2)
(Phtalsäure)



1,4-Diaminobenzol
(p-Phenylendiamin)

3.11 Basen, Laugen

Bezeichnung	chemische Formel	Beispiel und Bemerkung $\text{CaO} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Ca(OH)}_2$ (Metalloxid) + (Wasser) \rightarrow (Hydroxid)
Natronlauge	NaOH	Herstellung durch Elektrolyse von NaCl-Lösung nach verschiedenen Verfahren. Zum Aufschluss von Bauxit, Zellstoff, für Seifenherstellung und Beizen von Aluminium.
Kalilauge	KOH	Elektrolyt in Nickel-Eisen-Akkumulatoren.
Calciumhydroxid, gelöschter Kalk	Ca(OH)_2	Als Kalkwasser eine billige Lauge bei der Zuckerherstellung.
Calciumoxid, gebrannter Kalk	CaO	Basischer Stoff für die Neutralisation von Abfallsäuren und sauren Böden. Zur Entphosphorung im Stahlwerk.
Calciumcarbonat, Kalkstein	CaCO_3	Hochfenzuschlag zur Schlackenbildung und Entschwefelung.
Magnesiumcarbonat, Magnesit, Dolomit	MgCO_3	Basische Stoffe für feuerfeste Auskleidungen von Öfen und Pfannen im Stahlwerk und Gießerei.
Natriumcarbonat, Soda	Na_2CO_3	Roheisenentschwefelung, Glasherstellung, Entfettungsmittel.
Kaliumcarbonat, Pottasche	K_2CO_3	Glasherstellung.

3.12 Gewerbliche und chemische Benennung von Chemikalien, chemische Formeln

gewerbliche Benennung	chemische Benennung	chemische Formel	gewerbliche Benennung	chemische Benennung	chemische Formel
Äther	Äthyläther	$(C_2H_5)_2O$	Kochsalz (Steinsalz)	Natriumchlorid	NaCl
Ätzkali	Kaliumhydroxid	KOH	Kohlensäure	Kohlendioxid	CO_2
Ätznatron	Natriumhydroxid	NaOH	Korund	Aluminiumoxid	Al_2O_3
Alaun	Kaliumaluminiumsulfat	$KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$	Kreide	Calciumcarbonat	$CaCO_3$
Alkohol	Äthanol	C_2H_5OH	Kupferoxyd, salzsauer	Kupfer(II)-chlorid	$CuCl_2 \cdot 2 H_2O$
Antichlor	Natriumthiosulfat	$Na_2S_2O_3 \cdot 5H_2O$	Kupfervitriol	Kupfersulfat	$CuSO_4 \cdot 5 H_2O$
Azeton	Aceton	$(CH_3)_2 \cdot CO$	Lötlösung	wässrige Lösung von Zinkchlorid	$ZnCl_2$
Azetylen	Acetylen	C_2H_2	Manganoxydul, salzsauer	Mangan(II)-chlorid	$MnCl_2 \cdot 4 H_2O$
Blausäure	Cyanwasserstoff	HCN	Marmor	Calciumcarbonat	$CaCO_3$
Bleiglätte	Bleioxid	PbO	Mennige	Blei(II, IV)-oxid	Pb_3O_4
Bleiweiß	bas. Bleicarbonat	$2 PbCO_3 \cdot Pb(OH)_2$	Methyl-Alkohol	Methanol	CH_3OH
Bleizucker	Bleiacetat	$Pb(C_2H_3O_2)_2 \cdot 3H_2O$	Natron	Natriumhydroxid	NaOH
Blutlaugensalz, gelb	Kaliumhexacyanoferrat(II)	$K_4[Fe(CN)_6] \cdot 3 H_2O$	(Natronlauge)		
Blutlaugensalz, rot	Kaliumhexacyanoferrat(III)	$K_3[Fe(CN)_6]$	Natronsalpeter	Natriumnitrat	$NaNO_3$
Borax	Natriumtetraborat	$Na_2B_4O_7 \cdot 10 H_2O$	Polierrot	Eisen(III)-oxid	Fe_2O_3
Braunstein	Mangandioxid	MnO_2	Pottasche	Kaliumcarbonat	K_2CO_3
Chilesalpeter	Natriumnitrat	$NaNO_3$	Salmiak, Salmiaksalz	Ammoniumchlorid	NH_4Cl
Chlorkalk	Chlorkalk	$CaCl(OCl)$	Salmiakgeist	wässrige Lösung von Ammoniak	NH_3
Chromsäure	Chrom(VI)-oxid	CrO_3	Salzsäure	Chlorwasserstoffsäure	HCl
Chromkali, gelb	Kaliumchromat	K_2CrO_4	Scheidewasser	Salpetersäure	HNO_3
Chromkali, rot	Kaliumdichromat	$K_2Cr_2O_7$	Schwefelsäure	Schwefelsäure	H_2SO_4
destilliertes Wasser	destilliertes Wasser	H_2O	Siliziumkarbid	Siliciumcarbid	SiC
Eisenoxyd, salzsauer	Eisen(III)-chlorid	$FeCl_3 \cdot 6 H_2O$	Soda (Kristall-)	Natriumcarbonat	$Na_2CO_3 \cdot 10 H_2O$
Eisenrost	Eisen(III)-oxid-Hydrat	$Fe_2O_3 \cdot xH_2O$	Tetra	Tetrachlorkohlenstoff	CCl_4
Eisenvitriol	Ferrosulfat	$FeSO_4 \cdot 7 H_2O$	Tetraäthylblei	Bleitetraäthyl	$Pb(C_2H_5)_4$
Essig	Essigsäure	CH_3COOH	Tetralin	Tetrahydronaphthalin	$C_{10}H_{12}$
Fixiersalz	Natriumthiosulfat	$Na_2S_2O_3 \cdot 5 H_2O$	Tri	Trichloräthylen	C_2HCl_3
Flusssäure	Fluorwasserstoff	HF	übermangansaures Kali	Kaliumpermanganat	$KMnO_4$
Gips	Calciumsulfat	$CaSO_4 \cdot 2 H_2O$	Vitriol, blauer	Kupfersulfat	$CuSO_4 \cdot 5 H_2O$
Glaubersalz	Natriumsulfat	$Na_2SO_4 \cdot 10 H_2O$	Vitriol, grüner	Eisen(II)-sulfat	$FeSO_4 \cdot 7 H_2O$
Glycerin	Glycerin	$C_3H_5(OH)_3$	Wasserglas (Natron-)	Natriumsilicat	Na_2SiO_2
Graphit	Graphit	C	Wasserglas (Kali-)	Kaliumsilicat	K_2SiO_3
Grünspan	bas. Kupferacetat	$Cu(C_2H_3O_2)_2 + Cu(OH)_2 \cdot 5 H_2O$	Wasserstoff-superoxyd	Wasserstoffperoxid	H_2O_2
Höllenstein	Silbernitrat	$AgNO_3$	Zink, salzsauer	Zinkchlorid	$ZnCl_2$
Kalilauge (kaustisches Kali)	Kaliumhydroxid	KOH	Zinkchlorid	Zinkchlorid	$ZnCl_2 \cdot 3 H_2O$
Kalialpeter	Kaliumnitrat	KNO_3	Zinkweiß	Zinkoxid	ZnO
Kalk, gebrannt	Calciumoxid	CaO	Zinnchlorid	Zinn(IV)-chlorid	$SnCl_4$
Kalk, gelöscht	Calciumhydroxid	$Ca(OH)_2$	Zinnsalz, Chlorzinn	Zinn(II)-chlorid	$SnCl_2$
Kalkstein	$CaCO_3$	$CaCO_3$	Zyankali	Kaliumcyanid	KCN
(Kalzium-) Karbid	Calciumcarbid	CaC_2			
kaustische Pottaschenlauge	Kaliumhydroxid	KOH			
kaustische Soda	Natriumhydroxid	NaOH			
Kieselsäure (Quarz)	Siliciumdioxid	SiO_2			

Chemie

Chemische Reaktionen, Gesetze, Einflussgrößen

3.13 Säuren

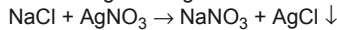
Bezeichnung	chemische Formel	$\text{SO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_3$ (Nichtmetalloxid) + (Wasser) \rightarrow (Säure)
Chlorwasserstoffsäure Salzsäure	HCl	Wasser löst bei 15 °C etwa das 450fache Volumen Chlorwasserstoff. Beizmittel zum Entzundern.
Fluorwasserstoffsäure, Flusssäure	HF	Siedepunkt 19,5 °C, als 30... 50 %ige Säure in wässriger Lösung. Ätzmittel für Glas.
Schwefelsäure	H ₂ SO ₄	Meist verdünnt verwendet. Konzentriert stark wasserentziehend. Hauptverwendung zur Düngemittelherstellung, Akkusäure, Herstellung anderer Säuren.
Salpetersäure	HNO ₃	Starkes Oxydationsmittel, entzündet konzentriert Holz, Alkohol. Dient zur Einführung der Gruppe NO ₂ in Kohlenwasserstoffe: Nitrierung von Glycerin: Nitroglycerin.
Phosphorsäure	H ₃ PO ₄	Phosphatieren von Oberflächen.

3.14 Chemische Reaktionen, Gesetze, Einflussgrößen

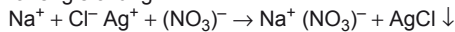
Reaktionsgleichung

Qualitative und quantitative Beschreibung einer chemischen Reaktion mit Symbolen für Elemente und Formeln für chemische Verbindungen. Es sind verschiedene Formen möglich:

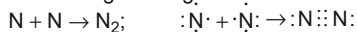
Reaktionsgleichung mit Summenformeln



Ionengleichung

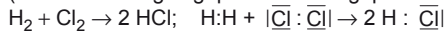


Reaktionsgleichung mit Elektronenformeln



Reaktionsgleichung mit Elektronenformeln

(Unterscheidung in gepaarte und ungepaarte Außenelektronen)



Erhaltung der Masse

Bei chemischen Reaktionen ändert sich die Masse eines geschlossenen Systems nicht. Folgerung für die Reaktionsgleichung: Jede Atomart muss auf beiden Seiten der Gleichung in gleicher Anzahl auftreten.

Erhaltung der Energie

Wenn bei der Bildung eines Stoffes Energie frei wird, so muss für den umgekehrten Vorgang der gleiche Energiebetrag zugeführt werden. Die Art der Energie (Wärme, elektrische Energie) kann in manchen Fällen eine andere sein.

Reaktionsgeschwindigkeit

Konzentrationsänderung eines Stoffes je Zeiteinheit. Die Reaktionsgeschwindigkeit steigt mit der Temperatur (größere Energie und Häufigkeit der Zusammenstöße) und mit der Konzentration (größere Häufigkeit der Zusammenstöße der Teilchen). Katalysatoren erhöhen, Inhibitoren erniedrigen die Reaktionsgeschwindigkeit.

Konzentration

Anteil eines Stoffes am Stoffsystem (Gasmischung, Lösung)

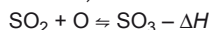
Stoffmengenkonzentration (Molarität) c : Stoffmenge des gelösten Stoffes
in 1 l Lösung mit der Einheit $\frac{\text{mol}}{\text{l}}$

Stoffmengenbruch (Molenbruch) x : Stoffmenge einer Komponente
durch gesamte Stoffmenge mit
der Einheit $\frac{\text{mol}}{\text{mol}} = 1$

Umkehrbare Reaktionen

Chemische Reaktionen verlaufen gleichzeitig in beiden Richtungen mit zunächst unterschiedlichen Reaktionsgeschwindigkeiten.

Hinreaktion, Bildung von SO_3



Rückreaktion, Zerfall von SO_3



Die Hinreaktion verläuft anfangs schnell, wegen der abnehmenden Konzentration der Ausgangsstoffe aber langsamer werdend.

Die Rückreaktion setzt sehr langsam ein, wird mit zunehmender Konzentration der SO_3 -Moleküle schneller. Wenn beide Geschwindigkeiten gleich groß geworden sind, ist die Reaktion von außen betrachtet beendet. Dann ist das chemische Gleichgewicht erreicht.

chemisches Gleichgewicht

Dynamischer Gleichgewichtszustand eines Stoffsystems, bei dem gleich viele Moleküle entstehen wie andererseits zerfallen. Ausgangsstoffe und Reaktionsprodukte sind in bestimmten Massenverhältnissen vorhanden. Dieses Massenverhältnis wird als Lage des Gleichgewichts bezeichnet und mit dem Massenwirkungsgesetz berechnet.

Das im Gleichgewicht vorhandene Massenverhältnis der Stoffe bleibt bestehen, solange nicht einer der drei Gleichgewichtsfaktoren geändert wird:

1. Temperatur;
2. Druck;
3. Konzentration (durch Zu- oder Abfuhr eines der Reaktionspartner).

Prinzip des kleinsten Zwanges

Gesetzmäßigkeit (*Le Chatelier, Braun*) über das Verhalten von Stoffsystemen, die im Gleichgewicht sind.

Jede Änderung der drei Gleichgewichtsfaktoren (Temperatur, Druck, Konzentration) übt auf das System einen Zwang aus. Dadurch wird diejenige Reaktion beschleunigt, welche den Zwang vermindert. Das System erhält eine neue Gleichgewichtslage.

Einfluss der Temperatur

Bei Temperaturerhöhung wird die Gleichgewichtslage auf die Seite der endothermen Verbindung verschoben, bei Temperatursenkung auf die andere Seite der Reaktionsgleichung.

Beispiel: Boudouard-Gleichgewicht, Reaktion eines CO/CO_2 -Gemisches bei Koksüberschuss (Hochofenprozess)



Die Bildung von CO ist endotherm, bei Temperaturerhöhung wird mehr CO entstehen, die Hinreaktion wird beschleunigt.

Temperatursenkung beschleunigt die Rückreaktion, CO zerfällt in $\text{C} + \text{CO}_2$.

Chemie

Chemische Reaktionen, Gesetze, Einflussgrößen

Einfluss des Druckes

Bei Druckerhöhung wird die Gleichgewichtslage zu der Seite verschoben, welche Stoffe mit kleinerem Volumen aufweist, bei Druckminderung im entgegengesetzten Sinne.

Beispiel: Vakuumbehandlung von Stahlschmelzen zur weiteren Desoxydation



Die Gleichgewichtsreaktion wird bei Druckminderung (Vakuum) bevorzugt nach rechts weiterlaufen, da die Reaktionsprodukte ein größeres Volumen besitzen. Der Anteil der Ausgangsstoffe (Oxidschlacke) wird vermindert.

Massenwirkungsgesetz (MWG)

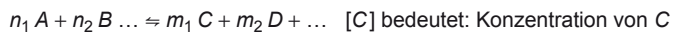
Gesetz (*Guldberg und Waage*) über den Einfluss der Stoffmassen (Konzentration) auf die Reaktion.

Der Quotient aus

Produkt der Konzentrationen der Reaktionsstoffe

Produkt der Konzentrationen der Ausgangsstoffe

ist eine für jede Reaktion verschiedene Konstante, die von der Temperatur abhängt. Diese Gleichgewichtskonstante K wird durch Versuche ermittelt. Allgemeine Formulierung für eine Reaktion:



$$K = \frac{[C]^{m_1} \cdot [D]^{m_2}}{[A]^{n_1} \cdot [B]^{n_2}} \quad \text{für eine Temperatur } T$$

Für die Ammoniaksynthese, z. B.:



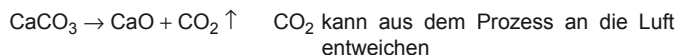
Folgerungen aus dem MWG:

Wird bei konstanter Temperatur die Konzentration eines Stoffes geändert, so verschiebt sich die Gleichgewichtslage so, dass der Quotient des MWG wieder den Betrag K erhält.

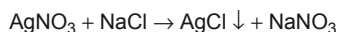
Beispiel: Wenn auf der linken Seite der Ammoniaksynthesegleichung die beiden Gase nicht im Verhältnis 1:3, sondern mit etwas mehr Wasserstoff gemischt werden, so erhält der Nenner des MWG einen größeren Wert. Um auf die gleiche Gleichgewichtskonstante K zu kommen, muss das System mehr NH_3 bilden, d. h., die Ausbeute an Ammoniak steigt.

Wird eines der Reaktionsprodukte ständig aus dem Stoffsystem entfernt, so kann sich kein Gleichgewicht ausbilden. Die Reaktion verläuft ständig unter Bildung dieses Produktes weiter.

Beispiel: Brennen von Kalkstein, Calciumcarbonat



Fällungsreaktionen in Lösungen:



Schwerlösliche Salze – hier AgCl – fallen als Niederschlag aus dem homogenen System der Lösung aus, dadurch Verschiebung der Gleichgewichtslage nach rechts, bis keine Cl^- -Ionen mehr vorhanden sind.

Größenordnung der Konstanten K

Die Größenordnung der Gleichgewichtskonstanten K lässt einen Schluss auf die Richtung der Reaktionen zu. Für den Bereich der technisch beherrschbaren Temperaturen gilt:

$K \approx 1$: Reaktion ist leicht umkehrbar
 K sehr klein: Rückreaktion verläuft fast vollständig
 K sehr groß: Hinreaktion verläuft fast vollständig

3.15 Ionenlehre**elektrolytische Dissoziation**

Aufspaltung von Ionenbindungen und polarisierten Atombindungen in freibewegliche Ionen, die von einer Hydrathülle aus H_2O -Dipolen umgeben sind.

Elektrolyt

Stoff, der Ionen enthält und dadurch den elektrischen Strom leitet.
 Geschmolzene Ionenverbindungen: Salze, Oxide. Gelöste Salze, Säuren und Basen.

Dissoziationsgrad α

Verhältnis der dissoziierten Moleküle zu der Zahl der Moleküle vor der Dissoziation. Der Dissoziationsgrad steigt mit der Temperatur und mit der Verdünnung (Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit).

Dissoziationsgrad bei 18 °C in 1-normaler Lösung

	α	Säure	Base
sehr stark	1 ... 0,7	HNO_3 , HCl	KOH , $NaOH$, $Ba(OH)_2$
stark	0,7 ... 0,2	H_2SO_4	$LiOH$, $Ca(OH)_2$
mäßig stark	0,2 ... 0,01	H_3PO_4 , HF	$AgOH$
schwach	0,01 ... 0,001	CH_3COOH	NH_4OH

Dissoziationskonstanten K_D

Bei Anwendung des Massenwirkungsgesetzes auf die elektrolytische Dissoziation (Gleichgewichtsreaktion) wird die Gleichgewichtskonstante K zur Dissoziationskonstanten K_D

$$\frac{[\text{Kation}] \cdot [\text{Anion}]}{[\text{Molekül}]} = K_D \quad \begin{array}{c|c} \text{Kation, Anion} & K_D \\ \hline \frac{\text{mol}}{l} & \frac{\text{mol}}{l} \end{array}$$

Größenordnung von K_D :

schwache Elektrolyte $K_D < 10^{-4}$
 mittlere Elektrolyte $K_D > 10^{-4}$
 starke Elektrolyte $K_D \approx 1$

K_D steigt mit der Temperatur, ist aber unabhängig von der Konzentration des Elektrolyten.

Ostwald'sches Verdünnungs-Gesetz

Zusammenhang zwischen Dissoziationskonstante K_D und Dissoziationsgrad α . Gültig für schwache Elektrolyte in starker Verdünnung

$$K_D = \frac{c \alpha^2}{1 - \alpha} \quad \begin{array}{c} \text{Konzentration } c \\ \text{mol/l} \end{array}$$

Ionenprodukt des Wassers

Reines Wasser ist außerordentlich gering dissoziiert. Das Produkt der Konzentrationen im Zähler des MWG beträgt

$$[H^+] \cdot [OH^-] = 10^{-14} \frac{\text{mol}^2}{l^2} \text{ bei } 25^\circ\text{C}$$

pH-Wert

Die Konzentrationen der beiden Ionen betragen danach 10^{-7} mol/l, d. h.:

1 l Wasser enthält $10^{-7} \cdot 1 \text{ g}$ Wasserstoff-Ionen
 und $10^{-7} \cdot 17 \text{ g}$ Hydroxid-Ionen.

Reines Wasser: $[H^+] = [OH^-]$
 Säure: $[H^+] > [OH^-]$
 Base: $[H^+] < [OH^-]$ } Produkt immer $10^{-14} \frac{\text{mol}^2}{l^2}$

Negativer Briggs'scher Logarithmus der Wasserstoff-Ionenkonzentration in wässrigen Lösungen.

$$\text{pH} = \lg [H^+] \quad \text{und} \quad [H^+] = 10^{-\text{pH}}$$

Maß für den sauren, neutralen oder basischen Charakter eines Elektrolyten, durch Indikatoren mittels Farbumschlag oder elektrisch messbar.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
stark ← sauer						neutral	basisch → stark						

Indikatoren

Name	Farbumschlag	Umschlagbereich pH-Werte
Dimethylgelb	rot – gelb	2,9... 4,0
Methylorange	rot – orange	3,0... 4,4
Methylrot	rot – gelb	4,2... 6,3
Lackmus	rot – blau	5,0... 8,0
Phenolphthalein	farblos – rot	8,2... 10,0
Thymolphthalein	farblos – blau	9,3... 10,5
Alizaringelb	gelb – orangebraun	10,1... 12,1

Löslichkeitsprodukt L

Diese Konstante entspricht der Gleichgewichtskonstanten des MWG, wenn es auf gesättigte Lösungen angewendet wird. Bei konstanter Temperatur lässt sich die Konzentration der gelösten Teilchen nicht erhöhen (Sättigung).

Bei Zugabe der einen Ionensorte muss die andere in Form der unlöslichen Verbindung als Niederschlag ausfallen.

Beispiel: L für Silberchlorid AgCl beträgt $1,6 \cdot 10^{-10}$

$$[Ag^+] \cdot [Cl^-] = 1,6 \cdot 10^{-10} \frac{\text{mol}^2}{l^2}$$

Daraus lässt sich die Stoffmengenkonzentration der Ag-Ionen bestimmen:

$$c = \sqrt{1,6 \cdot 10^{-10} \frac{\text{mol}^2}{l^2}} = 1,265 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mol}}{l}$$

das ergibt einen Silbergehalt von

$$m = MVc = 108 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 1l \cdot 1,265 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mol}}{l}$$

$$m = 1,366 \cdot 10^3 \text{ g} = 1,366 \text{ mg in einem Liter}$$

Durch Zugabe von weiteren Cl-Ionen (HCl-Zusatz) würde das Löslichkeitsprodukt überschritten, deshalb muss bei Erhöhung des einen Faktors (Cl^-) der andere Faktor (Ag^+) kleiner werden, d. h., es bildet sich weiteres unlösliches Silberchlorid AgCl .

Gilt streng nur für schwerlösliche Verbindungen oder Lösungen schwacher Konzentration $< 0,1 \frac{\text{mol}}{l}$

3.16 Elektrochemische Größen und Gesetze

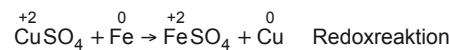
Spannungsreihe

Reihenfolge der Elemente nach fallendem Lösungsdruck geordnet. Lösungsdruck ist das Bestreben, in den Ionenzustand überzugehen und als elektrische Spannung messbar → Normalpotenziale.

K Ca Na Mg Al Zn Cr Fe Cd Ni Sn Pb H Cu Ag Pt Au
 — HCl greift an, Wasserstoff wird frei | HCl greift nicht an +
 unedler ↔ edler

Metalle, die in der Spannungsreihe links stehen, können rechts davon stehende reduzieren, d. h., sie verdrängen diese aus ihren Salzlösungen.

Beispiel: Eisenblech in Kupfersulfatlösung



Unedle Metalle: links stehend, niedrige Elektronenaffinität, leicht oxydierbar.

Edle Metalle: rechts stehend, hohe Elektronenaffinität, schwer oxydierbar.

Normalpotentiale E_0 Standardpotentiale

Spannung eines Metalls in seiner Salzlösung gegenüber der Normalwasserstoffelektrode bei 25 °C.

Metall	Spannung V	Metall	Spannung V
Li	-3,02	Cd	-0,41
K	-2,92	Co	-0,28
Ca	-2,87	Ni	-0,23
Na	-2,71	Sn	-0,14
Mg	-2,36	Pb	-0,13
Al	-1,66	H	± 0
Mn	-1,05	Cu	+0,34
Zn	-0,76	Ag	+0,80
Cr	-0,71	Pt	+1,2
Fe	-0,44	Au	+1,42

Spannungswerte sind abhängig von der Konzentration der Salzlösungen. Sie werden negativer, wenn die Konzentration sinkt.

galvanisches Element

System aus einem Elektrolyten, in den zwei verschiedene Metalle tauchen. Stromquelle mit einer Ursprungung E , die sich aus der Differenz der Normalpotentiale errechnet.

Minuspol: Metall, in der Spannungsreihe links stehend, geht in Lösung, gibt Elektronen ab.

Pluspol: Metall, rechts in der Spannungsreihe stehend, nimmt Elektronen aus dem Elektrolyten auf, bleibt unverändert.

Beispiel: Ursprungung zwischen Cu und Zn unter den Bedingungen der Normalpotentialmessung:

$$E = E_{0 \text{ Cu}} - E_{0 \text{ Zn}} = +0,34 \text{ V} - (-0,76 \text{ V}) = 1,1 \text{ V}$$

Elektrolyse

Redoxreaktion in einem Elektrolyten unter Zufuhr von Energie. Oxydation und Reduktion verlaufen örtlich getrennt.

Anode (Plus-Pol): Anziehung der negativ geladenen Ionen (Anionen), z. B. OH^- oder Halogene. Entladung durch Abgabe von Elektronen: Oxydation.

Chemie

Elektrochemische Größen und Gesetze

Katode (Minus-Pol): Anziehung der positiv geladenen Ionen (Kationen), z. B. Metalle und Wasserstoff. Entladung durch Aufnahme von Elektronen: Reduktion.

Besteht der Elektrolyt aus zwei oder mehr verschiedenen Anionen (Kationen), so werden diejenigen Teilchen entladen, für deren Abscheidung die kleinste Spannung benötigt wird.

Beispiel: Bei der Elektrolyse von Salzlösungen unedler Metalle (K, Na, Mg, Al) wird Wasserstoff abgeschieden, da H⁺ ein niedrigeres Potential besitzt als diese Metallionen.

Faraday'sche Gesetze

Die abgeschiedenen Stoffmengen sind bei gleichen Elektrolyten der Elektrizitätsmenge proportional.

Bei verschiedenen Elektrolyten werden von der gleichen Elektrizitätsmenge Stoffmassen abgeschieden, die sich wie die Äquivalentmassen der Stoffe verhalten.

abgeschiedene Stoffmasse $m = \frac{M I t}{z F}$

M molare Masse (siehe 3.10)

z Ionenwertigkeit

F Faraday-Konstante

$$F = 96485 \frac{\text{As}}{\text{mol}} = 26,8 \frac{\text{Ah}}{\text{mol}}$$

<i>m</i>	<i>M</i>	<i>I</i>	<i>t</i>	<i>F</i>
g	$\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	A	s	$\frac{\text{As}}{\text{mol}}$
			h	$\frac{\text{Ah}}{\text{mol}}$

Faraday-Konstante F

Elektrizitätsmenge, die bei 100 %iger Stromausbeute aus einem Elektrolyten die äquivalente Masse M_{eq} eines Stoffes abscheidet. Sie ist das Produkt aus der Elementarladung und der Avogadro-Konstante.

$$F = e \cdot N_A = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{As} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$$

$$F = 96485 \frac{\text{C}}{\text{mol}} = 96485 \frac{\text{As}}{\text{mol}} \approx 96500 \frac{\text{As}}{\text{mol}}$$

elektrochemische Äquivalente

Stoffmasse in mg oder g, die bei 100 %iger Stromausbeute von einer Elektrizitätsmenge 1 As bzw. 1 Ah abgeschieden wird.

Element		Ionenwertigkeit	Äquivalent \bar{A}	
			$\frac{\text{mg}}{\text{As}}$	$\frac{\text{g}}{\text{Ah}}$
Aluminium	Al	III	0,093	0,335
Beryllium	Be	II	0,047	0,168
Cadmium	Cd	II	0,582	2,097
Chrom	Cr	III	0,180	0,647
Eisen	Fe	II	0,289	1,042
	Fe	III	0,193	0,694
Kupfer	Cu	I	0,658	2,370
	Cu	II	0,329	1,185
Magnesium	Mg	II	0,126	0,454
Sauerstoff	O	II	0,083	0,298
Silber	Ag	I	1,118	4,025
Wasserstoff	H	I	0,0104	0,0376
Zink	Zn	II	0,339	1,22
Zinn	Sn	IV	0,308	1,107

3.17 Größen der Stöchiometrie

relative Atommasse A_r

relative Molekülmasse M_r

Stoffmenge n

Avogadro-Konstante N_A

molare Masse M

Die Berechnung der abgeschiedenen Stoffmassen wird durch elektrochemische Äquivalente vereinfacht.

$$m = \ddot{A} I t$$

m	\ddot{A}	I	t
mg	mg/As	A	s
g	g/Ah		h

Beispiel: Welche Zeit ist erforderlich, um 50 g Kupfer aus einer Kupfer(II)-sulfatlösung mit einem Strom von 8 A abzuscheiden?

$$t = \frac{m}{\ddot{A} I} = \frac{50 \text{ gAh}}{1,185 \text{ g} \cdot 8 \text{ A}} = 5,274 \text{ h}$$

siehe 3.1

Summe der relativen Atommassen A_r aller im Molekül gebundenen Atome, aus der Summenformel der chemischen Verbindung errechnet.

Beispiel: Aluminiumsulfat $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$

$$M_r = 2 \text{ Al} + (\text{S} + 4 \cdot \text{O}) = 2 \cdot 27 + 3 (32 + 4 \cdot 16) = 342$$

Basisgröße mit der Einheit der Teilchenmenge „Mol“. Kurzzeichen mol, 1 kmol = 10^3 mol.

Definition der Einheit nach dem Einheitengesetz: 1 mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso vielen Teilchen besteht, wie Atome in 0,012 kg des Nuklids ^{12}C enthalten sind.

Teilchen im Sinne dieser Definition sind Atome, Moleküle, Ionen, Radikale, Elektronen.

$$n = \frac{\text{Teilchenzahl } N}{\text{Avogadro - Konstante } N_A} = \frac{N u A_r}{N_A u A_r} = \frac{m}{M}$$

mit u atomare Masseneinheit,
 M molare Masse

Beispiel: Welche Stoffmenge stellen 200g Äthin, C_2H_2 dar?

$$M(\text{C}_2\text{H}_2) = (2 \cdot 12 + 2) \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 26 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad n = \frac{200 \text{ g}}{26 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 7,69 \text{ mol}$$

Naturkonstante, Anzahl der Teilchen, die in der Stoffmenge 1 mol aller Stoffe enthalten ist.

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \cdot \text{mol}^{-1}$$

(Der Betrag dieser Konstanten wird auch als Avogadro-Zahl, vielfach auch als Loschmidt'sche Zahl bezeichnet.)

Masse einer Stoffmenge $n = 1$ mol

$$M = N_A u A_r = 6,022 \cdot 10^{23} \cdot \underbrace{\frac{1}{\text{mol}} \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g}}_{1 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \cdot A_r$$

$$M = A_r \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad \text{für atomare Substanzen}$$

$$M = M_r \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad \text{für molekulare Substanzen}$$

Beispiele:

$$\text{Kohlenstoff} \quad M_{\text{C}} = 12 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad (\text{Grammatom})$$

Chemie

Größen der Stöchiometrie

**molares
Normvolumen $V_{m,0}$
(Molvolumen)**

Kohlendioxid $M_{\text{CO}_2} = 44 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ (Grammmolekül)

Sulfat-Ion $M_{\text{SO}_4} = 96 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ (Grammion)

Die Stoffmenge 1 kmol eines idealen Gases nimmt im Normzustand (bei 0 °C und 1,013 bar) ein Volumen von 22,414 m³ ein.

$$V_{m,0} = 22,414 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$$

$$V_0 = \frac{m}{M} V_{m,0} = n V_{m,0}$$

m	M	$V_{m,0}, V_0$
kg	$\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$	m ³
g	$\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	1

**Umrechnung
Masse–Volumen**

Beispiel: Normvolumen von 100 g Propan C₃H₈

$$M(\text{C}_3\text{H}_8) = (3 \cdot 12 + 8) \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 44 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$V_0 = \frac{100 \text{ g} \cdot 22,414 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}}{44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 50,9 \text{ dm}^3$$

**Stoffmengen-
konzentration c
(Molarität)**

Quotient aus der Stoffmenge n und dem Volumen eines homogenen Stoffsystems (Gasmischung, Lösung)

$$c = \frac{n}{V} = \frac{m}{MV}$$

c	m	M	V
$\frac{\text{mol}}{\text{l}}$	g	$\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	l

Beispiel: In einer Lösung sind in 10 ml Lösung 0,2 g NaOH enthalten.

$$c = \frac{0,2 \text{ g}}{40 \text{ g mol}^{-1} \cdot 10^{-2} \text{ l}} = 0,5 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \quad (0,5\text{-molar})$$

molare Lösung

Lösung mit bestimmter Stoffmengenkonzentration. Eine Lösung ist n -molar, wenn in 1 l Lösung die Stoffmenge n mol gelöst ist.

Beispiel: Wie viel Gramm NaCl sind in 100 ml einer 0,1 molaren Lösung enthalten? $M(\text{NaCl}) = (23 + 35,5) \frac{\text{g}}{\text{mol}}$;

$$c = \frac{m}{MV} ; m = cMV = 0,1 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \cdot 58,5 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 0,1 \text{ l} = 0,585 \text{ g}$$

Äquivalentmenge n_{eq}

Hilfsgröße, ganzzahliges Vielfaches der Stoffmenge, Produkt aus Stoffmenge und Wertigkeit z

$$n_{\text{eq}} = n z = \frac{m z}{M} = \frac{m}{M_{\text{eq}}}$$

n Stoffmenge in mol
 m Masse in g
 M_{eq} äquivalente Masse in $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$

Wertigkeiten z

Salze	Ladungszahl der Ionen
Säuren	Anzahl der H-Atome der Summenformel
Basen	Anzahl der OH-Gruppen der Summenformel
Redox-Reaktionen	Differenz der Oxydationszahlen

Die Äquivalentmenge n_{eq} eines Stoffes kann aufgefasst werden als Teilchenmenge von Wasserstoff-Ionen, die in der Lage ist, die Stoffmenge 1 mol dieses Stoffes zu ersetzen oder zu binden.

**äquivalente Masse M_{eq}
(Grammäquivalent)**

Beispiel: Zink reduziert Wasserstoff. Die Stoffmenge 1 mol Zn^{2+} hat die Äquivalentmenge $n_{\text{eq}} = 2$ mol, da diese Ionen die zweifache Menge Wasserstoffatome freimachen können, d. h., ihnen äquivalent sind.

$$M_{\text{eq}} = \frac{M}{z} \quad \text{Hilfsgröße, aus der molaren Masse gebildet, als Quotient aus molarer Masse und Wertigkeit.}$$

Bei mehrladigen Ionen wird durch die Elektrizitätsmenge $F = 96\,485$ As/mol die äquivalente Masse abgeschieden (F Faraday-Konstante).

**Äquivalentmengen-
konzentration c_{eq}
(Normalität)**

Hilfsgröße, aus der Stoffmengenkonzentration (Molarität) gebildet, als Produkt von Molarität und Wertigkeit z

$$c_{\text{eq}} = cz = \frac{nz}{V} = \frac{mz}{MV}$$

c_{eq}	m	z	M	V
$\frac{\text{mol}}{\text{l}}$	g	-	$\frac{\text{g}}{\text{mol}}$	l

Beispiel: Normalität von 150 ml Lösung in der 10 g H_2SO_4 gelöst sind.

$$M(\text{H}_2\text{SO}_4) = 98 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$c_{\text{eq}} = \frac{10 \text{ g} \cdot 2}{98 \text{ g mol}^{-1} \cdot 0,151} = 1,36 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

Normallösung

Lösung mit bestimmter Äquivalentmengenkonzentration (Normalität). In einer 1 n Lösung ist in 1 l Lösung die äquivalente Masse M_{eq} gelöst.

Beispiel: Herstellung einer 0,1 n Lösung HNO_3 von 400 ml.

$$m = \frac{c_{\text{eq}} MV}{z} = \frac{0,1 \cdot \text{mol} \cdot \text{l}^{-1} \cdot 63 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 0,4 \text{ l}}{1}$$

$m = 2,52$ g HNO_3 in $V = 400$ ml Säure ergeben eine 0,1 n Salpetersäure

Säure- und Basenlösungen der gleichen Normalität neutralisieren sich, wenn gleiche Volumina zusammengebracht werden.

**3.18 Beispiele für stö-
chiometrische
Rechnungen****Massengehalt**

Berechnung des Massenanteils eines Elementes E an einem Molekül M

$$E\% = \frac{A_{rE}}{M_r} \cdot 100 \quad \begin{array}{l} A_{rE} \text{ relative Atommasse des Elementes } E \\ M_r \text{ relative Molekülmasse des Moleküls } M \end{array}$$

Beispiel: Eisengehalt von Fe_3O_4 mit $A_{r\text{Fe}} = 56$ und $A_{r\text{O}} = 16$.

$$\text{Fe}\% = \frac{3 \cdot 56}{3 \cdot 56 + 4 \cdot 16} \cdot 100 = \frac{168}{232} \cdot 100 = 72,4\%$$

Stoffumsatz

Berechnung von Ausgangsstoffen oder Reaktionsprodukten in folgenden Schritten.

Beispiel: Vollständige Verbrennung von Propan. Gesucht sind Sauerstoffmasse und -volumen zur Verbrennung von 80 g Propan.

Vollständige Reaktionsgleichung aufstellen: $\text{C}_3\text{H}_8 + 5 \text{O}_2 \rightarrow 3 \text{CO}_2 + 4 \text{H}_2\text{O}$

Einsetzen der molaren Massen ergibt Massengleichung: $44 \text{ g} + 160 \text{ g} = 132 \text{ g} + 72 \text{ g}$

Gegebene Stoffmasse hinschreiben: 80 g

Chemie

Beispiele für stöchiometrische Rechnungen

Faktor $x = \frac{80\text{g}}{44\text{g}} = 1,818$

Überlegung: Von allen Stoffen die 1,818fache Masse nehmen.

Massengleichung mit dem Faktor $80\text{g} + 290,9\text{g} = 240\text{g} + 130,9\text{g}$ multiplizieren:

Ergebnis: Sauerstoffbedarf für 80 g Propan beträgt 290,9 g.

Umrechnung Masse – Volumen siehe „molares Normvolumen“

$$V_n = \frac{m}{M} V_{mn} = \frac{290,5\text{g} \cdot 22,4 \frac{\text{l}}{\text{mol}}}{32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 203,6 \text{ l}$$

Das Volumen der beteiligten Gase kann auch direkt aus der Reaktionsgleichung berechnet werden:

Reaktionsgleichung:	$\text{C}_3\text{H}_8 + 5 \text{O}_2 \rightarrow 3 \text{CO}_2 + 4 \text{H}_2\text{O}$			
Gleichung mit Stoffmengen ansetzen:	1 mol	5 mol	3 mol	4 mol
Für unbekannte Gase das molare Normvolumen einsetzen:	44 g	$5 \cdot 22,4 \text{ l}$	$3 \cdot 22,4 \text{ l}$	$4 \cdot 22,4 \text{ l}$
Gegebenen Stoff einsetzen:	80 g	V_{n1}	V_{n2}	V_{n3}
Proportion ansetzen	$\frac{44\text{g}}{80\text{g}}$	$= \frac{5 \cdot 22,4 \text{ l}}{V_{n1}}$	$= \frac{3 \cdot 22,4 \text{ l}}{V_{n2}}$	$= \frac{4 \cdot 22,4 \text{ l}}{V_{n3}}$

Gesuchtes Gasvolumen ausrechnen:

$$V_{n1} = \frac{5 \cdot 22,4 \text{ l} \cdot 80 \text{ g}}{44 \text{ g}} = 203,61$$

Mischungsregel

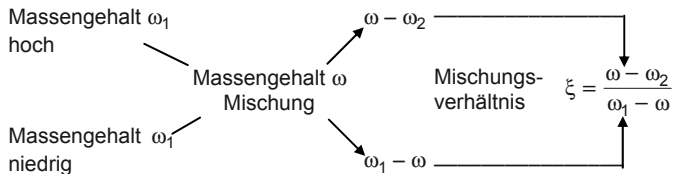
$m_1 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot \omega_2 = (m_1 + m_2) \omega$
 m_1, m_2 Masse der Mischungskomponenten
 ω_1, ω_2 Massegehalt der Komponenten in %
 ω Massegehalt der Mischung in %

Beispiel: Welchen Massegehalt hat die Mischung von 100 g 10 %iger Natronlauge mit 50 g 20 %iger?

$$\omega = \frac{m_1 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot \omega_2}{m_1 + m_2} = \frac{100\text{g} \cdot 10\% + 50\text{g} \cdot 20\%}{150\text{g}} = 13,33\%$$

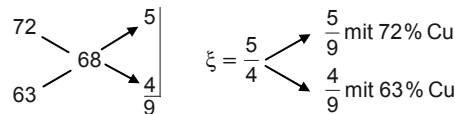
Mischungskreuz

Zur einfachen Bestimmung der Massenteile (Mischungsverhältnis) der Komponenten, wenn die Massegehalte der Komponenten und der Mischung gegeben sind.



In Pfeilrichtung die Differenzen der Massegehalte bilden (positive Vorzeichen). Die beiden Differenzen ergeben das Mischungsverhältnis ξ .

Beispiel: Aus den Messingsorten mit 63 % und 72 % Cu-Gehalt soll 68 %iges Messing hergestellt werden.



3.19 Energieverhältnisse bei chemischen Reaktionen

exotherme Reaktion

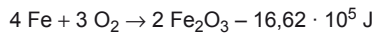
Bei der Reaktion wird Energie, meist Wärme, nach außen abgegeben. Die Energie erscheint in der Reaktionsgleichung auf der rechten Seite mit Minus-Zeichen, sie wird von dem reagierenden Stoffsystem weggenommen.

endotherme Reaktion

Bei der Reaktion wird Energie, meist Wärme, verbraucht, d. h., sie muss zugeführt werden, damit die Reaktion verläuft. Die Energie erscheint auf der rechten Seite mit Plus-Zeichen, sie muss dem Stoffsystem zugeführt werden.

Bildungsenthalpie

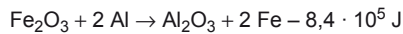
Wärme, die beim Entstehen einer chemischen Verbindung aus ihren Elementen gemessen werden kann. Angabe in der Einheit J/mol.



Da 2 mol Fe_2O_3 entstehen, beträgt die Bildungsenthalpie die Hälfte, $W = 8,31 \cdot 10^5 \text{ J/mol}$.

Reaktionsenthalpie

Wärme, die bei einer chemischen Reaktion als Energiedifferenz auftritt. Ihr Betrag bezieht sich auf den Formelumsatz. Dazu wird die Reaktionsgleichung mit den kleinsten ganzzahligen Koeffizienten aufgestellt. Der dann in Molen beschriebene Stoffumsatz hat die angegebene Reaktionsenthalpie.



Die Energieangabe bezieht sich dabei auf die Umsetzung von

1 mol $\text{Fe}_2\text{O}_3 = 160 \text{ g}$
 mit 2 mol $\text{Al} = 54 \text{ g}$
 zu 1 mol $\text{Al}_2\text{O}_3 = 102 \text{ g}$
 und 2 mol $\text{Fe} = 112 \text{ g}$.

Sie ist die Differenz aus den Bildungsenthalpien (= Trennungsenthalpien).

Bildung von 1 mol Al_2O_3	$- 16,71 \cdot 10^5 \text{ J}$
Trennung von 1 mol Fe_2O_3	$+ 8,31 \cdot 10^5 \text{ J}$
Reaktions-Enthalpie	$- 8,40 \cdot 10^5 \text{ J}$

Chemie

Bildungs- und Verbrennungswärme einiger Stoffe

3.20 Heizwerte von Brennstoffen

Name	Heizwert $H_u \cdot 10^6 \text{ J/m}^3$	Name	Heizwert $H_u \cdot 10^6 \text{ J/kg}$
Gase und Dämpfe¹⁾, chemisch rein		Flüssige Brennstoffe	
Äthan	C_2H_6 64,5	Äthanol (Äthylalkohol)	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ 27
Athen (Äthylen)	C_2H_4 59,5	Benzin für Automotoren	42,5
Äthin (Acetylen)	C_2H_2 56,9	Benzol	C_6H_6 40
Benzol	C_6H_6 144,0	Dieselöl	41,6
Dimethylbenzol (Xylol)	$\text{C}_6\text{H}_4(\text{CH}_3)_2$ 199,0	Flüssiggas	45,8
Methan	CH_4 35,9	Heizöl	42,9
Methylbenzol (Toluol)	$\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$ 172,0	Methanol (Methylalkohol)	19,5
Propan	C_3H_8 93,0		
Propen (Propylen)	C_3H_6 87,8		
Technische Gase¹⁾		Feste Brennstoffe	
Erdgas, trocken	(25...33)	Holz, frisch	8,4
Generatorgas	(4,8...5,2)	Holz, trocken	15,1
Gichtgas	(3,9...4,1)	Braunkohle, roh	9,6
Koksofengas	(17,2...18)	Braunkohle, briкетiert	19,3
Stadtgas	(17,6...19,3)	Steinkohle, Anthrazit	31,0
Wassergas	(9,8...10,7)	Zechenkoks	29,3
		Gaskoks	28,0

¹⁾ bezogen auf 1 Normalkubikmeter

3.21 Bildungs- und Verbrennungswärme einiger Stoffe

Element (Stoff)	Oxid	Bildungswärme J / mol Oxid	Verbrennungswärme	
			J / kg Stoff	J / m ³ Gas bei 0 °C; 1,013 bar
C	CO	$1,1 \cdot 10^5$	$9,2 \cdot 10^6$	–
C	CO ₂	$3,9 \cdot 10^5$	$32,8 \cdot 10^6$	–
CO	CO ₂	$2,8 \cdot 10^5$	$10,1 \cdot 10^6$	$12,6 \cdot 10^6$
P	P ₂ O ₅	$15,1 \cdot 10^5$	$24,3 \cdot 10^6$	–
S	SO ₂	$3,0 \cdot 10^5$	$9,3 \cdot 10^6$	–
Si	SiO ₂	$8,6 \cdot 10^5$	$30,6 \cdot 10^6$	–
Mn	MnO	$3,9 \cdot 10^5$	$7,0 \cdot 10^6$	–
Ti	TiO ₂	$9,4 \cdot 10^5$	$19,7 \cdot 10^6$	–
Al	Al ₂ O ₃	$16,7 \cdot 10^5$	$31,0 \cdot 10^6$	–
Mg	MgO	$6,0 \cdot 10^5$	$24,8 \cdot 10^6$	–
Ca	CaO	$6,4 \cdot 10^5$	$11,3 \cdot 10^6$	–
H	H ₂ O	$2,9 \cdot 10^5$	$142 \cdot 10^6$	$12,8 \cdot 10^6$
H	(HF)	$2,7 \cdot 10^5$	268	$24,1 \cdot 10^6$
H	(Cl)	$0,9 \cdot 10^5$	$91 \cdot 10^6$	$8,2 \cdot 10^6$

4.1 Werkstoffprüfung

Härteprüfung nach Brinell
DIN EN ISO 6506/05

Kurzzeichen HBW
(W = Hartmetallkugel)

Eindringkörper aus gehärtetem Stahl sind nicht mehr zulässig. (Bezeichnung HBS)

$$HBW = \frac{0,204F}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$

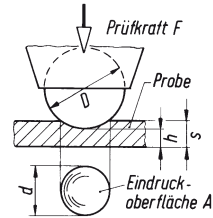
HB	F	D, d
1	N	mm

350 HBW 10/3000: Brinellhärtewert von 350 mit Kugel von 10 mm Ø, einer Prüfkraft $F = 29,420$ kN bei **genormter Einwirkdauer** von 10...15 s gemessen (deshalb keine Angabe).

Prüfkraft F errechnet sich aus dem sog. kgf-Wert (hier 3000). Er gibt die Masse m an, deren Gewichtskraft als Prüfkraft wirkt

$F = \text{Beanspruchungsgrad} \times D^2 / 0,102$ in N

120 HBW 5/250/30: Brinellhärte von 120 mit Kugel von 5 mm Ø, einer Prüfkraft $F = 2452$ N bei einer **längeren Einwirkdauer** von 30 s gemessen.



Prüfkraften und Prüfbedingungen

Kurzzeichen	Kugel-Ø D	B.-G. ¹⁾	Prüfkraft F in N	Kurzzeichen	Kugel-Ø D	B.-G. ¹⁾	Prüfkraft F in N
HBW 10/3 000	10 mm	30	29420	HBW 2,5/187,5	2,5 mm	30	1839
HBW 10/1 500		15	14710	HBW 2,5/62,5		10	612,9
HBW 10/1 000		10	9807	HBW 2,5/31,25		5	306,5
HBW 10/500		5	4903	HBW 2,5/15,625		2,5	153,2
HBW 10/250		2,5	2452	HBW 2,5/6,25		1	61,29
HBW 10/100		1	980,7	¹⁾ Beanspruchungsgrad in MPa			
HBW 5/750	5 mm	30	7355	HBW 1/30	1 mm	30	294,2
HBW 5/250		10	2452	HBW 1/10		10	98,07
HBW 5/125		5	1226	HBW 1/5		5	49,03
HBW 5/62,5		2,5	612,9	HBW 1/2,5		2,5	24,52
HBW 5/25		1	245,2	HBW 1/1		1	9,807

Mindestdicke s_{min} der Proben in Abhängigkeit

vom mittleren Eindruck-Ø d (mm):

$s_{min} = 8 h$

mit Eindringtiefe h

$h = 0,5 (D - \sqrt{D^2 - d^2})$

Beanspruchungsgrad (werkstoff- und härteabhängig) = $0,102 \times F / D^2$ (→ Übersicht).

Übersicht: Werkstoffe und Beanspruchungsgrad

Eindruck Ø d	Mindestdicke s der Proben für Kugel-Ø D in mm:				
	D = 1	2	2,5	5	10
0,2	0,08				
1		1,07	0,83		
1,5			2,0	0,92	
2				1,67	
2,4				2,4	1,17
3				4,0	1,84
3,6					2,68
4					3,34
5					5,36
6					8,00

Werkstoffe	Brinell-Bereich HBW	Beanspruchungsgrad MPa
Stahl, Ni, Ti		30
Gusseisen ¹⁾	< 140	10
	> 140	30
Cu und Legierungen	35...200	10
	< 200	30
	< 35	2,5
Leichtmetalle	< 35	2,5
	35 ... 80	5/ 10/ 15
	> 80	10/15
Pb, Sn		1
Sintermetalle ISO 4498/05		
¹⁾ Nur mit Kugel 2,5; 5 oder 10 mm Ø.		

Der Kugel-Ø D soll so groß wie möglich gewählt werden. Danach muss nach der Härteprüfung mit Hilfe der linken Tafel festgestellt werden, ob für den ermittelten Eindruck-Ø d die Mindestdicke kleiner ist als die Probendicke. Andernfalls ist die nächst kleinere Kugel zu verwenden.

Werkstofftechnik

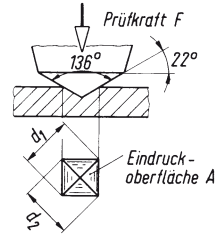
Werkstoffprüfung

Härteprüfung nach Vickers DIN EN ISO 6507/05

$$HV = \frac{0,189F}{d^2}$$

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

HV	F	d
1	N	mm



Kurzzeichen HV

640 HV 30: Vickershärte von 640 mit $F = 294 \text{ N}$ bei 10...15 s Einwirkdauer gemessen.
 180 HV 50/30: Vickershärte von 180 mit $F = 490 \text{ N}$ bei 30 s Einwirkdauer gemessen.

Kleinkraftbereich:

Für kleine Proben oder dünne Schichten mit kleineren Kräften zwischen 1,96 und 49 N.

Mikrohärteprüfung:

Für einzelnen Kristalle mit Kräften von 0,1 bis 1,96 N auf besonderen Geräten.

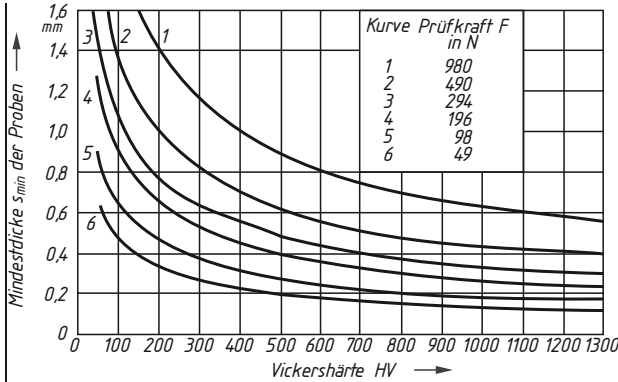


Diagramm: Mindestdicke in Abhängigkeit von Härte und Prüfkraft

Ablesebeispiel: Probe mit einer zu erwartenden Härte von 300 HV und 1 mm Dicke.

Der Schnittpunkt beider Koordinaten im Diagramm liegt oberhalb der Kurve 2, also ist eine Prüfkraft von $F = 490 \text{ N}$ geeignet, sie würde in einem weicherem Werkstoff mit der Probendicke $s = 1 \text{ mm}$ bis herunter zu einer Vickershärte von 200 HV noch zulässig sein.

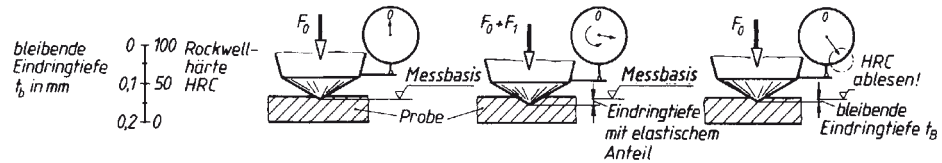
Härteprüfung nach Rockwell DIN EN ISO 6508/05

$$\frac{HRC}{HRA} = 100 - 500 t_b$$

HRC	t_b
1	mm

$$HRN = 100 - 1000 t_b$$

HRN	t_b
1	mm



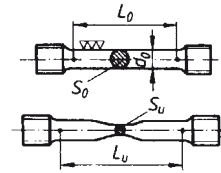
Prüfverfahren mit Diamantkegel

Kurzzeichen	HRC	HRA	HR 15 N	HR 30 N	HR 45 N
Prüfvorkraft F_0	98	98	29,4	29,4	29,4
Prüfkraft F_1	1373	490	117,6	265,0	412,0
Prüfgesamtkraft F	1471	588	147,0	294,0	441,0
Messbereich	20...70 HRC	60...88 HRA	68...92 HR 15 N	39...84 HR 45 N	17...75 HR 45 N
Härteskala	0,2 mm	0,2 mm	0,1 mm		
Werkstoffe	Stahl gehärtet, angelassen	Wolframcarbid, Bleche $\geq 0,4 \text{ mm}$	Dünne Proben $\geq 0,15 \text{ mm}$, kleine Prüfflächen, dünne Oberflächenschichten		

Die Probendicke soll mindestens das 10-fache der bleibenden Eindringtiefe t_b betragen.

Zugversuch
DIN EN 10 002/01

Mit Zugproben (DIN 50 125)
 $L_0 = 5 d_0$
 $L_0 = 5,65 \sqrt{S_0}$



Hooke'sches Gesetz

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta L}{L_0} E = \frac{F}{S_0}$$

σ, E	ε	$\Delta L, L_0$	F	S_0
$\frac{N}{mm^2}$	1	mm	N	mm^2

Zugfestigkeit R_m

$$R_m = \frac{F_{max}}{S_0}$$

$R_m, R_e, R_{p0,2}$	A_5, A_{10}, Z	F	L	S_0	ε
$\frac{N}{mm^2}$	%	N	mm^2	mm^2	1

Streckgrenze R_e

$$R_e = \frac{F_{0,2}}{S_0}$$

0,2-Dehngrenze $R_{p0,2}$

$$R_{p0,2} = \frac{F_{0,2}}{S_0}$$

Bruchdehnung A

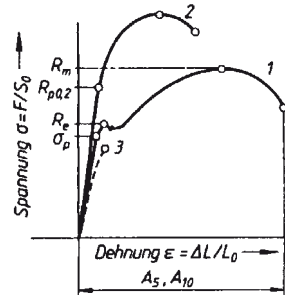
$$A = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100 \%$$

Brucheinschnürung Z

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} \cdot 100 \%$$

Elastizitätsmodul E

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{el}}$$



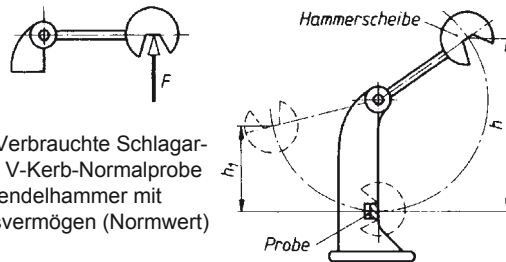
Spannung-Dehnung-Diagramme
 1 weicher Stahl
 2 legierter Stahl
 3 Gusseisen

Kerbschlagbiegeversuch (Charpy)

Kerbschlagarbeit
 $KV (KU) = F(h - h_1)$

KV, KU	F	H, h_1
J	N	m

DIN EN 10045/91
DIN 50115/91



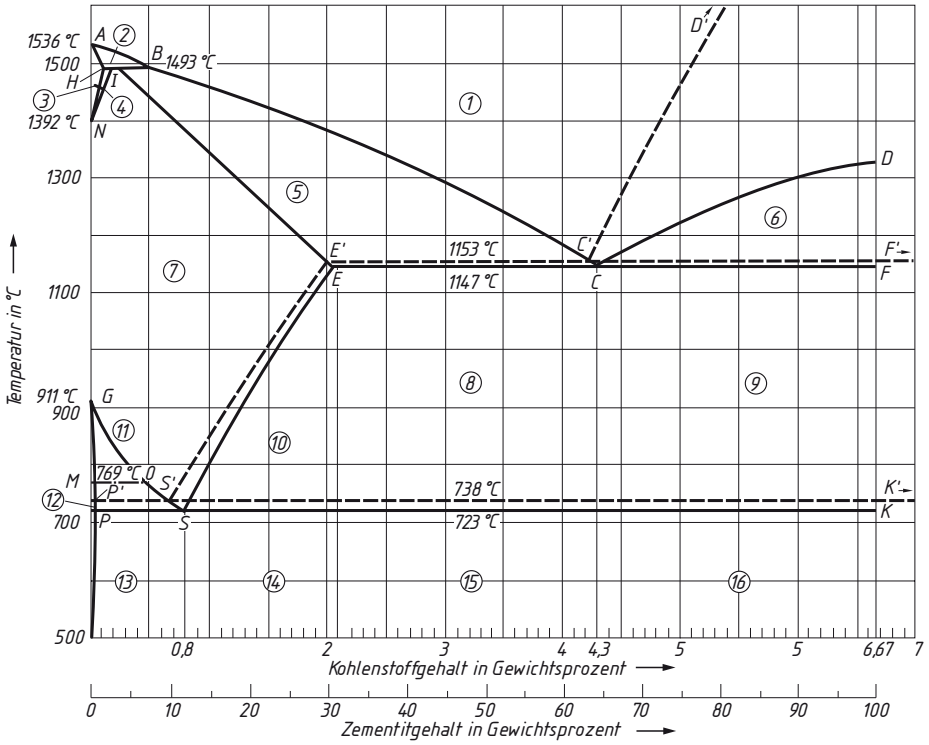
Kurzzeichen

KV = 100 J: Verbrauchte Schlagarbeit 100 J an V-Kerb-Normalprobe und einem Pendelhammer mit 300 J Arbeitsvermögen (Normwert) ermittelt,
 KU 100 = 65 J: Verbrauchte Schlagarbeit 65 J an U-Kerb-Normalprobe mit Pendelhammer von 100 J Arbeitsvermögen ermittelt

Werkstofftechnik

Eisen-Kohlenstoff-Diagramm

4.2 Eisen-Kohlenstoff-Diagramm



Phasenanteile der Legierungen in den Zustandsfeldern 1...16

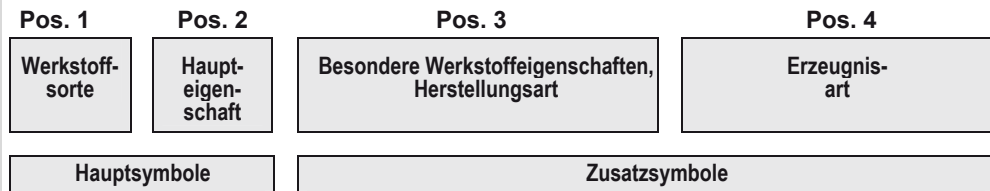
Metastabiles System Fe-Fe ₃ C (ausgezog. Linien)				Stabiles System, Fe-C (gestrichelte Linien)			
1	Schmelze (S)	9	Primär-Zem. + Eu.	1	Schmelze (S)	9	G. + G.-Eutektikum
2	S. + δ-Mk.	10	γ-Mk. + Sek.-Zem.	2	S. + δ-Mk.	10	γ-Mk. + sek. Graphit.
3	δ-Mischkristalle	11	γ-Mk. + α-Mk.	3	δ-Mischkristalle	11	γ-Mk. + α-Mk.
4	δ-Mk. + γ-Mk.	12	α-Mk. (Ferrit)	4	δ-Mk. + γ-Mk.	12	α-Mk. (Ferrit)
5	S. + γ-Mk.	13	Ferrit + Perlit	5	Schmelze + γ-Mk	13	α-Mk. + Graphit
6	S. + Primärzementit	14	Sek-Zem. + Perlit	6	Schmelze + Graphit	14	
7	γ-Mk (Austenit)	15	Perlit + Eu.	7	γ-Mischkristalle	15	
8	γ-Mk + Eutektikum (Ledeburit).	16	Prim. Zementit + Eutektikum.	8	γ-Mk. + Graphiteutektikum	16	

Haltepunkte, Kurzzeichen und Bedeutung

Ar₃	Haltepunkt A ₃ bei Abkühlung, Beginn der Ferritausscheidung (Linie GSK)	Ac₃	Haltepunkt A ₃ bei Erwärmung, Ende der Austenitbildung (α - γ -Umwandlung)
Ar₁	Austenitfall und Perlitbildung beim Abkühlen	Ac₁	Umwandlung des Perlit zu Austenit beim Erwärmen
Ar_{cm}	Beginn der Zementit-Ausscheidung beim Abkühlen (Linie ES)	Ac_{cm}	Ende der Zementit-Einformung beim Erwärmen

4.3 Bezeichnung der Stähle nach DIN EN 10027

Teil 1: Bezeichnungssystem für Stähle. Die Bezeichnung eines Stahles mit Kurznamen wird durch Symbole auf 4 Positionen gebildet.



1 Verwendungsbereich (G=Stahlguss) ¹⁾	2 Mech. Eigenschaften	3a Herstellungsart, zusätzliche mechanische Eigenschaften	3b Eignung für bestimmte Einsatzbereiche bzw. Verfahren	4	
G S Stahlbau z. B. Stähle nach DIN EN 10025-2 -3 -4 -5 -6	Mindeststreckgrenze R_e, min f. d. kleinsten Erzeugnisbereich	Kerbschlagarbeit KV		C Bes. Kaltformbarkeit D F.Schmelztauchüberz E Für Emaillierung F Zum Schmieden H Für Hohlprofile L F. tiefe Temperaturen M Thermomech. gew. N Normalis. gewalzt P Für Spundwände Q Zum Vergüten S Schiffbau T Für Rohre W Wetterfest	
		A_v (J)			27 40 60
		Symbol			J K L
		Schlagtemperatur in °C			
		Te mp.	RT 0 -20 -30 -40 -50		
		Sy mb.	R 0 2 3 4 5		
G P Druckbehälter	R_e, min f. d. kleinsten Erzeugnisbereich	B Gasflaschen M Thermomechanisch, normalisierend gewalzt. N Vergütet S Einfache Druckbehälter T Rohre G Andere Merkmale (evtl. mit 1 oder 2 Folgeziffern)	H Hochtemperatur L Tieftemperatur R Raumtemperatur X Hoch- u. Tieftemp.	Tab. A B C	
E Maschinenbau	wie oben	G Andere Merkmale, evtl. mit 1 oder 2 Folgeziffern	C Eignung zum Kaltziehen	Tab. B	
z. B. Stähle DIN EN 10025-2					

¹⁾ G wahlweise vorgestellt

Werkstofftechnik

Bezeichnung der Stähle nach DIN EN 10027

1 Verwendungsbereich (G = Stahlguss) ¹⁾		2 Mech. Eigenschaften		3a Herstellungsart, zusätzliche mechanische Eigenschaften			3b Eignung für bestimmte Einsatzbereiche/ Verfahren		4	
R	Stähle für Schienen	nnn = Mindesthärte HBW	Cr Mn an	Cr-legiert Mn- Gehalt hoch Chem. Symbole für andere Elemente + 10-facher Gehalt	P T X Y	HT LHT Q	Wärmebehandelt Niedrig legiert, wärmebehandelt: Vergütet	D	Für Schmelztauchüberzüge	Tab. C
	oder in Form von Schienen									

Pos. 1		2			3					
D	Flacherzeugnisse	Cnn Dnn	Kaltgewalzt Warmgewalzt, für unmittelbare Kaltumformung	Xnn	Walzart (kalt/warm) nicht vorgeschrieben	nn	Kennzahl nach Norm	D EK ED H T G	Für Schmelztauchüberzüge Für konv. Emaillierung Für Direktemaillierung Für Hohlprofile Für Rohre Andere Merkmale	Tab. B C

Pos. 1		2			3			
G C	Unlegierte Stähle	nn	Kennzahl = 100-facher C-Gehalt	C D E R	Zum Kaltumformen Zum Drahtziehen Vorgeschriebener max. S-Gehalt, Vorgeschriebener S – Bereich (%)	S U W G	Für Federn Für Werkzeuge Für Schweißdraht Andere Merkmale	Tab. B

Pos.1		2		2a		3	4	
G	Niedriglegierte Stähle Σ LE < 5%, z. B. Einsatzstähle DIN EN 10084, Unlegierte Stähle mit ≥ 1 % Mn, z. B. Automatenstähle DIN EN 10087	nn	Kennzahl = 100-facher C-Gehalt	10 4	LE-Symbole nach fallenden Gehalten geordnet, danach <i>Kennzahlen</i> mit Bindestrich getrennt in gleicher Folge LE-Symbole nach fallenden Gehalten geordnet, danach die %-Gehalte der Haupt - LE- mit Bindestrich in gleicher Folge	Al, Be, Cu, Mo, Nb, Pb, Ta, Ti, V, Zr. Cr, Co, Mn, Ni, Si, W	—	Tab. A, B
G X	Hochlegierte Stähle mit Σ LE > 5%	nn	Kennzahl = 100-facher C-Gehalt	10 4	LE-Symbole nach fallenden Gehalten geordnet, danach die %-Gehalte der Haupt - LE- mit Bindestrich in gleicher Folge		—	Tab. A, B
HS	Schnellarbeitsstähle	nn	Prozentualer Gehalt der LE in der Folge W-Mo-V-Co (mit Bindestrich)				—	Tab. B

¹⁾ G wahlweise vorgestellt

Zusatzsymbole für Stahlerzeugnisse (Pos. 4)

Tabelle A: für besondere Anforderungen an das Erzeugnis

+C	Grobkornstahl	+H	Mit besonderer Härtebarkeit
+F	Feinkornstahl	+Z15/25/35	Mindestbrucheinschnürung, Z (senkr. z. Oberfläche) in %

Tabelle B: für den Behandlungszustand

+A	Weichgeglüht	+I	Isothermisch behandelt	+QT	Vergütet
+AC	Auf kugelige Carbide geglüht			+QW	Wassergehärtet
+AR	Wie gewalzt (ohne besondere Bedingungen)	+LC	Leicht kalt nachgezogen bzw. gewalzt	+S	Behandelt auf Kaltscherbarkeit
+AT	Lösungsgeglüht	+M	Thermomech. behandelt	+SR	Spannungsarmgeglüht
+C	Kaltverfestigt	+N	Normalgeglüht	+S	Rekristallisationsgeglüht
+Cnnn	Kaltverfestigt auf mindestens $R_m = nnn$ MPa	+NT	Ausscheidungsgehärtet	+T	Angelassen
+CPnnn	Kaltverfestigt auf mindestens $R_{p0,2} = nnn$ MPa	+NT	Normalgeglüht + angelassen	+TH	Behandelt auf Härte-spanne
+CR	Kaltgewalzt	+Q	Abgeschreckt	+U	Unbehandelt
+DC	Lieferzust. d. Hersteller überlassen	+QA	Luftgehärtet	+WW	Warmverfestigt
+HC	Warm-kalt-geformt	+QO	Ölgehärtet		

Tabelle C: für die Art des Überzuges

+A	Feueraluminier	+IC	Anorganische Beschichtung	+Z	Feuerverzinkt
+AR	Al-walzplattiert	+OC	Organische Beschichtung	+ZA	ZnAl-Legierung (> 50 % Zn)
+AS	Al-Si-Legierung	+S	Feuerverzint	+ZE	Elektrolytisch verzinkt
+AZ	AlZn-Legierung (> 50 % Al)	+SE	Elektrolytische verzint	+ZF	Diffusionsgeglühte Zn-Überzüge (galvanealed)
+CE	Elektrolytisch spezial-verchromt	+T	Schmelztauchveredelt mit PbSn	+ZN	ZnNi-Überzug (elektrolytisch)
+CU	Cu-Überzug	+TE	Elektrolytisch mit PbSn überzogen		

4.4 Baustähle DIN EN 10025-2/05

Stahlsorte Kurzzeichen	Werkstoff Nr.	R_{eH} bzw. $R_{p0,2}$ Nennicken (mm)			R_m MPa	A_{80} ¹⁾ A % Nennicken (mm)		Bemerkungen
		≤ 16	≤ 100	≤ 200	≤ 100	≤1...<3	≤3...<40	
Stahlsorten mit Angaben der Kerbschlagarbeit KV (→ Tabelle zu 4.3 Stahlbau)								
S235JR	1.0038					l: 17...21	l: 26	Niet- und Schweißkonstruktionen im Stahlbau, Flansche, Armaturen schmelzsweißgeeignet
S235J0	1.0114	235	215	175	360...510	t: 15...19	t: 24	
S235J2	1.0117							
S275JR	1.0044					l: 14...18	l: 22	Für höhere Beanspruchung im Stahl- und Fahrzeugbau, Kräne und Maschinengestelle schmelzsweißgeeignet
S275J0	1.0143	275	235	215	410...560	t: 12...20	t: 20	
S275J2G4	1.0145							
S355JR	1.0045					l: 14...18	l: 22	wie bei S275 schmelzsweißgeeignet
S355J0	1.0153	355	315	285	490...630	t: 12...16	t: 20	
S355J2	1.0577							
S355K2	1.0596							
S450J0	1.0590	450	380	---	550...720			Nur für Langerzeugnisse
Stahlsorten ohne Werte für die Kerbschlagarbeit KV								
S185	1.0035	185	175	155	290...510	t: 10...14	l: 18 / t: 16	Bauschlosserei, Achsen, Wellen, Zahnräder, Kurbeln, Buchsen, Passfedern, Keile; Stifte. Die Sorten sind pressschweißgeeignet
E295	1.0050	295	255	235	470...610	l: 12...16	l: 20 / t: 18	
E335	1.0060	335	295	265	570...710	l: 8...12	l: 16 / t: 14	
E360	1.0070	360	325	295	670...830	l: 3...7	l: 11 / t: 10	

¹⁾ Bruchdehnungswerte an Längsproben (l) und Querproben (t) gemessen;

Werkstofftechnik

Vergütungsstähle DIN EN 10083/06

4.5 Schweißgeeignete Feinkornbaustähle

DIN EN	Beschreibung	Sorten
10025-3/05 (10113-2 Z)	Warmgewalzte Erzeugnisse aus schweißgeeigneten Feinkornbaustählen	Normalgeglühte/ normalisierend gewalzte Sorten in 4 Stufen, kaltzähe Sorten (Symbol NL)
10025-4/05 (10113-3 Z)		Thermomechanisch gewalzte Sorten in 4 Stufen, kaltzähe Sorten (Symbol ML)
10025-6/05 (10137 Z)	Flacherzeugnisse aus Baustählen mit höherer Streckgrenze im vergüteten Zustand	Vergütet, in 5 Stufen (z. B. für Stahlkonstruktionen im Kranbau und für Schwerlastfahrzeuge); zu jeder 2 kaltzähe Sorten (QL, QL1)

4.6 Warmgewalzte Flacherzeugnisse aus Stählen mit hoher Streckgrenze zum Kaltumformen, thermomechanisch gewalzte Stähle DIN EN 10149-2/95

Kurzname ¹⁾	SEW 092	Werkstoff-Nr.	R _m MPa	A % für t ≥ 3 mm	Faltversuch, 180° Dorn-Ø mm	Biegeradien für Dicke t	
						3...6	> 6 mm
S315MC	QStE 300 TM	1.0972	390...510	24	0 t	0,5 t	1,0 t
S355MC	QStE 360 TM	1.0976	430...550	23	0,5t		
S420MC	QStE 420 TM	1.0980	480...620	19		1,0 t	1,5 t
S460MC	QStE 460 TM	1.0982	520...670	17	1 t		
S500MC	QStE 500 TM	1.0984	550...700	14			
S550MC	QStE 550 TM	1.0986	600...760	14	1,5 t	1,5 t	2,0 t
S600MC	QStE 600 TM	1.0988	650...820	13			
S650MC	QStE 650 TM	1.0989	700...880	12	2 t	2,0 t	2,5 t
S700MC	QStE 700 TM	1.0966	750...950	12			

¹⁾ Kurzname enthält die obere Streckgrenze in MPa, Bruchdehnung A an Längs-, Kaltversuch an Querproben.

4.7 Vergütungsstähle DIN EN 10083/06

Stahlsorte		Durchmesserbereich d ≤ 16 mm				16 ≤ d ≤ 40 mm				
Kurzname	Stoff-Nr.	R _e	R _m	A	Z	R _e	R _m	A	Z	KV
		MPa		%	%	MPa		%	%	J
C22E ¹⁾	1.1151	340	500...650	20	50	290	470...620	22	50	50
C35E ¹⁾	1.1181	430	630...780	17	40	380	600...750	19	45	35
C40E ¹⁾	1.1186	460	650...800	16	35	400	630...780	18	40	30
C45E ¹⁾	1.1191	490	700...850	14	35	430	650...800	16	40	25
C50E ²⁾	1.1206	520	750...900	13	30	460	700...850	15	35	--
C55E ¹⁾	1.1203	550	800...950	12	30	490	750...900	14	35	--
C60E ¹⁾	1.1221	580	850...1000	11	25	520	800...950	13	30	--
28Mn6	1.1170	590	800...950	13	40	490	700...850	15	45	40
38Cr2	1.7003	550	800...950	14	35	450	700...850	15	40	35
46Cr2	1.7006	650	900...1100	12	35	550	800...950	14	40	35
34Cr4 ²⁾	1.7033	700	950...1150	12	35	590	800...950	14	40	35
37Cr4 ²⁾	1.7034	750	950...1200	11	35	630	850...1000	13	40	50
41Cr4 ²⁾	1.7035	800	1000...1200	11	30	6 60	900...1100	12	35	35
25CrMo4 ²⁾	1.7218	700	900...1100	12	50	600	800 950	14	55	50
34CrMo4 ²⁾	1.7220	800	1000...1200	11	45	650	900...1100	12	50	40
42CrMo4 ²⁾	1.7225	900	1100...1300	10	40	750	1000...1200	11	45	35
50CrMo4	1.7228	900	1100...1300	9	40	780	1000...1200	10	45	30
34CrNiMo6	1.6582	1000	1200...1400	9	40	900	1100...1300	10	45	45
30CrNiMo8	1.6580	1050	1250...1450	9	40	1050	1250...1450	9	40	30
35NiCr6	1.5815	740	880...1080	12	40	740	880...1080	14	40	35
36NiCrMo16	1.6773	1050	1250...1450	9	40	1050	1250...1450	9	40	30
39NiCrMo3	1.6510	785	980...1180	11	40	735	930...1130	11	40	35
30NiCrMo16-6	1.6747	880	1080...1230	10	45	880	1080...1230	10	45	35
51CrV4	1.8159	900	1100...1300	9	40	800	1000...1200	10	45	35

¹⁾ Zu diesen Sorten gibt es je einen Qualitätsstahl (z. B. C35) und eine Variante mit verbesserter Spanbarkeit (z. B. C35R)

²⁾ Zu diesen Sorten gibt es eine Variante mit verbesserter Spanbarkeit (unlegiert C50R, legiert z. B. 34CrS4) erreicht durch leicht erhöhte S-Gehalte von 0,02...0,04 % Teil 2 enthält 6 Sorten mit Bor-Gehalten von 0,0008...0,005 %.

4.8 Einsatzstähle DIN EN 10084/98

Stahlsorte	Werkstoffnummer	HB geglüht	Stirnabschreckversuch, Härte HRC für einen Stirnabstand in mm				Anwendungsbeispiele
			1,5	5	11	25	
C10E+H	1.1121	131					Kleine Teile mit niedriger Kernfestigkeit: Bolzen Zapfen, Buchsen, Hebel w. o. mit höherer Kernfestigkeit } Zahnräder und Wellen im Fahrzeug- und Getriebebau Zum Direkthärten geeignet Für größere Querschnitte Getriebeteile höchster Zähigkeit } hochbeanspruchte Getriebeteile, Wellen, Zahnräder
C15E+H	1.1141	143					
17Cr3+H	1.7016	174	39				
16MnCr5+H	1.7131	207	39	31	21		
20MnCr5+H	1.7147	217	41	36	28	21	
20MoCr4+H	1.7321	207	41	31	22		
22CrMoS3-5+H	1.7333	217	42	37	28	22	
20NiCrMo2-2+H	1.6523	212	41	31	20		
17CrNi6-6+H	1.5919	229	39	36	30	22	
18CrNiMo7-6+H	1.6587	229	40	39	36	31	

4.9 Nitrierstähle DIN EN 10085/01

Stahlsorte Kurzname	Werkstoff-Nr.	Eigenschaften vergütet					Eigenschaften, Anwendungsbeispiele
		Ø-Bereich in mm	R _{p0,2} MPa	A %	KV J	HV1	
31CrMo12	1.8215	...40	850	10			Warmfest, für Teile von Kunststoffmaschinen. Ionierte Zahnräder mit hoher Dauerfestigkeit. Größere Nitrierhärte tiefe, warmfest. Druckgießformen für Al-Legierungen Für große Querschnitte
		41...100	800	11	35	800	
31CrMoV9	1.8519	...80	800	11	35	800	
		81...150	750	13	35		
15CrMoV6-9	1.8521	...100	750	10	30	800	
		101...250	700	12	35		
34CrAlMo5	1.8507	...70	600	14	35	950	
35CrAlNi7	1.8550	70...250	600	15	30	950	

4.10 Stahlguss DIN EN 10293/05

Stahlsorte		Stoff-Nr.	Dicke mm	R _{m,min} MPa	R _{p0,2} MPa	A %	KV in J		Anwendungsbeispiele
Kurzname	Zustand						bei RT	bei / ° C	
GE200	+N	1.0420	≤ 300	380...530	200	25	27	--	Kompressorengehäuse
GE240	+N	1.0446	≤ 300	450...600	230	22	27	--	Konvertertragring
GE300	+N	1.0558	≤ 100	520...670	300	18	31	--	Großzahnräder
G17Mn5	+QT	1.1131	≤ 50	450...600	240	24	70	27 / -40	Tunnelabdeckung (U-Bahn)
G20Mn5	+N	1.1120	≤ 30	480...620	300	20	60	27 / -40	Fachwerkknoten (2,3 t)
G30CrMoV6-4	+QT	1.7725	≤ 100	850...1000	700	14	45	27 / -40	Achsschenkel (400 kg)
G9Ni14	+QT	1.5638	≤ 35	500...650	360	20	--	27 / -90	Kaltzäh, Kälteanlagen

4.11 Bezeichnung der Gusseisensorten DIN EN 1560/97

Kurzzeichen werden aus max. 6 Positionen gebildet: Pos. 1. **EN** für Europäische Norm, Pos. 2. **GJ** für Gusseisen, J steht für I (iron), um Verwechslungen zu vermeiden.

EN	GJ	3.	4.	5.	6.
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Pos. 3 Zeichen für Graphitform (wahlfrei)

Pos. 4 Zeichen für Mikro- oder Makrogefüge (wahlfrei)

L	lamellar	A	Austenit	Q	Abschreckgefüge
S	kugelig	F	Ferrit	T	Vergütungsgefüge
V	vermicular	P	Perlit	B	nichtentkohlend geglüht
H	graphitfrei, (ledeburitisch)	M	Martensit	W	entkohlend geglüht
M	Temperkohle	L	Ledeburit	N	graphitfrei

Werkstofftechnik

Gusseisen mit Lamellengraphit GJL DIN EN 1561/97

Pos. 5. Angabe der mechanischen Eigenschaften (obligatorisch)

Sorte	Eigenschaft (Festigkeiten in MPa)
GJL-	Mindestzugfestigkeit oder Härte HB, HV .
GJMB-	
GJMW-	
GJS-	zusätzlich für die Temperatur bei Messung der Kerbschlagarbeit: -RT (bei Raum-, -LT (bei Tieftemperatur).

Pos. 6 Zeichnen für zusätzliche Anforderungen (wahlfrei)

D	Rohgussstück
H	Wärmebehandeltes Gussstück
W	Schweißneigung für Verbindungsschweißungen
Z	zusätzliche Anforderungen nach Bestellung

oder der chemischen Zusammensetzung.

Alle anderen Sorten	Bezeichnung wie bei den legierten Stählen mit C-Kennzahl, Symbole der LE, Multiplikatoren mit Bindestrich (4.3 Teil 1, Legierte Stähle.) Hochlegierte Sorten mit X (wahre Prozente)
---------------------	---

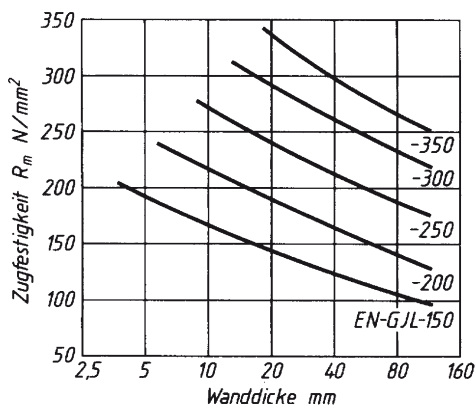
4.12 Gusseisen mit Lamellengraphit GJL DIN EN 1561/97

Mechanische Eigenschaften in getrennt gegossenen Proben von 30 mm Rohdurchmesser

Eigenschaft	Formelzeichen	Einheit	Sorte EN -GJL-				
			-150	-200	-250	-300	-350
Zugfestigkeit	R_m	MPa	150...250	200...300	250...350	350...400	350...450
0,1 %-Dehngrenze	$R_{p0,2}$	MPa	98...165	130...195	165...228	195...260	228...285
Bruchdehnung	A	%	0,8...0,3	0,8...0,3	0,8...0,3	0,8...0,3	0,8...0,3
Druckfestigkeit	σ_{dB}	MPa	600	720	840	960	1080
Biegefestigkeit	σ_{bB}	MPa	250	290	340	390	490
Torsionsfestigkeit	τ_{tB}	MPa	170	230	290	345	400
Biegewechselfestigkeit	σ_{bW}	MPa	70	90	120	140	145

Weitere 6 Sorten werden nach der Brinellhärte benannt (gemessen im Wanddickenbereich 40...80 mm): EN GJL-HB155 / 175 / 195 / 215 / 235 / 255.

Schaubild zur Abschätzung von Zugfestigkeit und Brinellhärte in Gussstücken



4.13 Gusseisen mit Kugelgraphit GJS DIN 1563/05

Kurzname EN-GJS-	$R_{p0,2}$ MPa	$\tau_a = \tau_t$ MPa	K_{Ic} in ³⁾ MPa \sqrt{m}	σ_d MPa	σ_{bB} ⁴⁾ MPa	σ_{bB} ⁵⁾ MPa	Gefüge	Anwendungsbeispiele
-350-22 ¹⁾	220	315	31		180	114	Ferrit	
-400-18 ²⁾	250	360	30	700	195	122	Ferrit	Windenergieanlagen
-400-15	250	360	30	700	200	124	Ferrit	Pressholm für 6000 t-Pressen, 47 t
-450-10	310	405	23	700	210	128	Ferrit	Pressenständer (165 t)
-500-7	320	450	25	800	224	134	Ferrit/Perlit	Zylinder für Diesel-Ramme, 1,7 t
-600-3	380	540	20	870	248	149	Ferrit/Perlit	Kolben (Großdieselmotor)
-700-2	440	630	15	1000	280	168	Perlit	Planetenträger, Kurbelwelle VR5,
-800-2	500	720	14	1150	304	182	Perlit/Bainit	
-900-2	600	810	14	----	317	190	Martensit, wärmebehandelt	

¹⁾ Hierzu gibt es je eine Sorte mit gewährleistetester Kerbschlagarbeit bei RT (-RT angehängt) mit 17 J bei +23 °C oder tiefen Temperaturen (-LT) mit 12 J bei -40 °C; ²⁾ Hierzu gibt es je eine Sorte mit gewährleistetester Kerbschlagarbeit bei RT (-RT) mit 14 J bei +23 °C oder tiefen Temperaturen (-LT) mit 12 J bei -20 °C; ³⁾ Bruchzähigkeit; ⁴⁾ Umlaufbiegeversuch, ungekerbte Probe; ⁵⁾ Umlaufbiegeversuch, gekerbte Probe; Werte gelten für getrennt gegossene Probestücke.

4.14 Temperguss GJM DIN EN 1562/06

Kurznamen		$R_{p0,2}$ MPa	HB 30 →	Anwendungsbeispiele (Härte HBW nur Anhaltswerte)
DIN EN 1562	DIN 1692(Z)			

EN-GJMW- Entkohlend geglühter (weißer) Temperguss

-350-4	GTW-35-04	--	max. 230	Für normalbeanspruchte Teile, Fittings, Förderkettenglieder, Schlossteile
-360-12	GTW-S38-12	190	max. 200	Schweißgeeignet für Verbunde mit Walzstahl, Teile für Pkw-Fahrwerk, Gerüststreben
-400-5	GTW-40-05	220	max. 220	Standardwerkstoff für dünnwandige Teile, Schraubzwingen, Kanalstreben, Gerüstbau, Rohrverbinder
-450-7	GTW-45-07	260	max. 220	Wärmebehandelt, höhere Zähigkeit, Pkw-Anhängerkupplung, Getriebebeschaltthebel
-550-4	-----	340	max. 250	Hochbeanspruchte Teile für den Gerüst und Schalungsbau

EN-GJMB- Nicht entkohlend geglühter (schwarzer) Temperguss

-300-6	-----	---	max. 150	Anwendung, wenn Druckdichtheit wichtiger als Festigkeit und Duktilität
-350-10	GTS-35-10	200	max. 150	Seilrollen mit Gehäuse, Möbelbeschläge, Schlüssel aller Art, Rohrschellen, Seilklemmen
-450-6	GTS-45-06	270	150...200	Schaltgabeln, Bremsträger
-500-5	-----	300	165...215	
-550-4	GTS-55-04	340	180...230	Kurbelwellen, Kipphebel für Flammhärtung, Federböcke, Lkw-Radnaben
-600-3	-----	390	195...245	
-650-2	GTS-65-02	430	210...260	Druckbeanspruchte kleine Gehäuse, Federauflage für Lkw (oberflächengehärtet)
-700-2	GTS-70-02	530	240... 90	Verschleißbeanspruchte Teile (vergütet) Kardangabelstücke, Pleuel, Verzurrvorrichtung für Lkw
-800-1	-----	600	270...310	Verschleißbeanspruchte kleinere Teile (vergütet)

Mechanische Eigenschaftswerte der Gussorten beziehen sich auf getrennt gegossene Probestücke (12 mm \varnothing) des gleichen Werkstoffes.

Werkstofftechnik

Bezeichnung von Aluminium und Aluminiumlegierungen

4.15 Bainitisches Gusseisen mit Kugelgraphit DIN EN 1564/06

Sorte EN-	Zugfestigkeit R_m MPa	Streckgrenze $R_{p0,2}$ MPa	Bruchdehnung A %	Härte HBW 30
GJS- 800-8	> 800	> 500	8	260...320
GJS-1000-5	>1000	> 700	5	300...360
GJS-1200-2	>1200	> 850	2	340...440
GJS-1400-1	>1400	>1100	1	380...480

4.16 Gusseisen mit Vermiculargraphit GJV VDG-Merkblatt W-50/02

Sorte	Zugfestigkeit R_m MPa	Streckgrenze $R_{p0,2}$ MPa	Bruchdehnung A %	Härte HBW 30
GJV-300	300...375	220..295	1,5	140...210
GJV-350	350..425	260...335	1,5	160...220
GJV 400	400..475	300..375	1,0	180...240
GJV 450	450..525	340..415	1,0	200..250
GJV 500	500..575	380..455	0,5	220..260

4.17 Bezeichnung von Aluminium und Aluminiumlegierungen

Numerisches Bezeichnungssystem nach DIN EN 573-1/05:

Normbezeichnung **EN AW - 4**

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

 Ziffern + Buchstabe für nationale Variante

\updownarrow für Aluminium **A** \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow
 für Halbzeug **W** \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow

3. + 4. sind Zählziffern
2. Ziffer für Legierungsvariante
1. Ziffer für Legierungsreihe (Tafel)

Aluminium-Gusslegierungen wird für Werkstoffnummer und Kurzbezeichnung ein **EN AC-** vorgestellt.

Bezeichnung nach der chemischen Zusammensetzung DIN EN 573-2/94. Das Symbol EN AW- (bzw. AC-) wird dem Kurznamen vorgestellt, der meistens aus der früheren Bezeichnung nach DIN 1725 gebildet wird.

Aluminium-Legierungsreihen nach DIN EN 573-3/03 (Ziffer 1)

Serie	Legierungselemente	Serie	Legierungselemente	Serie	Legierungselemente
1 x x x	Al unlegiert	4 x x x	Al Si + Mg, Bi, Fe, MgCuNi	7 x x x	Al Zn + Mg, Cu, Zr
2 x x x	Al Cu + weitere	5 x x x	Al Mg + Mn, Cr, Zr	8 x x x	Sonstige, Fe, FeSi, FeSiCu
3 x x x	Al Mn + Mg	6 x x x	Al MgSi + Mn, Cu, PbMn		

Bezeichnung der Werkstoffzustände durch Anhängesymbole nach DIN EN 515/93

Symbol	Zustand	Bedeutung der 1. Ziffer		Bedeutung der 2. Ziffer	
F	Herstellungszustand	keine Grenzwerte für mechanische Eigenschaften		_____	
O	Weichgeglüht	1	Hoherhitzz, langsam abgekühlt	_____	
		2	Thermomechanisch behandelt		
		3	Homogenisiert		
H	Kaltverfestigt	1	Kaltverfestigt	2:	1/4-hart, Zust. mittig zw. O u. Hx4
		2	Kaltverf. + rückgeglüht	4:	1/2-hart, " " O u. Hx8
		3	Kaltverf. + stabilisiert	6:	3/4-hart, " " Hx4 u. Hx8
		4	Kaltverf.+ einbrennlackiert	8	Vollhart, härtester Zustand.
				9	Extrahart (≥ 10 MPa über Hx8)

Symbol	Zustand	Bedeutung der 1. Ziffer	
T	Wärmebehandelt auf andere Zustände als F, O oder H	1	Abgeschreckt aus Warmformtemperatur + kaltausgelagert
		2	Abgeschreckt aus Warmformtemperatur, kaltumgeformt + kaltausgelagert
		3	Lösungsgeglüht, kaltumgeformt + kaltausgelagert
		4	Lösungsgeglüht + kaltausgelagert
		5	Abgeschreckt aus Warmformtemperatur + warmausgelagert
		6	Lösungsgeglüht + warmausgelagert
		7	Lösungsgeglüht + überhärtet (warmausgelagert)
		8	Lösungsgeglüht, kaltumgeformt + warmausgelagert
		9	Lösungsgeglüht, warmausgehärtet + kaltumgeformt

} stabile Zustände

4.18 Aluminiumknetlegierungen, Auswahl

Sorte EN AW-		R _m MPa	A %	Beispiele
Stoff-Nr.	Chemische Symbole mit Zustandsbezeichnung (alt)			

Reihe 3000 Mechanische Werte für Blech 0,5 ... 1,5 mm (A₅₀)

3103	Al Mn1-F (W9)	90	19	Dächer, Fassadenbekleidung, Profile, Niete, Kühler, Klimaanlage, Rohre, Fließpressteile
	Al Mn1-H28 (F21)	185	2	
3004	Al Mn1Mg1-O (W16)	155	14	Getränkedosen, Bänder für Verpackung
	Al Mn1Mg1-H28 (F26)	260	2	

Reihe 5000 Mechanische Werte für Blech 3 ... 6 mm (A₅₀)

5005	Al Mg1-O (W10)	100 ... 145	22	Fließpressteile, Metallwaren
5049	Al Mg2Mn0,8-O (W16)	190 ... 240	8	Bleche für Fahrzeug- u. Schiffbau
	-H16 (F26)	265 ... 305	3	
5083	Al Mg4,5Mn0,7-O (W28)	275 ... 350	15	Formen (hartanodisiert), Schmiedeteile, Maschinen-Gestelle, Tank- u. Silofahrzeuge
	-H26 (G35)	360 ... 420	2	

Reihe 2000 aushärtbar Mechanische Werte jeweils für das Beispiel

2117	Al Cu2,5Mg-T4 (F31 ka)	310	12	(Drähte < 14 mm), Niete, Schrauben
2017A	Al Cu4MgSi-T42	390	12	
2024	Al Cu4Mg1-T42	420	8	} Platten, und } Vorrichtungen, Werkzeuge, } Blech < 25 mm } Flugzeuge, Sicherheitsteile
2014	Al Cu4SiMg-T6	420	8	
2007	Al CuMgPb-T4 (F34 ka)	340	7	(Schmiedestücke), Bahnachslagergehäuse Automatenlegierung, Drehteile

Reihe 6000 aushärtbar Mechanische Werte jeweils für das Beispiel

6060	Al MgSi-T4	130	15	Strangpressprofile aller Art, Fließpressteile
6063	Al Mg0,7Si-T6	280	--	Pkw-Räder u. Pkw-Fahrwerkteile
6082	AlMgSi1MgMn-T6	310	6	Schmiedeteile, Sicherheitsteile am Kfz
6012	Al MgSiPb-T6 (F28)	2750	8	Automatenlegierung, Hydr.-Steuerkolben

Reihe 7000 aushärtbar Mechanische Werte für Blech unter 12 mm

7020	Al Zn4,5Mg1 -O	220	12	Cu-frei, nach Schweißen selbstaushärtende Legierung
	-T6	350	10	
7022	Al Zn5Mg3Cu-T6 (F45wa)	450	8	} überaltert (T7) gut beständig } gegen SpRK
7075	Al Zn5,5MgCu-T6 (F53wa)	545	8	

4.19 Aluminiumgusslegierungen, Auswahl aus DIN EN 1706/98

Kurzname Stoff- Nr. EN AC-...	Gießart DIN EN 1706	Gießart, Zustd. ¹⁾	R _m MPa	R _{p0,2} MPa	A _{50mm} %	HB	Gießen/ Schweißen/Polieren/ Beständigk. ²⁾	Bemerkungen
-Al Cu4MgTi -21000	S, K, L	S T4	300	200	5	90	C/D D B D	Einfache Gussstücke hochfest und -zäh, Waggonrahmen und -fahrgestelle
		K T4	320	220	8	90		
		L T4	300	220	5	90		

Werkstofftechnik

Zustandsbezeichnungen nach DIN EN 1173/95

Fortsetzung Aluminium Gusslegierungen

Kurzname, Stoff-Nr. DIN EN 1706 EN AC-...	Gießart	Gießart, Zustd. ¹⁾	R _m	R _{p0,2}	A _{50mm}	HB	Gießen/ Schweißen/Polieren/ Beständigk. ²⁾	Bemerkungen
-Al Si7Mg0,3 -42100-	S K L	S T6 K T6 L T64	230 290 290	190 210 210	2 4 8	75 90 80	B B C B	Sicherheitsbauteile: Hinterachslenker, Vorderradnabe, Bremssättel, Radträger
-Al Si10Mg(a) -43000	S K L	S F K F K T6	150 180 260	80 90 220	2 2,5 1	50 55 90	A A D B	Motorblöcke, Wandler- und Getriebegehäuse, Saugrohr für Kfz
-Al Si12(a) -44200	S K	S, F K F	150 170	70 80	5 6	50 60	A A D B	Dünnwandige, stoßfeste Teile aller Art
-Al Si8Cu3 -46200	S K D	S F K F K F	150 170	90 100	1 1	60 100	B B C D	Warmfest bis 200° C, für dünnwandige Teile
-Al Si12CuNiMg -48000	K	K T5 T6	200 280	185 240	<1 <1	90 100	A A C C	Erhöhte Warmfestigkeit bis zu 200 °C; Zylinderköpfe
-Al Mg3(b) -51000	S K	S F K F	140 150	70 70	3 5	50 50	C/D C A A	Beschlagteile für Bau- und Kfz-Technik, Schiffbau

1) **Gießart:** S: Sandguss; K: Kokillenguss, D: Druckguss, L: Feinguss, das Zeichen wird nachgestellt!
Beispiel: EN 1706 AC-Al Cu4MgTi KT4; oder EN 1706 AC-21000 KT4: Kokillenguss (K), kaltausgehärtet (T4)

2) **Wertung:** A ausgezeichnet, B gut, C annehmbar, D unzureichend.

4.20 Bezeichnung von Kupfer und Kupferlegierungen nach DIN 1412/95

Europäisches Nummernsystem. Die Normangabe besteht aus 6 Zeichen.

C	2.	3.	4.	5.	6.
---	----	----	----	----	----

1. C Zeichen für Kupfer; 3. bis 5. Ziffern sind **Zählziffern**, 0...799 für genormte, 800...999 für nichtgenormte Sorten.

2. Buchstabe für die Erzeugnisform		6. Buchstabe(n) für Legierungssystem			
B	Blockform zum Umschmelzen	A, B	Cu	H	CuNi
G	Gusserzeugnis	C, D	Cu, niedriglegiert, Σ LE < 5 %	J	CuNiZn
F	Schweißzusatz, Hartlote			K	CuSn
M	Vorlegierung	E, F	Legierungen, Σ LE > 5 %	L, M	CuZn Zweistofflegierg.
R	Raffiniertes Cu in Rohform			N, P	CuZnPb
S	Werkstoff in Form von Schrott	G	CuAl	R, S	CuZn Mehrstofflegierg.
W	Knetwerkstoffe				
X	nicht genormte				

4.21 Zustandsbezeichnungen nach DIN EN 1173/95

Anhängesymbole, bestehend aus einem Buchstaben und 3 Ziffern für bestimmte Eigenschaftswerte.

Symbol	Bedeutung	Beispiel	Symbol	Bedeutung
A	Bruchdehnung	A005: A = 5 %	D ¹⁾	gezogen, ohne vorgegebene mech. Eigenschaften
B	Federbiegegrenze	B370: 370 MPa	G	Korngröße
H	Härte HB oder HV	H030 HBW10 30HBW10	M ¹⁾	wie gefertigt, ohne vorgegebene mech. Eigenschaften
R	Zugfestigkeit	R700: 700 MPa		¹⁾ Die Buchstaben D und M werden ohne weitere Bezeichnungen verwendet
Y	0,2%-Dehngrenze	Y350: 350 MPa		

4.22 Kupferknetlegierungen, Auswahl

Kurzzeichen DIN EN-CW	Zustd. 1)	Stoff-Nr. CW..	Werkstoffeigenschaften				Eigenschaften	Verwendung
			$R_{p0,2}$	R_m	A	HB		
CuSn6	R420 Y360	452K	-- 360	420 --	20 20	--	Chemisch beständig, stark kaltverfestigend	Federn, Membranen, Drahtgewebe, -schläuche
CuAl8Fe3	R480	303G	210	480	30	(140)	Noch kaltformbar, warmfest bis 300 °C	Blechkonstruktionen für den chem. Apparatebau
CuZn37	R300	508L	180	300	48	(70)	Gut kaltumform-, löt- und schweißbar	Hauptlegierung für spanlose Verarbeitung
CuZn40	R340	509L	240	340	43	(80)	Warm- und kaltumformbar	Uhrenteile
CuZn39Pb2	R360	612N	270	360	40	(85)	Gut stanz- u. spanbar, nur gering kaltformbar	Formdrehteile
CuZn40Pb2	R430	617N	(200)	430	(15)	--	Gut warm-, kaum kaltumformbar	Strangpressprofile, Schmiedestücke
CuNi10Fe1Mn	R290 R480	352H	290 400	90 480	30 8	-- --	seewasserbeständig	Rohre, Schmiedestücke, Fittings für Offshore-Technik
CuNi12Zn30Pb1	R420	406J		420	20	--	Gut kaltformbar und spanbar	Sicherheitsschlüssel, Drehteile für optische Industrie
CuNi18Zn20	R380 R520	409J	250 430	380 520	37 6	(140) (160)	Sehr gut kaltformbar, anlaufbeständig	Kontaktfedern, Membranen, Brillengestelle

1) Zustandszeichen angehängt z. B.: R420 Mindestzugfestigkeit $R_{m,min}$ = 420 MPa; Y360 Mindeststreckgrenze $R_{p0,2}$ in MPa

4.23 Kupfergusslegierungen, Auswahl nach DIN EN 1982/98

Kurzzeichen DIN-EN- (ältere Normen)	Stoff-Nr. CC...	Gieß- Art 1)	Werkstoffeigenschaften				Eigenschaften	Verwendung
			$R_{p0,2}$	R_m	A	HB		
CuAl10Ni3Fe2-C (G-CuAl9Ni)	332G	GS GM	180 250	500 600	18 20	100 130	Sehr gut schweißgeeignet, chemisch beständig	Gussteile f. Nahrungsmittelmaschinen und chemische Apparate
CuAl10Fe5Ni5-C (G-CuAl10Ni)	333G	GS GZ	250 280	600 650	13 13	140 150	Dauerschwingfest, meerwasserbeständig	Verbunde aus Guss- und Knetlegierungen
CuSn3Zn8Pb5-C (CuSn2ZnPb)	490K	GS GC	85 100	180 220	15 12	60 70	Brauchwasserbeständig	Dünnwandige (<12 mm) Armaturen bis 225 °C
CuSn5Zn5Pb5-C (CuSn5Zn, Rg 5)	491K	GS GC	90 110	200 250	13 13	60 65	Lötbar, meerwasserbeständig	Armaturen für Wasser und Dampf bis 225 °C
CuZn33Pb2-C (G-CuZn33Pb)	750S	GS GZ	70	180	12	45 50	Hohe elektr. Leitfähigkeit, beständig gegen Brauchwasser	Gehäuse für Gas- und Wasserarmaturen
CuZn16Si4-C (G-CuZn15Si4)	761S	GS GM	230 300	400 500	10 8	100 130	Dünnwandig vergießbar, meerwasserbeständig	Beschlagteile, Armaturengehäuse

1) Gießart: (GS-) Sandguss –GS; (GK-) Kokillenguss –GM; (GZ-) Schleuderguss –GZ; (GC-) Strangguss –GC; (GD-) Druckguss –GP (in Klammern veraltete, vorgestellte Bezeichnungen, die neuen werden angehängt).

Werkstofftechnik

Druckgusswerkstoffe

4.24 Anorganisch nichtmetallische Werkstoffe

Werkstoffkennwerte nichtmetallisch anorganischer Stoffe im Vergleich mit Stahl

Sorte Kurzzeichen	Dichte g/cm ³	E-Modul kN/mm ²	Biege- festigkeit MPa	Wärme- ¹⁾ leitung λ W/mK	Wärme- ²⁾ dehnung α 10 ⁻⁶ /K	Maximale Temperatur °C	K_{Ic} ³⁾ MPa \sqrt{m}
Stahl, unleg.	7,85	210	500...700	62	12	200	> 100
Al-Oxid	3...3,9	200...380	200...300	10...16	5...7	1400...1700	4...5
PSZ, ZrO ₂	5...6	140...210	500...1000	1,2...3	9...13	900...1500	8
Al ₂ O ₃	3...3,7	10...30	25...50	1,5...3	5	900...1600	1
SSN	3...3,3	250...330	300...700	15...45	2,5...3,5	1750	5...8,5
RBSN	1,9...2,5	80...180	80...330	4...15	2,1...3	1100	1,8...4
HPSN	2...3,4	290...320	300...600	15...40	3,0...3,4	1400	6...8,5
HIPSN	3,2...3,3	290...325	300...600	25...40	2,5...3,2	1400	6...8,5
GPSN	3,2	300...310	900...1200	20...24	2,7...2,9	1200	8...9
SSiC	3,1	370...450	300...600	40...120	4,0...4,8	1400...1750	3...4,8
SiSiC	3,1	270...350	180...450	110...160	4,3...4,8	1380	3...5
HPSiC	3,2	440...450	500...800	80...145	3,9...4,8	1700	5,3
HiPSiC	3,2	440...450	640	80...145	3,5	1700	5,3
RsiC	2,6...2,8	230...280	200	20	4,8	1600	3
Borcarbid, B ₄ C	2,5	390...440	400	35	5	700...1000	3,4

1) Wärmeleitung λ bei 20 °C; 2) Längenausdehnung α für Keramik 30...1000 °C; 3) K_{Ic} : Spannungs-Intensitätsfaktor (Maß für die Bruchzähigkeit, aus der Bruchmechanik hergeleitet)

4.25 Bezeichnung von Si-Carbid, SiC und Siliciumnitrid, Si₃N₄ nach der Herstellungsart

Sorte SC (Si-Carbid)	Herstellungsart	Sorte SN (Si-Nitrid)	Herstellungsart	Dichte ↓ steigt
RSiC	rekristallisiert, porös bis 15 %	RBSN	reaktionsgebunden, porös	
SSiC	gesintert, „ „ 5 %	SSN	reaktionslos gesintert, porös	
SiSiC	Si-infiltriert	HPSN	heißgepresst	
HPSiC	heißgepresst	HIPSN	heißisostatisch gepresst (HIP)	
HiPSiC	heißisostatisch gepresst (HIP)	GPSN	gasdruckgesintert	

4.26 Druckgusswerkstoffe

Kurzzeichen	ρ g/cm ³	$R_{p0,2}$ MPa	R_m MPa	A in %	Härte HBW10	T_m in °C	1)	2)	n ³⁾ x10 ³	s_{min} ⁴⁾ mm	m_{max} kg	Anwendungen
-------------	-----------------------------	-------------------	--------------	-----------	----------------	----------------	----	----	---------------------------------------	-------------------------------	-----------------	-------------

Zink-Legierungen DIN EN 1774 (Auswahl aus 8 Sorten) Cu-frei dekorativ galvanisierbar

ZnAl4	6,7	160...	250...	1,5...	70...	380...	1	1	500	0,6 bis 2	20	Plattenteller, Vergasergehäuse, Pkw-Scheinwerferrahmen, Pkw-Türschlösser, Türgriffe
ZL0400 (Z400)		170	300	3	90	386						
ZnAl4Cu		180...	300	2...	80...							
ZL0410 (Z410)		240		3	100							

Aluminium-Legierungen DIN EN 1706 AC- (Auswahl aus 9 Sorten)

Al Si12(Fe) (230)	2,55	140...	230...	1...	60...	575	2	2...				Hydraulische Getriebeteile, druckdichte Gehäuse.
Al Si9Cu3(Fe) (226)	2,75	160...	240...	0,5	80...	510...	2	2				
Al Si12CuNi (239)	2,65	190...	260...	1...	90...	570...	2	2...	80	1 bis 3	25	Trittstufen f. Rolltreppen, E-Motorengehäuse.
Al Mg9 (349)	2,6	140...	200...	1...	70...	520...	3...	1				Kolben, Zylinderköpfe.
		220	300	5	100	620	4					Gehäuse f. Haushalts-, Büro- und optische Geräte

Werkstofftechnik

Lagermetalle und Gleitwerkstoffe, Übersicht über die Legierungssysteme

Kurzzzeichen	ρ g/cm ³	$R_{p0,2}$ MPa	R_m MPa	A in %	Härte HBW10	T_m in °C	1)	2)	n ³⁾ x10 ³	$s_{min}^{4)}$ mm	m_{max} kg	Anwendungen
Magnesium-Legierungen DIN EN 1753 (Auswahl aus 8 Sorten) Sehr leicht, Oberflächenschutz erforderlich												
MCMgAl9Zn1		140...	200...	1...	65...	470...	1...					Gehäuse f. tragbare Werkzeuge u. Motoren. Gehäuse f. Kfz-Getriebe Radfelgen
AZ 91		170	260	6	85	600	2					
MCMgAl6Mn	1,8	120...	190...	4...	55...	470...	1...			bis 15		
AM 60		150	250	14	70	620	2			3		
MCMgAl4Si		120...	200...	3...	55...	580...	2	1	100			
AS 41		150	250	12	60	620						

Kupfer-Legierungen DIN EN 1982 Höhere Festigkeit und Zähigkeit, hoher Formverschleiß durch hohe Gießtemperatur												
CuZn39Pb1Al-C	8,5	(250)	(350)	(4)	(110)	880...	3	3		2		Armaturen für Warm- und Kaltwasser
			(530)			900			10	bis 5		
CuZn16Si4-C	8,6	(370)		(5)	(150)	850	2	3		4		Dünnwandig vergießbar

Zinn Legierungen DIN 1742 Höchste Maßbeständigkeit, kaltformbar, korrosionsbeständig											
GD-Sn80Sb	7,1		115	2.5	30	250	1	2	Teile von Messgeräten		

1) Gießseignung; 2) Spanbarkeit; 3) Standmenge; 4) Wanddicke; Wertungen: 1 sehr gut, 2 gut, 3 ausreichend

4.27 Lagermetalle und Gleitwerkstoffe, Übersicht über die Legierungssysteme

Legierungs-system	Beispiele	Beschreibung
DIN ISO 4381 Blei- und Blei-Zinn-Verbundlager, Gusslegierungen		
Mit kleinen Anteilen von Cu, As, Cd	PbSb15SnAs PbSb15Sn10 PbSb10Sn6 PbSb14Sn9CuAs SnSb12Cu6Pb SnSb8Cu4 SnSb8Cu4Cd	Dreifachsystem aus zwei eutektischen Systemen (PbSn und PbSb) kombiniert mit einem peritektischen (SbSn) mit kompliziertem Erstarrungsverlauf. Primäre Ausscheidung der harten Sb-reichen intermetallischen β -Phase, als würfelförmige Tragkristalle in der Grundmasse aus (Pb+ β) liegend. As und Cd wirken weiter verfestigend. Bei Cu-haltigen Sorten scheidet sich primär eine harte, intermetallische CuSn-Phase dendritisch aus. Sie hält die später kristallisierenden würfelförmigen SbSn-Kristalle in der bleireichen Schmelze in Schwebe. Fettdruck: Sorten auch in DIN ISO 4383 enthalten.
DIN ISO 4382-1 Cu-Gusslegierungen für dickwandige Verbund- und Massivgleitlager		
Cu-Pb- Sn Massiv- gleitlager	CuPb8Pb2 CuSn10Pb CuSn12Pb2 CuPb5Sn5Zn5 CuSn7Pb7Zn3	Blei ist in Cu unlöslich, es bleibt zwischen den CuSn-Mischkristallen und härteren CuSn-Phasen flüssig und erstarrt zuletzt. Zn ersetzt teilweise das teure Sn (Rotguss). Pb wirkt bei Überhitzung als Notschmierstoff. Mit steigendem Pb-Gehalt sinkt die Härte. Mit dem Sn-Gehalt steigen Härte und Streckgrenze, für gehärtete Gegenkörper und Stoßbeanspruchung geeignet.
Massiv- und Verbundlager	CuPb9Sn5 CuPb10n10 CuPb15Sn8 CuPb20Sn5 CuAl10Fe5Ni5	Pb ergibt weiche, anpassungsfähige (Fluchtungsfehler) Legierungen für mittlere bis hohe Gleitgeschwindigkeiten, bei hohen Pb-Gehalten auch für Wasserschmierung geeignet. Al erhöht Korrosionsbeständigkeit und Gleiteigenschaften, Fe verhindert das Entstehen spröder Phasen. Harte Werkstoffe mit hoher Zähigkeit und Dauerfestigkeit.
DIN ISO 4382-2 Cu- Knetlegierungen für Massivgleitlager		
Cu-Sn, Cu-Zn Cu-Al	CuSn8P CuZn31Si1 CuSn37Mn2Al2Si CuAl9Fe4Ni4	Homogene Gefüge aus kfz-MK bis etwa 8 % Sn, darüber heterogene mit der härteren intermetallischen δ -Phase. (Sondermessung), kfz-Mischkristallgefüge, zähhart, geringe Notlaufeignung. Cu-Al sehr hart, seewasserbeständig, Konstruktionsteile mit Gleitbeanspruchung.
DIN ISO 4383 Verbundwerkstoffe für dünnwandige Gleitlager		
Cu-Pb	CuPb10n10 CuPb17Sn5 CuPb24Sn4 CuPb30	Mit Pb-Gehalt steigt der Verschleißwiderstand im Bereich der Mischreibung und Korrosionsbeständigkeit gegen Schwefelverbindungen, deshalb Einsatz in Kfz-Verbrennungsmotoren mit Stillständen und Kaltstarts für Haupt- und Pleuellager.

Werkstofftechnik

Kurzzeichen für Kunststoffe und Verfahren, Auswahl

Legierungssystem	Beispiele	Beschreibung	
Al	AlSn20Cu AlSn6Cu AlSi11Cu AlZn5Si1,5Cu1Pb1Mg	Al ist leicht und gut wärmeleitend, gleiche Wärmausdehnung wie bei Al-Gehäusen, die Al-Oxidschicht verhindert Adhäsion und Korrosion. Mit der Härte steigt die Dauerfestigkeit. Gerollte Buchsen oder dünnwandig auf Stahlblech gewalzt und mit galvanischer Gleitschicht versehen.	
Gleitschichten Overlays	PbSn10Cu2 PbSn10, Pbln7	weich	Dünne, galvanisch aufgetragene Schichten zum Einlaufen und für Grenzreibung.
Sintereisen, Sinterbronze	Fe mit 0,3 % C + Cu Cu mit 9...11 %Sn	Porenräume sind mit Schmierstoff gefüllt (< 30 %), das bei Erwärmung austritt. Mit Kunststoff-Gleitschicht imprägniert (PTFE, POM, PVDF)	

4.28 Lagermetalle auf Cu-Basis (DKI)

Kurzname DIN EN 1982 W.-Nummer	Gieß- Art ²⁾	Festigkeitswerte ¹⁾				Bemerkungen	Anwendungsbeispiele
		R_m	$R_{p0,2}$	A	HB		
		MPa		%	min		
CuSn8P CW459K	R390	390	260	45	--	P-legiert, korrosionsbeständig, verschleiß- und dauerschwingfest, sehr gute Gleiteigenschaften, bis 70 MPa zulässig	Gerollte und gedrehte Buchsen für Lager aller Art, Pleuel- und Kolbenbolzenlager (Carobronze®)
	R620	620	550	--	--		
CuSn12-C CC483K	-GS	260	140	12	80	Sorten mit 2 % Pb für Lager mit verbesserten Notlauf-eigenschaften, dafür sind gehärtete Wellen zweckmäßig, in GZ- oder GC-Ausführung sind Lastspitzen bis max. 120 MPa zulässig	Schneckenräder und -kränze, Gelenksteine, unter Last bewegte Spindeln, Lager mit hohen Lastspitzen
	-GM	270	150	5	80		
	-GZ	280	150	5	95		
	-GC	280	140	8	90		
CuSn12Ni2-C CC484K	-GS	280	160	14	90	Wie oben mit erhöhter Zähigkeit und Verschleißfestigkeit	Schneckenradkränze mit Stoßbeanspruchungen
	-GZ	300	180	8	100		
	-GC	300	170	10	90		
CuSn7Zn4Pb7-C CC493K	-GS	240	120	15	65	Preisgünstig, für normale Gleitbeanspruchung, gute Notlauf-eigenschaften durch 5...8 %Pb. In GZ- oder GC-Ausführung sind bis zu 40 MPa zulässig (früher Rg7)	Lager im Werkzeugmaschinenbau, in Baumaschinen, Schiffswellenbezüge
	-GM	230	120	12	60		
	-GZ	270	130	13	75		
	-GC	270	130	16	70		
CuZn25Al5Mn4 Fe3-C CC762S	-GS	750	450	8	180	Preisgünstig, für besonders hohe statische Belastungen geeignet, weniger für dynamische und hohe Gleitgeschwindigkeiten. Schlechte Notlauf-eigenschaften, gute Schmierung erforderlich	Gelenksteine, Spindelmuttern, die nicht unter Last verstellbar sind, langsam laufende Schneckenradkränze
	-GM	750	480	8	180		
	-GZ	750	480	5	190		
	-GC	750	480	3	190		
CuAl11Fe5Ni6-C CC344G	-GS	680	320	5	170	Für höchste Stoß- und Wechselbelastung bis zu 25 MPa Flächenpressung, mäßige Notlauf-eigenschaften, hohe Dauer-schwingfestigkeit in Meerwasser	Stoßbeanspruchte Gleitlager in Schmiedemaschinen und Kniehebelpressen, Gelenkbacken, Druckmuttern
	-GM	680	400		200		
	-GZ	750	400		185		

¹⁾ Mittelwerte ²⁾ Gießart siehe 4.23 unten: Alle Kupfer-Guss-Legierungen sind in DIN EN 1982 zusammengefasst.

4.29 Kurzzeichen für Kunststoffe und Verfahren, Auswahl

Symbol	Polymer	Symbol	Polymer
AAS	Methacrylat-Acrylat-Styrol	CAP	Celluloseacetopropionat
ABS	Acrylnitril-Butadien-Styrol	CP	Cellulosepropionat
APP	ataktisches Polypropylen	EC	Ethylcellulose
BS	Butadien-Styrol	EP	Epoxid
CA	Celluloseacetat	ETFE	Ethylen-Tetrafluorethylen
CAB	Celluloseacetobutyrat	FF	Furanharze

Fortsetzung: Kurzzeichen für Kunststoffe und Verfahren

Symbol	Polymer	Symbol	Polymer
Hgw	Hartgewebe	PTFE	Polytetrafluorethylen
Hm	Harzmatte	PTP	Polyterephthalat
Hp	Hartpapier	PUR	Polyurethan
LCP	Liquid Crystals Polymers	PVC	Polyvinylchlorid
MF	Melaminformaldehyd	PVDC	Polyvinylidenchlorid
MP	Melamin- Phenolformaldehyd	PVDF	Polyvinylidenfluorid
PA	Polyamide	PVF	Polyvinylfluorid
PAI	Polyamidimid	SAN	Styrol-Acrylnitril
PAN	Polyacrylnitril	SB	Styrol-Butadien
PAR	Polyarylat	SI	Silicon
PB	Polybuten	TPU	Thermoplastische Polyurethane
PBT(P)	Polybutylenterephthalat	UF	Harnstoff-Formaldehyd
PC	Polycarbonat	UP	Ungesättigte Polyester
PCTFE	Polychlortrifluorethylen	MFI	Schmelzindex
PDAP	Polydiallylphthalat	RIM	Reaction Injection Moulding (RIM)
PE	Polyethylen	RSG	Reaktionsharz-Spritzguss (RSG)
PEEK	Polyaryletherketon	BMC	Bulk Moulding Compound (Formmasse)
PEI	Polyetherimid	GMT	Glasmatteverstärkte Thermoplaste
PES	Polyethersulfon	SMC	Sheet Moulding Compound (Duroplast)
PET(P)	Polyethylenterephthalat	Verstärkte Kunststoffe	
PPFPFEP	Polytetrafluorethylen- Perfluorpropylen	AFK	Asbestfaserverstärkter Kunststoff
Pi	Polyimid	BFK	Borfaserverstärkter Kunststoff
PMMA	Polymethylmethacrylat	CFK	Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff
POM	Polyoxymethylen, (Polyacetal, Polyformaldehyd)	GFK	Glasfaserverstärkter Kunststoff
PP	Polypropylen	MFK	Metallfaserverstärkter Kunststoff
PPO	Polyphenyloxid	SFK	Synthesefaserverstärkter Kunststoff
PPS	Polyphenylsulfid	Beispiel:	
PS	Polystyrol	PP-GF20	Polypropylen, glasfaserverstärkt (20 %)
PSU	Polysulfon		

Kurzzeichen für Polymergemische (blends) werden aus den Komponenten mit Pluszeichen gebildet, das Ganze in Klammern. Beispiel: (ABS+PC).

Zusatzzeichen für besondere Eigenschaften der Polymere (mit Bindestrich angehängt)

Sym-bol	Bedeutung	Sym-bol	Bedeutung	Sym-bol	Bedeutung	Sym-bol	Bedeutung
C	chloriert	D	Dichte	E	verschäumt, verschäumbar	F	Flexibel
H	hoch	I	schlagzäh	M	mittel, molekular	L	linear
N	normal, Novolack	P	very, sehr	U	ultra, weichmacherfrei	V	weichmacherhaltig
W	Gewicht	R	erhöht, Resol	X	vernetzt, vernetzbar		

4.30 Thermoplastische Kunststoffe, Plastomere, Auswahl

Chemische Bezeichnung, Kurzzeichen	Dichte g/cm ³	Wärmebeständigkeit		Bruch-Streck-Spannungen in MPa σ_B	Bruch-Streck-Dehnungen in % ϵ_B	H358/10 ¹⁾	E-Modul MPa	$\sigma_{1/1000}$ MPa ²⁾	α ³⁾	Eigenschaften, Verwendungsbeispiele
		HDT/A ⁴⁾ 1,8 Mpa in °C	Einsatzbereich in °C ⁵⁾							
Polyvinylchlorid Vestolit, Vinnolit, Trovidur, Trocal										
PVC-U hart	1,36	65...75	-30/60	—	4...6	80...130	2700...3000	20	8	Hart, zäh, korrosionsbeständig, selbstlöschend. Röhre, Fittings für Frisch- und Abwasser, Fensterprofile
-C nachchloriert	1,55	100	/80	—	3...5	—	3400...3600	—	6	—
Polytetrafluorethylen Fluon, Coroflon, Hostaflon, Teflon										
PTFE	2,2	50...60	-200/280	—	>50	30	400...750	1,8	14	Korrosionsbeständig, klebwidrig, geringste Reibung, Konstanz elektrischer Eigenschaften zwischen -150...300 °C
PCFTE	2,1	65...75	-30/180	30...40	>50	—	1300...1500	—	7	Hohe Beständigkeit gegen fast alle aggressiven Stoffe
Polyethylen Duraflex, Hostalen, Lupolen, Neopolen, Vestolen										
PE-LD	0,92	—	-80...70	—	8...10	16	200...400	0,8...12	23	Biegsam bis hart, teilkristallin, korrosionsbeständig, kaltzäh
PE-HD	0,96	38...50	-80...90	—	18...30	64	600...1400	—	12...15	Wasserleitungsrohre, Galvanikbehälter, Batteriekästen, Silo-Auskleidungen, Folien für Verpackung
PE-GF 30	—	55...65	—	—	—	—	5200...6000	4	—	—
Polypropylen Coroplast, Hostalen, Novolen, Vestolen										
PP	0,9	55...65	0/100	—	25...40	75	—	6	10...15	Wie PE, temperaturstandfester, weniger kaltzäh, kochfest, hochkristallin, Benzintanks, Röhre für Fußbodenheizung
PP-GF 30	1,14	90...115	—	—	80	—	6500...6700	—	7	—
Polystyrole Coroplast, Polystyrol, Styrodur, Vestyron										
PS	1,05	65...85	-10/70	30...55	1,5...3	155	3100...3300	20	7	Glasklar, hart, spröde, geringste elektrische Verluste, geschäumt als Wärmeisolator. Gehäuse für Feingeräte
Schlagfeste Polystyrol-Copolymere Luran, Lustran, Novodur, Terluran, Vestyron										
SB: Styrol-Butadien	1,05	70...85	-50/70	—	25...45	100	2200...2800	20	10	Opak, kaltzäh, weniger UV-beständig und alterungsempfindlicher als PS. Trieflehtplatten, Transport- und Lagerbehälter
SAN: Styrol-Acrylnitril	1,08	95...100	0/85	65...85	2,5...5	170	3500...3900	13	7	Glasklar, hoher E-Modul, beständiger als reines PS, weniger zäh als SB. Batteriekästen, Gehäuse für Geräte der Feinwerktechnik
SAN-GF 35	1,36	105	0/90	110	2	—	12000	—	2,5	—
ABS: Acrylnitril-Butadien-Styrol	1,08	95...105	-30/80	—	30...45	95	2400	12	9	Steif, kaltzäh, kratzfest, schalldämpfend, geringeres Kriechen und Dehnen bei Erwärmung
ABS-GF 20	1,36	100...110	-30/80	65...80	—	250	2400	12	9	Karosserie-Innenausbau, Schutzhelme, galvanisierbare Beschlagteile, Armaturenbretter, Frontspoiler

Polymethylmethacrylit		Acrylnitril-Copolymerisat, Plexiglas, Resarit, Degulan		Unbeständig gegen organische Lösungsmittel				
PMMA	1,17	75...105	60...75	—	2...6	15	8	Verglasungen aller Art mit hoher Verformbarkeit. Splitter-sicherung, Lehrmodelle, Zeichengeräte
AMMA, Halbzeug	—	75	90...100	—	10	—	6	
Polycarbonat		Makrofol, Makrolon, Pokalon, Sustonat		Unbeständig gegen Alkalien, organische Lösungsmittel, Wasserdampf				
PC, amorph	1,2	125...135	—	55...60	—	18	6...7	Glasklar, kalitzäh-warmhart, maßbeständig, Trägerteile und Gehäuse für Beleuchtungskörper und Messgeräte
PC-GF 30	1,44	135...140	100/125	70	3,5	40	2,5	
Polyoxymethylen		Delrin, Hostalorin, Kematal, Ultraform		Unbeständig gegen starke Säuren				
POM	1,41	105...115	-50/80	60...70	—	15	12	Kristallin, geringe Wasseraufnahme und Kaltfluss, in Anwendung ähnlich PA, Schnappverbindungen
POM-GF 30	1,5	155...160	-50/100	125...130	3	—	3	
Polyamide		Durethan, Rilsan, Sustamid, Trogamid, Ultramid, Vestamid		Unbeständig gegen starke Säuren und Laugen				
PA6 trocken konditioniert	1,12	55...80	-40/90	70...90	—	4...6	7...10	Teilkristallin, zähhart, abriebfest, wasseraufnehmend, von PA6 über PA66 und PA12 abnehmend. Dadurch Maßänderungen und Abfall der Festigkeit.
PA66 trocken konditioniert	1,13	70...80	40/100	75...100	—	4,5...5	7...10	Zahnräder, Laufrollen, Nockenscheiben, Pumpenteile, Gleitelemente, Lüfterräder, Gehäuse für Handleuchte, Möbelschamiere, Hohlkörper durch Rotationsformen (Heizöltanks)
PA12 trocken konditioniert	1,01	40...50	-70/110	45...60	—	4...5	10...15	
PA6-GF 30 tr. konditioniert	1,32	190...215	-40/120	170...200	3...3,5	—	2,5	Erhöhte Maßhaltigkeit und Steifigkeit. Gehäuse für Heimwerker-Maschinen
Polyester, linear		Amitte, Celanex, Dynalit, Impet, Pocan, Ultradrur, Vestodur		Unbeständig gegen heißes Wasser, Halogen-Kohlenwasserstoffe				
PBT	1,3	50...60	-50/120	50...60	—	3,5...7	13	Steif, zäh, geringste Wasseraufnahme, hohe Maß- und Wärmebeständigkeit. Kfz-Türgriffe, Scheinwerfer- und Spiegelgehäuse, Zahnräder, Kupplungen, Getränkeflaschen
PET, teilkristallin	—	65...75	-50/100	50...80	—	5...7	7	
PET-GF 30	1,5	220...230	-50/140	160...175	—	2...3	3	
Polyphenylensulfid		Craslin, Fortron, Ryton, Tedur		Unbeständig gegen HNO ₃				
PPS	1,35	—	-60/140	—	—	4000	20	Thermisch und chemisch hoch beständig, meist glasfaserverstärkt für Teile im Motorraum im Austausch gegen Metalle
PPS-GF 40	1,64	260	-60/220	165...200	0,9...1,8	—	3	

Erläuterungen: Bruchspannung σ_B und Bruchdehnung ϵ_B werden für harte und spröde Polymere ermittelt, sie entsprechen der Zugfestigkeit bzw. Bruchdehnung. Streckspannung σ_S und Streckdehnung ϵ_S werden für zäh-elastische Polymere ermittelt, sie entsprechen der oberen Streckgrenze. Dehnungswerte unter Last gemessen (→ Abschnitt 5, Bild 4)

1) Kugeldruckhärte; 2) Zeitdehnspannung $\sigma_{1/1000023}^T$; 3) Linearer Längenausdehnungskoeffizient, längs, $\times 10^{-5}/^\circ\text{C}$; 4) Wärmeformbeständigkeitstemperatur HDT nach DIN EN ISO 75. Dabei wird eine mittig biegebeanspruchte Probe auf zwei Stützpunkten langsam durchgebogen. Bestimmten Biegespannungen (z. B. $A = 1,85 \text{ MPa}$) sind bestimmte Durchbiegungen zugeordnet ($A = 0,33 \text{ mm}$); 5) Wärmealterung: Bei einigen Sorten (Polystyrol) fällt die Zugfestigkeit nach 20 000 h Halten bei der oberen Temperatur um 50 % ab.

5.1 Grundbegriffe der Elektrotechnik

5.1.1 Elektrischer Widerstand

Elektrischer Widerstand eines Leiters

$$R = \frac{\rho l}{q} = \frac{l}{\gamma q}$$

$$G = \frac{1}{R}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

$$J = \frac{I}{q}$$

R	G	ρ	$\gamma(\kappa)$	l	q	J
Ω	$\frac{1}{\Omega} = S$	$\frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$	$\frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2} = \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2}$	m	mm^2	$\frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$

- R elektrischer Widerstand, Wirkwiderstand, Resistanz
- G elektrischer Leitwert, Wirkleitwert, Konduktanz
- ρ spezifischer elektrischer Widerstand, Resistivität
- $\gamma(\kappa)$ elektrische Leitfähigkeit, Konduktivität
- l Länge des Leiters
- q Querschnitt (Querschnittsfläche) des Leiters
- J elektrische Stromdichte
- I elektrische Stromstärke

$$1 \Omega \text{ mm}^2/\text{m} = 10^{-4} \Omega \text{ cm} \qquad 1 \text{ Sm}/\text{mm}^2 = 10^4 \text{ S}/\text{cm}$$

$$1 \Omega \text{ cm}/\text{m} = 10^4 \Omega \text{ mm}^2/\text{m} \qquad 1 \text{ S}/\text{cm} = 10^{-4} \text{ Sm}/\text{mm}^2$$

Spannungsfall und Verlustleistung

q	ρ	I	l	$\Delta U, U$	P	p
mm^2	$\frac{\Omega \text{ mm}}{\text{m}}$	A	m	V	W	%

- q Leiterquerschnitt (eine Ader!)
- ρ spezifischer elektrischer Widerstand
- I Leiterstrom
- l einfache Leiterlänge
- U Netzspannung
- ΔU Spannungsfall (Spannungsverlust) auf der Leitung
- $\cos \varphi$ Wirkleistungsfaktor des Verbrauchers
- P Verbraucherleistung
- p prozentualer Leistungsverlust auf der Leitung

	Leiterquerschnitt bei	Berechnung auf Spannungsfall	Berechnung auf Leistungsverlust
Netz			
Gleichstrom		$q = \frac{2\rho}{\Delta U} I l$	$q = \frac{200 \rho P l}{p U^2}$
Wechselstrom		$q = \frac{2\rho}{\Delta U} I l \cos \varphi$	$q = \frac{200 \rho P l}{p U^2 \cos^2 \varphi}$
Drehstrom		$q = \frac{\sqrt{3} \rho}{\Delta U} I l \cos \varphi$	$q = \frac{100 \rho P l}{p U^2 \cos^2 \varphi}$

Elektrotechnik

Grundbegriffe der Elektrotechnik

5.1.1.1 Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

Benennungen

- R_{ϑ} Widerstandswert bei Temperatur ϑ
- R_{20} Widerstandswert bei Bezugstemperatur 20 °C
- α_{20} Temperaturbeiwert bei 20 °C
- ΔR Widerstandsänderung
- $\Delta \vartheta$ Temperaturdifferenz bezogen auf 20 °C
- ϑ Celsius-Temperatur
- ϱ_{ϑ} spezifischer elektrischer Widerstand bei der Temperatur ϑ
- ϱ_{20} spezifischer elektrischer Widerstand bei 20 °C
- R_w Widerstandswert bei ϑ_w (warm)
- R_k Widerstandswert bei ϑ_k (kalt)
- ϑ_w wärmere Temperatur
- ϑ_k kältere Temperatur
- τ Temperaturziffer

Betriebstemperatur

ca. - 50 °C
bis
ca. 200 °C

Bezugstemperatur 20 °C Beliebige Bezugstemperatur

$$\Delta R = R_{20} \alpha_{20} \Delta \vartheta$$

$$R_{\vartheta} = R_{20}(1 + \alpha_{20} \Delta \vartheta)$$

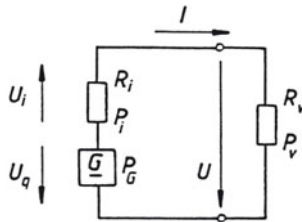
$$\Delta \vartheta = \vartheta - 20 \text{ °C}$$

$$\varrho_{\vartheta} = \varrho_{20}(1 + \alpha_{20} \Delta \vartheta)$$

$$\frac{R_w}{R_k} = \frac{\tau + \vartheta_w}{\tau + \vartheta_k} \quad \Delta \vartheta = \frac{R_w - R_k}{R_k} (\tau + \vartheta_k)$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha_{20}} - 20 \text{ °C}$$

5.1.2 Elektrische Leistung und Wirkungsgrad



P	U	I	R	η
W	V	A	Ω	1

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$$

Generatorleistung P_G

$$P_G = P_i + P_v = U_q I = \frac{U_q^2}{R_i + R_v} = I^2 (R_i + R_v)$$

Verbraucherleistung P_v

$$P_v = P_G - P_i = U I = \frac{U^2}{R_v} = I^2 R_v$$

Verlustleistung P_i des Generators

$$P_i = P_G - P_v = U_i I = \frac{U_i^2}{R_i} = I^2 R_i$$

Maximalleistung P_k des Generators (Kurzschlussleistung)

$$P_k = U_q I_k = \frac{U_q^2}{R_i} = I_k^2 R_i$$

Dabei sind:

Verbraucherwiderstand $R_v = 0 \Omega$

Verbraucherspannung $U = 0 \text{ V}$

Verbraucherleistung $P_v = 0 \text{ W}$

Kurzschlussstrom $I_k = \frac{U_q}{R_i}$

Maximalleistung P_A des Verbrauchers (Leistungsanpassung)

Anpassungsbedingung $\boxed{R_v = R_i}$ $\frac{R_v}{R_i} = 1$

Verbraucherstrom I_A bei Leistungsanpassung

$$I_A = \frac{U_q}{2R_i} = \frac{U_q}{2R_v} = \frac{I_k}{2}$$

Verbraucherspannung U_A bei Leistungsanpassung

$$U_A = \frac{U_q}{2}$$

Verbraucherleistung P_A bei Leistungsanpassung

$$P_A = P_i = \frac{P_G}{2} = \frac{P_k}{4} = \frac{U_q^2}{4R_v} = \frac{U_q^2}{4R_i} = U_A I_A$$

Wirkungsgrad η

Wirkungsgrad = $\frac{\text{abgegebene Leistung}}{\text{zugeführte Leistung}} \leq 1$ P_{ab} abgegebene Leistung (Nutzleistung)

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{P_{ab}}{P_{ab} + P_{verl}} = \frac{P_{zu} - P_{verl}}{P_{zu}} = 1 - \frac{P_{verl}}{P_{zu}}$$

P_{zu} zugeführte Leistung
 P_{verl} Verlustleistung

5.1.3 Elektrische Energie

Einheiten

W	L	C	Q	U	I	R	P	t	K	k	
Ws	$\frac{Vs}{A}$	$\frac{As}{V}$	As	V	A	Ω	W	s	€	$\frac{€}{kWh}$	$1 \text{ Ws} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$

Energie des magnetischen Feldes einer Spule

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

Energie des elektrischen Feldes

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

elektrische Arbeit des Gleichstroms

$$W = P t = U I t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t = U Q$$

Energiekosten K

$$K = k W$$

k Tarif in €/kWh
 W elektrische Arbeit in kWh

Wirkungsgrad η

Wirkungsgrad = $\frac{\text{abgegebene Energie}}{\text{zugeführte Energie}} \leq 1$

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{W_{ab}}{W_{ab} + W_{verl}} = \frac{W_{zu} - W_{verl}}{W_{zu}} = 1 - \frac{W_{verl}}{W_{zu}}$$

W_{ab} abgegebene Energie (Nutzleistung)

W_{zu} zugeführte Energie

W_{verl} Verlustenergie

Elektrotechnik

Gleichstromtechnik

5.1.4 Elektrowärme

Wärmekapazität

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

C Wärmekapazität
 ΔT Temperaturdifferenz

Wärmemenge

$$Q = m c \Delta T$$

Q Wärmemenge (Wärme)
 c spezifische Wärmekapazität
 m Masse

Spezifische Wärmekapazität

Material	c in kJ/kg K	C	Q	ΔT	m
Aluminium	0,92	$W_s = \frac{J}{K}$	J = Ws	K	kg
Kupfer	0,39				
Wasser	4,186				

Wärmewirkungsgrad

$$W_{zu} = P t$$

W_{zu} Zugeführte elektrische Arbeit

$$W_{ab} = Q = m c \Delta T$$

W_{ab}, Q Abgegebene Wärmemenge

$$\eta_{th} = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \frac{m c \Delta T}{P t}$$

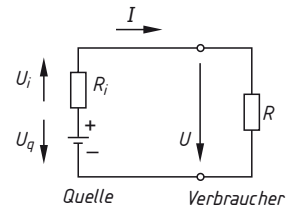
η_{th} Wärmewirkungsgrad

5.2 Gleichstromtechnik

5.2.1 Ohm'sches Gesetz, nicht verzweigter Stromkreis

Schaltplan

I Stromstärke
 U_q Quellenspannung
 U_i innerer Spannungsfall der Quelle
 U Klemmenspannung der Quelle = Verbraucherspannung (bei $R_{Leitung} = 0 \Omega$)
 R_i Innenwiderstand der Quelle
 R Verbraucherwiderstand



Stromstärke I

„Technische Stromrichtung“:
 Der Strom fließt außerhalb der Quelle vom Pluspol zum Minuspol.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_q}{R_i + R}$$

I	U, U_i, U_q	R, R_i
A	V	Ω

Klemmenspannung U der Quelle

$$U = U_q - U_i = U_q - I R_i$$

Kurzschlussstrom (U = 0)

$$I_k = \frac{U_q}{R_i}$$

Leerlaufspannung (I = 0)

$$U = U_q$$

Verbraucherwiderstand

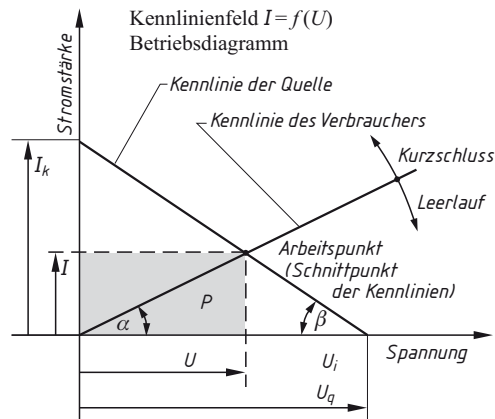
$$R = \frac{U}{I}$$

Innenwiderstand der Quelle

$$R_i = \frac{U_i}{I} = \frac{U_q}{I_k}$$

Verbraucherleistung

$$P = U I$$



5.2.2 Kirchhoff'sche Sätze

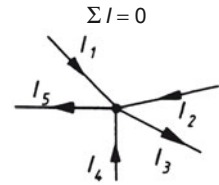
Erster Kirchhoff'scher Satz (Knotenpunkt-Satz)

In jedem Verzweigungspunkt ist die Summe der zufließenden und abfließenden Ströme gleich null.

Zufließende Ströme positiv zählen, abfließende Ströme negativ zählen.

$$+ I_1 + I_2 + I_4 - I_3 - I_5 = 0$$

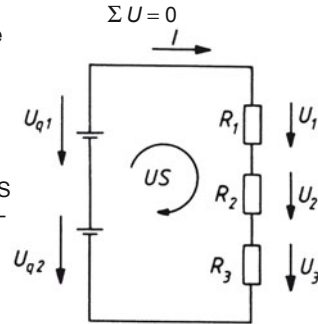
$$\Sigma I_{zu} - \Sigma I_{ab} = 0$$



Zweiter Kirchhoff'scher Satz (Maschen-Satz)

In jedem geschlossenen Stromkreis und jeder Netzmasche ist die Summe aller Spannungen gleich null.

Der Umlaufsinn (US) kann willkürlich festgelegt werden. Positiv zählen, wenn US und Zählpfeil gleiche Richtung haben. Negativ zählen, wenn US und Zählpfeil entgegengesetzte Richtung haben.



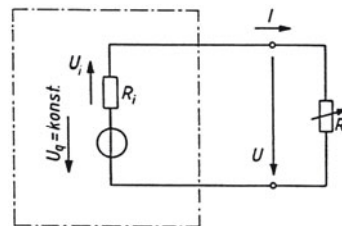
Umlaufsinn $+ U_1 + U_2 + U_3 - U_{q2} - U_{q1} = 0$
 $\Sigma U - \Sigma U_q = 0$

Umlaufsinn $+ U_{q1} + U_{q2} - U_3 - U_2 - U_1 = 0$
 $\Sigma U_q - \Sigma U = 0$

5.2.3 Ersatzschaltungen des Generators

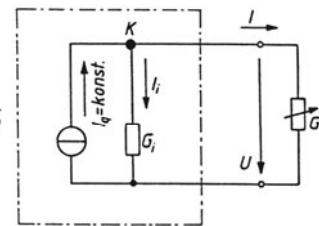
Schaltplan

Ersatz-Spannungsquelle



Die konstante Quellenspannung U_q ist die Ursache des Stromes I in den Widerständen $R_i + R$.

Ersatz-Stromquelle



Der konstante Quellenstrom I_q ist die Ursache der Verbraucherspannung U an den Leitwerten $G_i + G$.

Kirchhoff'scher Satz

Maschen-Satz

$$U_q - U_i - U = 0$$

$$U_q - I R_i - I R = 0$$

$$U_q - I (R_i + R) = 0$$

Knotenpunkt-Satz (Schaltungspunkt K)

$$I_q - I_i - I = 0$$

$$I_q - U G_i - U G = 0$$

$$I_q - U (G_i + G) = 0$$

Elektrotechnik

Gleichstromtechnik

Spannung und Stromstärke bei Belastung der Quelle

Belastung $0 < R < \infty$

$$I = \frac{U_q}{R_i + R} = \frac{U_q}{\frac{U_q}{I_k} + R}$$

$$U = IR = U_q \frac{R}{R_i + R} = U_q \frac{R}{\frac{U_q}{I_k} + R}$$

$$U_i = IR_i$$

Spannung und Stromstärke bei Leerlauf und Kurzschluss der Quelle

Leerlauf

$$R = \infty$$

$$I = 0$$

$$U = U_q$$

$$U_i = 0$$

Kurzschluss

$$R = 0$$

$$U = 0$$

$$I = \frac{U_q}{R_i} = I_k$$

$$U_i = U_q$$

Belastung $0 < G < \infty$

$$U = \frac{I_q}{G_i + G} = \frac{I_q}{\frac{I_q}{U_0} + G}$$

$$I = UG = I_q \frac{G}{G_i + G} = I_q \frac{G}{\frac{I_q}{U_0} + G}$$

$$I_i = UG_i$$

Kurzschluss

$$G = \infty$$

$$U = 0$$

$$I = I_q$$

$$I_i = 0$$

Leerlauf

$$G = 0$$

$$I = 0$$

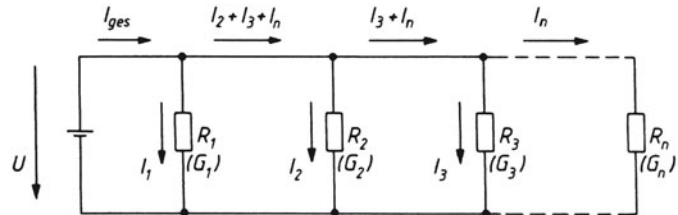
$$U = \frac{I_q}{G_i} = U_0$$

$$I_i = I_q$$

5.2.4 Schaltungen von Widerständen und Quellen

5.2.4.1 Parallelschaltung von Widerständen

Schaltplan



Spannungen

Die Spannung ist an allen Verbraucherwiderständen gleich groß.

$$U = I_{ges} R_{ges} = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = I_n R_n$$

$$U = I_{ges} / G_{ges} = I_1 / G_1 = I_2 / G_2 = I_3 / G_3 = I_n / G_n$$

Ströme

Der Gesamtstrom ist gleich der Summe aller Teilströme.

$$I_{ges} = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

Die Teilströme verhalten sich wie ihre zugehörigen Leitwerte bzw. *umgekehrt* wie die zugehörigen Widerstände.

$$I_{ges} : I_1 : I_2 : I_3 : I_n = G_{ges} : G_1 : G_2 : G_3 : G_n \\ = 1/R_{ges} : 1/R_1 : 1/R_2 : 1/R_3 : 1/R_n$$

Leitwerte und Widerstände

Der Gesamtleitwert ist gleich der Summe der Einzelleitwerte.

$$G_{\text{ges}} = G_1 + G_2 + G_3 \dots + G_n = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + \dots + 1/R_n$$

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{G_{\text{ges}}}$$

Gesamtwiderstand R_{ges} bei gleichgroßen Einzelwiderständen R_{einzel}

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_{\text{einzel}}}{n}$$

n Anzahl der parallelgeschalteten Widerstände

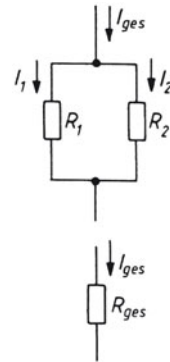
Für zwei parallelgeschaltete Widerstände gilt:

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{I_{\text{ges}}}{I_1} = \frac{R_1}{R_{\text{ges}}}$$

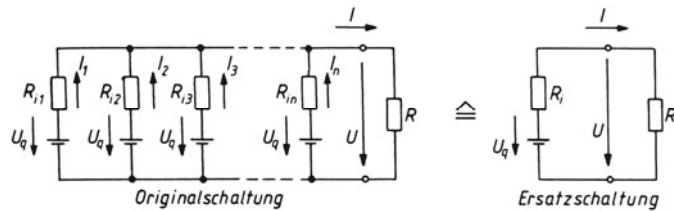
$$\frac{I_{\text{ges}}}{I_2} = \frac{R_2}{R_{\text{ges}}}$$



5.2.4.2 Parallelschaltung von Quellen

Quellen mit gleicher Quellenspannung und gleichem Innenwiderstand

$$R_{i1} = R_{i2} = R_{i3} = \dots = R_{in}$$



$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_n = \frac{I}{n}$$

n Anzahl der Quellen

Alle Quellen liefern die gleiche Stromstärke!

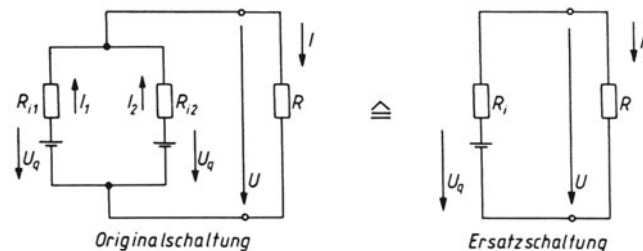
$$R_i = \frac{R_{i1}}{n} = \frac{R_{i2}}{n} = \frac{R_{i3}}{n} = \dots = \frac{R_{in}}{n}$$

$$I = \frac{U_q}{R_i + R}$$

$$U = IR = U_q - IR_i$$

Quellen mit gleicher Quellenspannung und ungleichen Innenwiderständen

$$R_{i1} \neq R_{i2}$$



$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{U_q - U}{R_{i1}}$$

$$I_2 = \frac{U_q - U}{R_{i2}}$$

$$R_i = \frac{R_{i1} R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}}$$

$$I = \frac{U_q}{R_i + R}$$

$$U = IR = U_q - IR_i$$

Die Quelle mit dem kleineren Innenwiderstand liefert die größere Stromstärke

5.2.4.3 Reihenschaltung von Widerständen

Spannungen

Die Gesamtspannung ist gleich der Summe aller Teilspannungen.
 $U_{ges} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$

Die Teilspannungen verhalten sich wie ihre zugehörigen Widerstände.
 $U_{ges} : U_1 : U_2 : U_3 : U_n = R_{ges} : R_1 : R_2 : R_3 : R_n$

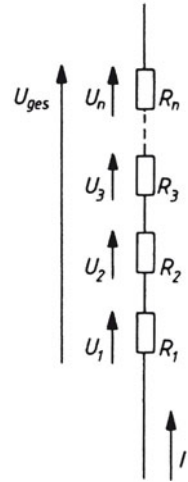
Strom

Die Stromstärke ist in allen Verbraucherwiderständen gleich groß.
 $I = U_1 / R_1 = U_2 / R_2 = U_3 / R_3 = U_n / R_n = U_{ges} / R_{ges}$

Widerstand

Der Gesamtwiderstand ist gleich der Summe der Einzelwiderstände.
 $R_{ges} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$

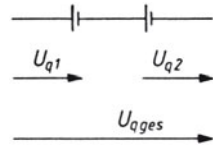
Gesamtwiderstand R_{ges} bei gleichgroßen Einzelwiderständen R_{einzel}
 $R_{ges} = n R_{einzel}$
 n Anzahl der in Reihe geschalteten Widerstände



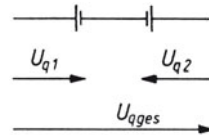
5.2.4.4 Reihenschaltung von Quellen

Summen-Reihenschaltung

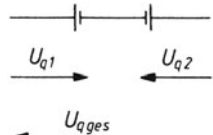
$$U_{q ges} = U_{q1} + U_{q2}$$



Gegen-Reihenschaltung



Für $U_{q1} > U_{q2}$ gilt:
 $U_{q ges} = U_{q1} - U_{q2}$

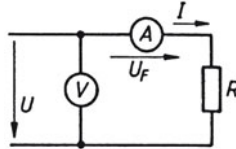


Für $U_{q1} < U_{q2}$ gilt:
 $U_{q ges} = U_{q2} - U_{q1}$

5.2.5 Messschaltungen

**5.2.5.1 Indirekte
Widerstands-
bestimmung**

Spannungsfehlerschaltung

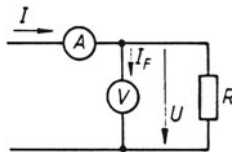


$$R = \frac{U - U_F}{I} = \frac{U - IR_i}{I}$$

- R Messwiderstand
- R_i Innenwiderstand des Strommessers
- U gemessene Spannung
- I gemessener Strom
- U_F zum Fehler führende Spannung

Geeignet zur Bestimmung großer Widerstände
($R \gg R_i$)

Stromfehlerschaltung



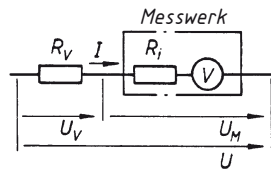
$$R = \frac{U}{I - I_F} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_i}}$$

- R Messwiderstand
- R_i Innenwiderstand des Spannungsmessers
- U gemessene Spannung
- I gemessener Strom
- I_F zum Fehler führender Strom

Geeignet zur Bestimmung kleiner Widerstände
($R \ll R_i$)

**5.2.5.2 Messbereichs-
erweiterung bei
Spannungs- und
Strommessern**

**Vorwiderstand bei
Spannungsmessern**

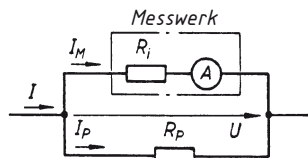


$$R_V = \frac{U_V}{I} = \frac{U - U_M}{I}$$

$$R_V = (n - 1)R_i \quad n = \frac{U}{U_M}$$

- R_V Vorwiderstand
- R_i Innenwiderstand des Messgerätes
- I Strom
- U zu messende Spannung
- U_V Spannung am Vorwiderstand
- U_M Spannung am Messwerk des Messgerätes
- n Faktor der Messbereichserweiterung

**Parallelwiderstand
bei Strommessern**



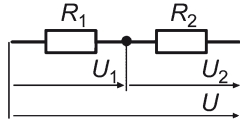
$$R_P = \frac{U}{I_P} = \frac{I_M R_i}{I - I_M}$$

$$R_P = \frac{R_i}{n - 1} \quad n = \frac{I}{I_M}$$

- R_P Parallelwiderstand
- R_i Innenwiderstand des Messgerätes
- U Spannung
- I zu messender Strom
- I_P Strom durch den Parallelwiderstand
- I_M Strom durch das Messwerk des Messgerätes
- n Faktor der Messbereichserweiterung

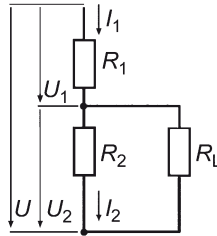
5.2.6 Spannungsteiler

Unbelasteter Spannungsteiler



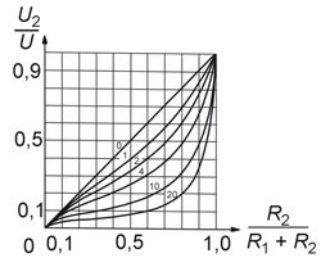
$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \quad U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Belasteter Spannungsteiler



$$U_2 = U \frac{R_2 R_L}{R_1(R_2 + R_L) + R_2 R_L}$$

Parameter 0 bedeutet:
 $R_L = \infty$ (Leerlauf)



Parameter: $\frac{R_1 + R_2}{R_L}$

Beispiel Parameter 1:
 $R_L = R_1 + R_2$

5.2.7 Brückenschaltung

Abgegliche Brücke

$$U_5 = 0$$

$$I_5 = 0$$

Spannung

$$U_1 = U_3$$

$$U_2 = U_4$$

$$U_q = U_1 + U_2 = U_3 + U_4$$

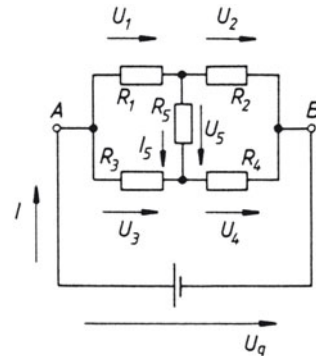
Speisestrom

$$I = \frac{U_q}{\frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}}$$

Widerstand

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (\text{Abgleichbedingung})$$

$$R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$



Nichtabgeglichene (verstimmte) Brücke

$$U_5 \neq 0$$

$$I_5 \neq 0$$

Brückenspannung U_5

$$U_5 = I_5 \cdot R_5$$

Brückenstrom I_5

$$I_5 = I \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_5(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

$$I_5 = U_q \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_5(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4(R_1 + R_2)}$$

Widerstand R_{AB}

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4(R_1 + R_2) + R_5(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_5(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

5.3 Elektrisches Feld und Kapazität

5.3.1 Größen des homogenen elektrostatischen Feldes

Einheiten

Ψ, Q	I	t	U	E	F	C	A	l	D	ϵ_0, ϵ	ϵ_r	W_E	w_E	V
As = C	A	s	V	$\frac{V}{m}$	N	$\frac{As}{V} = F$	m^2	m	$\frac{As}{m^2}$	$\frac{As}{Vm} = \frac{F}{m}$	1	Ws = Nm	$\frac{Ws}{m^3}$	m^3

1 Farad (F) = $\frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volt}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}}$ 1 Coulomb (C) = 1 Amperesekunde (As)

Elektrischer Fluss, elektrische Feldstärke, Kapazität

$\Psi = Q = It$

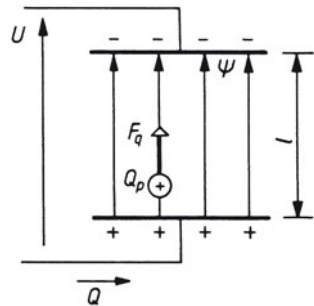
$E = \frac{U}{l} = \frac{F_q}{Q_p}$

$C = \frac{A}{l} \epsilon = \frac{Q}{U}$

$D = \frac{\Psi}{A} = \frac{Q}{A} = \epsilon E$

$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} = 8,85419 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$



- Ψ elektrischer Fluss
- U elektrische Spannung
- E elektrische Feldstärke
- Q verschobene elektrische Ladung, gespeicherte Elektrizitätsmenge des Kondensators
- Q_p elektrische Ladung einer Probeladung
- F_q Kraftwirkung auf eine Probeladung
- D elektrische Flussdichte, elektrische Verschiebung, elektrische Verschiebungsdichte
- ϵ_r Dielektrizitätszahl, Permittivitätszahl (bei linearen Dielektrika)
- ϵ Dielektrizitätskonstante, Permittivität (bei linearen Dielektrika)
- ϵ_0 elektrische Feldkonstante
- c_0 Wellengeschwindigkeit im Vakuum
- l Feldlinienlänge, Plattenabstand
- A Feldraumquerschnitt ($\Psi \perp A$)
- C Kapazität des Kondensators

Bei Ferroelektrika (nichtlineare Dielektrika) ist der Zusammenhang zwischen der elektrischen Flussdichte D und der elektrischen Feldstärke E nicht linear.

Energie, Energiedichte

$W_E = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

$w_E = \frac{1}{2} E D = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$

$W_E = w_E V$

- W_E elektrische Feldenergie, Energieinhalt
- w_E elektrische Energiedichte
- V Feldvolumen

Elektrotechnik

Elektrisches Feld und Kapazität

Kraftwirkung

zwischen zwei parallelen Kondensatorplatten

$$F = \frac{1}{2\epsilon} AD^2 = \frac{\epsilon}{2} AE^2 = \frac{Q^2}{2\epsilon A}$$

$$F = w_E A$$

zwischen zwei punktförmigen Kugelladungen

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{l^2} \quad (\text{Coulomb'sches Gesetz})$$

l Abstand der Kugelladungen

Ungleichnamige Ladungen ziehen sich an, gleichnamige Ladungen stoßen sich ab.

5.3.2 Kapazität von Leitern und Kondensatoren

Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

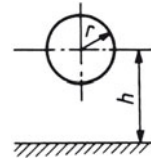
$$\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

ϵ Dielektrizitätskonstante
 ϵ_0 elektrische Feldkonstante
 ϵ_r Dielektrizitätszahl

Langer zylindrischer Einzeileiter gegen Erde

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \left[\frac{h}{r} + \sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2 - 1} \right]} \quad l \text{ Leiterlänge}$$

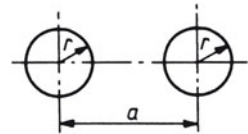
$$C \approx \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{2h}{r}} \quad \text{Näherung für } h \gg r$$



Lange parallele zylindrische Leiter

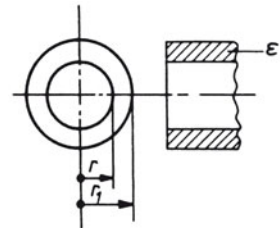
$$C = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \left[\frac{a}{2r} + \sqrt{\left(\frac{a}{2r}\right)^2 - 1} \right]} \quad l \text{ Leiterlänge}$$

$$C \approx \frac{\pi\epsilon l}{\ln \frac{a}{r}} \quad \text{Näherung für } a \gg r$$



Langer koaxialer Leiter

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \quad l \text{ Leiterlänge}$$

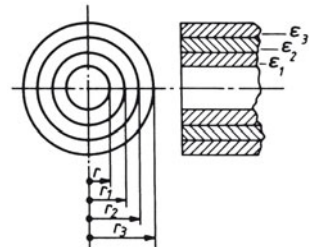


Langer koaxialer Leiter mit geschichtetem Dielektrikum

$$C = \frac{2\pi l}{\ln \left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^{1/\epsilon_1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/\epsilon_2} \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{1/\epsilon_3} \right]}$$

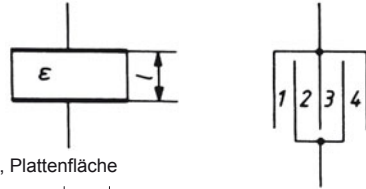
$$\epsilon_1 = \epsilon_{r1} \epsilon_0 \quad \epsilon_2 = \epsilon_{r2} \epsilon_0$$

l Leiterlänge



Plattenkondensator

$$C = \frac{\epsilon A}{l} = \frac{Q}{U}$$



- A Feldraumquerschnitt, Plattenfläche
- l Plattenabstand
- Q Ladung
- U Spannung

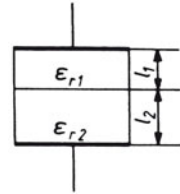
C	Q	U
F	As	V

4 wirksame Feldraumquerschnitte vorhanden!

Plattenkondensator mit geschichtetem Dielektrikum

$$C = \frac{A \epsilon_0}{\frac{l_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{l_2}{\epsilon_{r2}} + \dots}$$

Bei mehr als 2 Dielektrika ist im Nenner zu addieren l_3/ϵ_{r3} usw.



A Feldraumquerschnitt

Kugelanordnungen

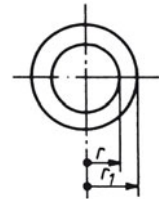
Kugelelektrode

$$C = 4 \pi \epsilon r$$



Kugulkondensator

$$C = \frac{4 \pi r r_1}{r_1 - r}$$



5.3.3 Schaltungen von Kondensatoren

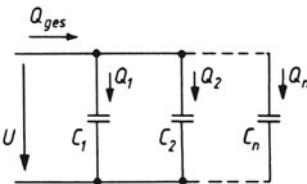
Parallelschaltung

$$Q_{ges} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_{ges} U$$

$$C_{ges} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

C_{ges} Gesamtkapazität, Ersatzkapazität

Für n Kondensatoren mit gleicher Kapazität C gilt $C_{ges} = n C$



Reihenschaltung

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_n = C_{ges} U$$

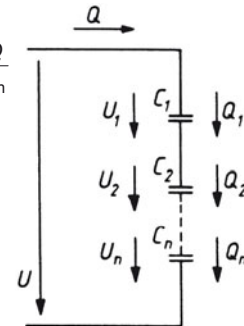
$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{Q}{C_{ges}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

$$U : U_1 : U_2 : U_n = \frac{1}{C_{ges}} : \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \frac{1}{C_n}$$

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Für n Kondensatoren mit gleicher

$$\text{Kapazität } C \text{ gilt } C_{ges} = \frac{C}{n}$$



Für zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren gilt

$$C_{ges} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad C_1 = \frac{C_2 C_{ges}}{C_2 - C_{ges}} \quad C_2 = \frac{C_1 C_{ges}}{C_1 - C_{ges}}$$

Elektrotechnik

Magnetisches Feld und Induktivität

5.4 Magnetisches Feld und Induktivität

5.4.1 Größen des homogenen magnetischen Feldes

Einheiten

Φ, Ψ	V, θ	R_m	H	l	N	I	B	A	μ_r	μ_0, μ	L, Λ	W_M	w_M
$Vs = Wb$	A	$\frac{A}{Vs} = \frac{1}{H}$	$\frac{A}{m}$	m	1	A	$\frac{Vs}{m^2} = T$	m^2	1	$\frac{Vs}{Am} = \frac{H}{m}$	$H = \frac{Vs}{A}$	Ws	$\frac{Ws}{m^3}$

„Ohm’sches Gesetz“ des Magnetkreises

$$\Phi = \frac{\theta}{R_m} = \frac{V}{R_m}$$

$\theta = NI$ elektrische Durchflutung

$V = Hl$ magnetische Spannung

$H = \frac{V}{l}$ magnetische Feldstärke/Erregung

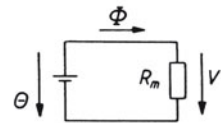
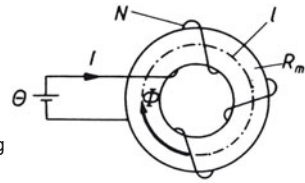
l Länge des zu magnetisierenden Raumes

Φ magnetischer Fluss

R_m magnetischer Widerstand, Reluktanz

N Windungszahl der Erregerwicklung

I Stromstärke in der Erregerwicklung



Formale Analogie mit einem el. Stromkreis

Magnetischer Widerstand, magnetischer Leitwert, Permeabilität

$$R_m = \frac{l}{\mu_r \mu_0 A} = \frac{l}{\mu A}$$

$R_{m \text{ ges}} = R_{m1} + R_{m2} + \dots$
(bei Reihenschaltung von magnetischen Widerständen)

$$\frac{1}{R_m} = \Lambda = \frac{A}{l} \mu_r \mu_0$$

$$\mu = \mu_r \mu_0 = \frac{B}{H}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \approx 1,25 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$$

Stoff	μ_r
ferromagnetisch	$\gg 1$ \neq konst.
paramagnetisch	> 1 $=$ konst.
diamagnetisch	< 1 $=$ konst.

R_m magnetischer Widerstand, Reluktanz

l Länge des zu magnetisierenden Raumes

A Feldraumquerschnitt

Λ magnetischer Leitwert, Permeanz

B Flussdichte, Induktion

H magnetische Feldstärke, magnetische Erregung

μ_r Permeabilitätszahl, relative Permeabilität

μ_0 magnetische Feldkonstante, Induktionskonstante, Permeabilität des Vakuums

μ Permeabilität

Die relative Permeabilität μ_r ist für Luft und alle para- und diamagnetischen Stoffe annähernd 1. Bei ferromagnetischen Stoffen (Eisen, Nickel, Chrom, Ferrite) ist $\mu_r \gg 1$, aber von der Flussdichte B abhängig, die den Kern durchsetzt.

Magnetische Flussdichte (Induktion)

$$B = \frac{\Phi}{A} \quad (\Phi \perp A)$$

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

- B magnetische Flussdichte, Induktion, Feldliniendichte
- Φ magnetischer Fluss
- A magnetischer Feldraumquerschnitt

Induktivität

$$L = N^2 A = \frac{N \Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}$$

$$\Psi = N \Phi$$

$$L = N^2 A_L$$

Der A_L -Wert ist die auf die Windungszahl $N=1$ bezogene Induktivität L und wird in der Einheit $nH = 10^{-9} H$ angegeben.

- L Induktivität einer Spule, Selbstinduktionskoeffizient
- Ψ Induktionsfluss, Flussverkeftung
- A magnetischer Leitwert
- N Windungszahl der Spule
- Φ Spulenfluss
- I Spulenstrom
- A_L Induktivitätsfaktor, Kernfaktor, A_L -Wert

Energieinhalt

$$W_M = \frac{1}{2} L I^2$$

- W_M magnetische Feldenergie (Energieinhalt) einer erregten Spule
- L Induktivität der Spule
- I Spulenstrom

Energiedichte

$$w_M = \frac{1}{2} H B = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{\mu}{2} H^2$$

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

$$W_M = w_M V$$

- w_M magnetische Energiedichte in Stoffen konstanter Permeabilität, z. B. Luft
- H magnetische Feldstärke
- B Flussdichte
- μ Permeabilität
- W_M magnetische Feldenergie (Energieinhalt) eines Volumens mit konstanter Permeabilität, z. B. Luft
- V Feldvolumen in m^3

Durchflutungsgesetz für homogene Felder

$$\sum NI = \sum HI$$

In der Praxis wird häufig der Einfluss der magnetischen Streuung durch einen Zuschlag von 10 % zur elektrischen Durchflutung berücksichtigt
 $\sum NI = 1,1 \sum HI$

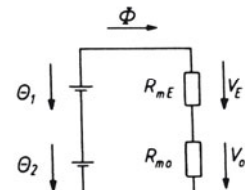
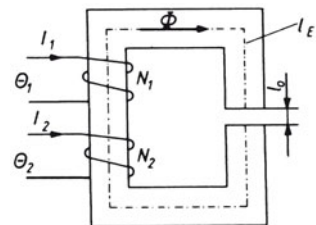
Für das nebenstehende Magnetgestell mit gleicher Magnetisierungsrichtung der Erregerspulen gilt:

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = H_E l_E + H_0 l_0$$

$$\Theta_1 + \Theta_2 = V_E + V_0$$

(Bei mehreren Erregerspulen ist die Magnetisierungsrichtung jeder Spule zu berücksichtigen)

- H_E magnetische Feldstärke im Eisen (aus Magnetisierungskurve entnehmen)
- H_0 magnetische Feldstärke im Luftspalt (aus $H_0 = B_0 / \mu_0$ berechnen)
- l_E mittlere Eisenweglänge
- l_0 mittlere Luftspaltlänge



Formale Analogie mit einem el. Stromkreis

Elektrotechnik

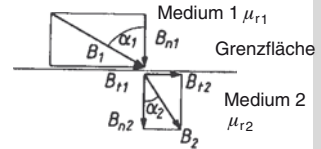
Magnetisches Feld und Induktivität

Berechnung magnetischer Feldlinien an einer Grenzfläche zweier Medien

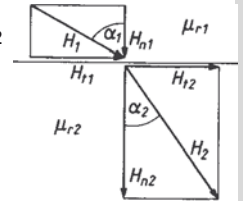
$$H_{t1} = H_{t2} \quad B_{n1} = B_{n2}$$

$$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \quad \frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \sqrt{1 - \frac{\mu_{r1}^2 - \mu_{r2}^2}{\mu_{r1}^2} \sin^2 \alpha_1}$$



- B_1 Flussdichte (Feldlinie) im Medium 1
- B_2 Flussdichte (gebrochene Feldlinie) im Medium 2
- H_1 Feldstärke im Medium 1
- H_2 Feldstärke im Medium 2
- B_n, H_n Normalkomponenten
- B_t, H_t Tangentialkomponenten
- μ_r Permeabilitätszahl, relative Permeabilität



5.4.2 Spannungserzeugung

Einheiten

u, U	i, I	E	Φ	B	L	l	t, T	v	n	f, ω	N, z, p, \ddot{u}	R	A
V	A	$\frac{V}{m}$	Vs	$\frac{Vs}{m^2}$	$H = \frac{Vs}{A}$	m	s	$\frac{m}{s}$	min^{-1}	$\frac{1}{s}$	1	Ω	m^2

Induktionsgesetz

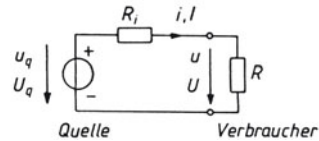
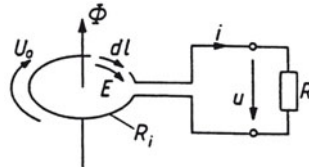
$$U_0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Physikalische Wirkungskette

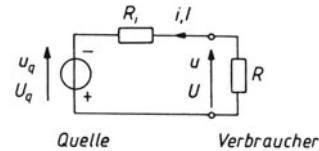
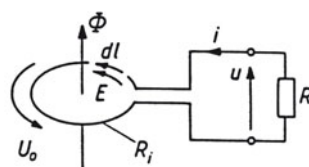
$$u_q = N \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} \quad U_q = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Ersatz-Spannungsquelle für den Induktionsvorgang

Flusszunahme



Flussabnahme



- U_0 induzierte elektrische Umlaufspannung mit Richtungsordnung nach Lenz'scher Regel und Rechtsschraubenregel
- E elektrische Feldstärke
- l Leiterlänge
- u_q induzierte Quellenspannung mit Richtungsordnung nach Verbraucher-Zählpfeil-System (VZS)
- N Windungszahl

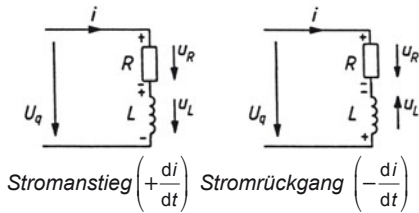
- Φ zeitlich sich ändernder magnetischer Fluss in der Leiterschleife
- $\frac{d\Phi}{dt}, \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ Flussänderungsgeschwindigkeit in der Leiterschleife
- $\Delta\Phi = \Phi_{\text{Ende}} - \Phi_{\text{Anfang}}$
- u, U Klemmenspannung der Quelle
- i, I induzierter Strom
- R_i Innenwiderstand der Quelle

Selbstinduktionsspannung in einer Spule

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad L = \text{konstant}$$

$$u_L = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

u_L Selbstinduktionsspannung
 L Induktivität der Spule

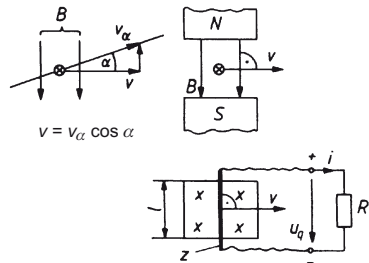


$$\frac{di}{dt}; \frac{\Delta I}{\Delta t} \text{ Stromänderungsgeschwindigkeit}$$

Geradlinige Bewegung eines Leiters im magnetischen Feld

$$u_q = B l v z \quad (v \perp B)$$

- u_q induzierte Quellenspannung
- B Flussdichte
- l wirksame Länge eines Leiterstabes
- v Relativgeschwindigkeit zwischen Leiter und magnetischem Feld, wirksame Geschwindigkeitskomponente bei nicht rechtwinkliger „Schnittgeschwindigkeit“
- z Anzahl der Leiterstäbe (hier: $z = 1$)



Drehbewegung eines Leiters im magnetischen Feld

$$\Phi_t = \hat{\Phi} \sin(\omega t)$$

$$u_q = \hat{u}_q \cos(\omega t) = B l v_y z$$

$$\hat{u}_q = N \omega \hat{\Phi}$$

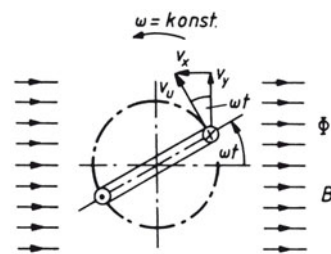
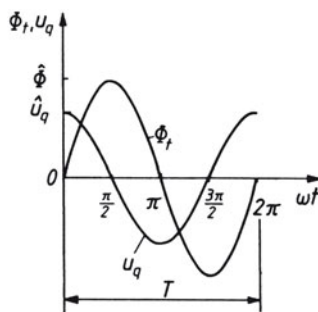
$$f = \frac{1}{T}$$

$$v_y = v_u \cos(\omega t)$$

$$z = 2 N$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$n = \frac{f}{p}$$



- Φ_t zeitlich sich ändernder Spulenfluss
- $\hat{\Phi}$ Scheitelwert des Spulenflusses
- u_q induzierte Quellenspannung
- \hat{u}_q Scheitelwert der induzierten Quellenspannung
- B homogene Flussdichte
- l wirksame Leiterlänge
- z Anzahl der Leiterstäbe
- N Windungszahl

- ω Kreisfrequenz
- f Frequenz
- T Periodendauer
- p Polpaarzahl
- n Drehzahl
- v_u Umfangsgeschwindigkeit
- v_y „Schnittgeschwindigkeit“ der Leiterstäbe

Elektrotechnik

Magnetisches Feld und Induktivität

5.4.3 Kraftwirkung

Einheiten

F	w_M, σ	H_0	B_0	A	μ_0	l, r	I
N	$\frac{Ws}{m^3} = \frac{Ws}{m} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{N}{m^2}$	$\frac{A}{m}$	$\frac{Vs}{m^2}$	m^2	$1,25 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$	m	A

Kraftwirkung zwischen Magnetpolen

$$F = \frac{1}{2\mu_0} AB_0^2 = \frac{H_0 B_0}{2} A = w_M A$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \square w_M$$

F Kraftwirkung zwischen ebenen parallelen Magnetpolen

μ_0 magnetische Feldkonstante, Induktionskonstante

A Querschnitt des Magnetpoles

B_0 Flussdichte im Luftspalt, Luftspaltinduktion

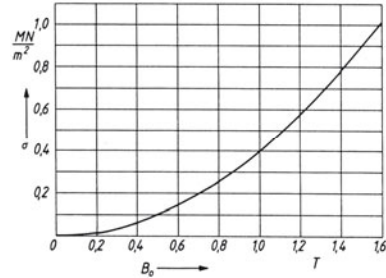
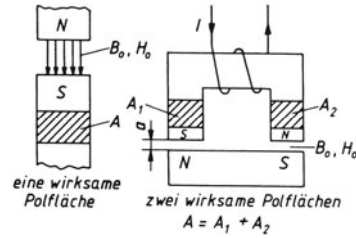
H_0 magnetische Feldstärke im Luftspalt

σ auf die Polfläche bezogene Zugkraft

w_M magnetische Energiedichte im Luftspalt

a Luftspaltlänge

$$1 \frac{MN}{m^2} = 0,1 \frac{kN}{cm^2} = 1 \frac{N}{mm^2}$$



Kraftwirkung auf stromdurchflossenen Leiter im homogenen Magnetfeld

$$F = B_0 I z \quad (B_0 \perp I)$$

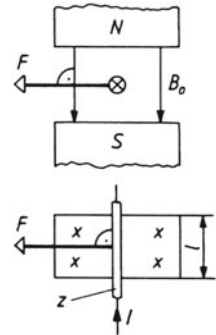
F Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter im homogenen Magnetfeld

B_0 Flussdichte im Luftspalt, Luftspaltinduktion

l wirksame Länge eines Leiterstabes

I Stromstärke in einem Leiterstab

z Anzahl der parallelgeschalteten Leiterstäbe



Kraftwirkung zwischen stromdurchflossenen Leitern

$$F = \frac{\mu_0 l}{2\pi r} I_1 I_2$$

F Kraftwirkung auf parallele stromdurchflossene Leiter

μ_0 Feldkonstante

l Länge der parallel liegenden Leiter

r senkrechter Abstand der parallelen Leiter

I_1, I_2 Leiterstrom

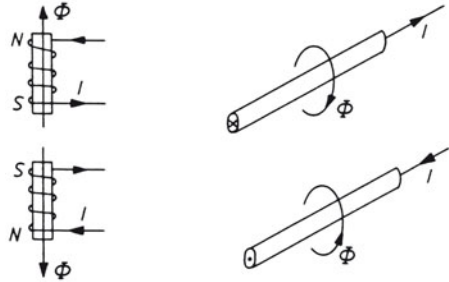


5.4.4 Richtungsregeln

Rechtsschraubenregel

Stromrichtung und Magnetfeldrichtung bilden eine Rechtsschraube

- ⊗ Strom fließt in den Leiterquerschnitt hinein
- ⊙ Strom kommt aus dem Leiterquerschnitt heraus



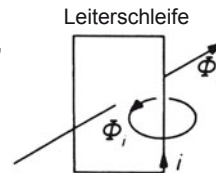
Lenz'sche Regel

Alle induzierten Größen versuchen, ihre Ursache zu behindern

Φ_t eingprägter zeitlich sich ändernder magnetischer Fluss

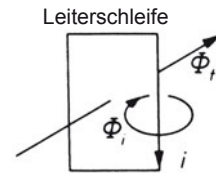
Φ_i durch den Strom i induzierter magnetischer Fluss

i induzierter Strom



Flusszunahme $+\frac{d\Phi_t}{dt}$

Φ_t und Φ_i haben in der Leiterschleife entgegengesetzte Richtung
 Φ_i Gegenfluss



Flussabnahme $-\frac{d\Phi_t}{dt}$

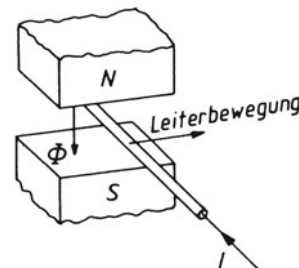
Φ_t und Φ_i haben in der Leiterschleife die gleiche Richtung
 Φ_i Mitfluss

Der in der Leiterschleife induzierte Strom ist immer so gerichtet, dass sein Magnetfeld der stromerzeugenden Ursache entgegenwirkt.

Rechtehandregel (Generatorregel)

Ermittlung der Stromrichtung

Rechte Hand so in das magnetische Feld legen, dass die magnetischen Feldlinien in die Innenfläche der Hand eintreten und der ab gespreizte Daumen in die Bewegungsrichtung des Leiters zeigt. Die Fingerspitzen geben dann die Stromrichtung im Leiter an.



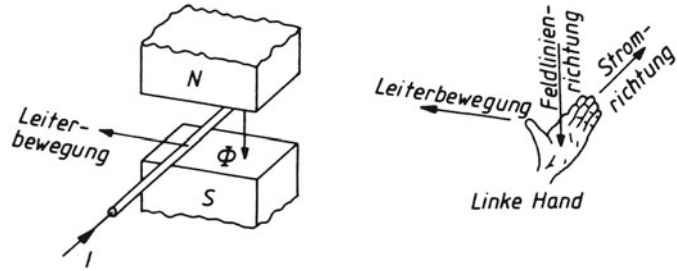
Elektrotechnik

Magnetisches Feld und Induktivität

Linkehandregel (Motorregel)

Ermittlung der Bewegungsrichtung

Linke Hand so in das magnetische Feld legen, dass die magnetischen Feldlinien in die Innenfläche der Hand eintreten und die Fingerspitzen in Stromrichtung zeigen. Der abgespreizte Daumen zeigt dann die Bewegungsrichtung des Leiters an.

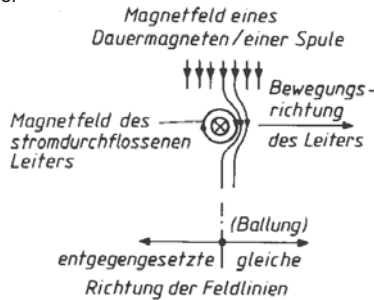


Ballungsregel

Ermittlung der Stromrichtung

Jeder quer zur Feldlinienrichtung bewegte Leiter erzeugt in Bewegungsrichtung vor sich eine Feldlinienballung. Die Stromrichtung im Leiter und seine Magnetfeldrichtung sind durch die Rechtsschraubenregel miteinander verbunden.

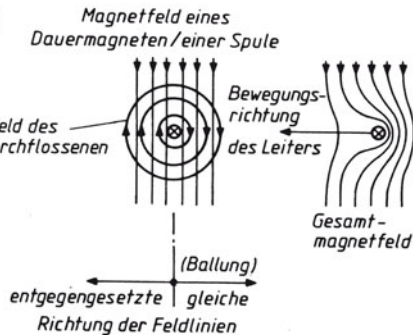
Beispiel



Ermittlung der Bewegungsrichtung

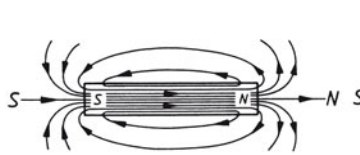
Jeder stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld versucht, der Feldlinienballung auszuweichen.

Beispiel

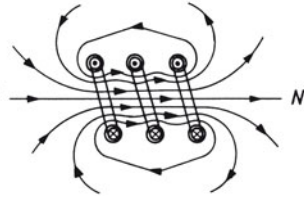


Magnetfeldrichtung

Das Magnetfeld zeigt außerhalb eines Magneten von seinem Nordpol zu seinem Südpol.

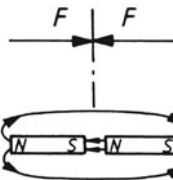


Magnetfeld eines Stabmagneten

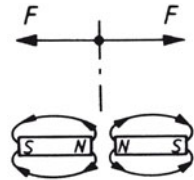


Magnetfeld einer Spule mit 3 Windungen

Kraftwirkung zwischen Magnetpolen

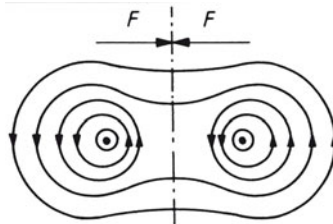


Ungleichnamige Pole ziehen sich an

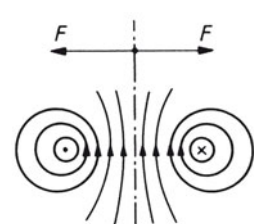


Gleichnamige Pole stoßen sich ab

Kraftwirkung zwischen parallelen stromdurchflossenen Leitern



Gleichsinnig vom Strom durchflossene Leiter ziehen sich an

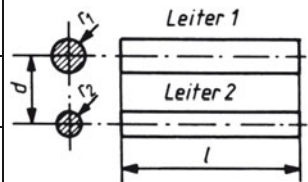


Ungleichsinnig vom Strom durchflossene Leiter stoßen sich ab

5.4.5 Induktivität von parallelen Leitern und Luftspulen

Lange parallele zylindrische Leiter

	Leiter 1	Leiter 2
Innere Induktivität	$L_{i1} = \frac{\mu l}{8\pi}$	$L_{i2} = \frac{\mu l}{8\pi}$
Äußere Induktivität	$L_{a1} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{d}{r_1}$	$L_{a2} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{d}{r_2}$
Gesamtinduktivität	$L = L_{i1} + L_{i2} + L_{a1} + L_{a2}$ $L = \frac{\mu l}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{\sqrt{r_1 + r_2}} \right)$	



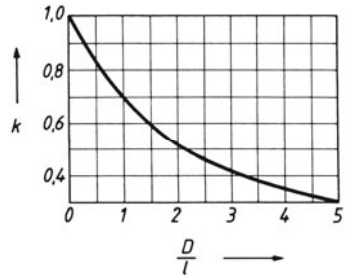
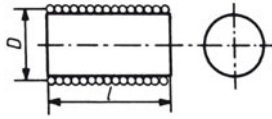
Elektrotechnik

Magnetisches Feld und Induktivität

Einlagige Zylinderspule ohne Eisenkern

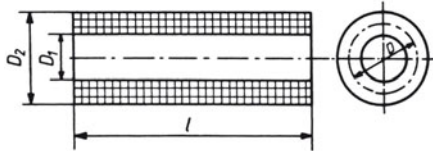
$$L = \frac{\mu_0 \pi D^2 N^2}{4l} k$$

D mittlerer Windungsdurchmesser



Mehrlagige Zylinderspule ohne Eisenkern

$$L = \frac{\mu_0 \pi N^2 (D_2^4 - 4D_2 D_1^3 + 3D_1^4)}{24l (D_2 - D_1)^2} \quad \text{für } l \gg D$$



D mittlerer Windungsdurchmesser
 N Windungszahl

5.4.6 Induktivität von Spulen mit Eisenkern

Induktivität

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = N^2 \Lambda$$

(Gleichstrom)

$$L = \frac{N\hat{\Phi}}{\hat{i}} = N^2 \Lambda$$

(Wechselstrom)

$$L = N^2 A_L$$

$$\Lambda = \frac{1}{R_m} = \frac{A}{l \mu}$$

Φ magnetischer Fluss
 Λ magnetischer Leitwert
 R_m magnetischer Widerstand
 Ψ Induktionsfluss, Flussverkettung

A magnetisch durchgesetzte Fläche
 l mittlere Feldlinienlänge
 μ Permeabilität

A_L Induktivitätsfaktor, Kernfaktor, A_L -Wert. Er ist die auf die Windungszahl $N = 1$ bezogene Induktivität und wird in der Einheit $nH = 10^{-9} H$ angegeben.

Permeabilität bei Gleichstrommagnetisierung

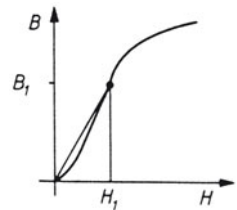
(totale) Permeabilität

$$\mu = \frac{B_1}{H_1}$$

B magnetische Flussdichte
 H magnetische Feldstärke

Permeabilitätszahl, relative (totale) Permeabilität

$$\mu_r = \frac{B_1}{\mu_0 H_1}$$



Permeabilität bei Wechselstrommagnetisierung um den Ursprung

Wechselpermeabilität

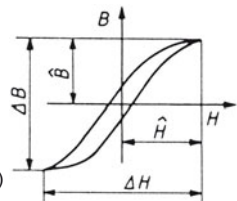
$$\mu = \frac{\hat{B}}{\hat{H}} \quad (\text{für } H > 0)$$

Wechselpermeabilitätszahl, relative Wechselpermeabilität

$$\mu_r = \frac{\hat{B}}{\mu_0 \hat{H}} \quad (\text{für } H > 0)$$

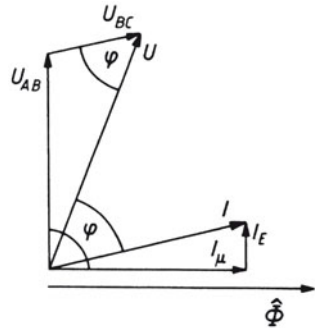
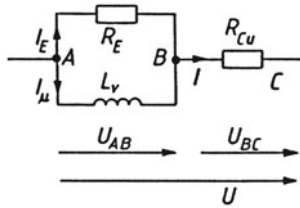
Anfangspermeabilität

$$\mu_i = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (\text{für } \Delta H \rightarrow 0)$$



5.4.7 Drosselspule

Vollständige Ersatzschaltung



Spannungen

$$U_{AB} = 4,44 f N \hat{B} A_E = 4,44 f N \hat{\phi}$$

$$U_{AB} = \sqrt{U^2 + U_{BC}^2 - 2U U_{BC} \cos \varphi}$$

Näherung: $U_{AB} \sim U$

Ströme

$$I_E = \frac{P_E}{U_{AB}}$$

$$I_\mu = \frac{\hat{H}_E l_E + \hat{H}_0 l_0}{N \sqrt{2}}$$

$$I = \sqrt{I_E^2 + I_\mu^2}$$

- I_E Eisenverluststrom
- I_μ Magnetisierungsstrom
- I Drosselstrom
- \hat{H}_E Scheitelwert der magnetischen Feldstärke in Eisen
- \hat{H}_0 Scheitelwert der magnetischen Feldstärke im Luftspalt
- l_E mittlere Eisenweglänge
- l_0 mittlere Luftspatlänge

Leistungen

$$P_E = v_E m_E$$

$$P_{Cu} = I^2 R_{Cu}$$

$$P = P_E + P_{Cu}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI}$$

- R_E Eisenverlustwiderstand
- R_{Cu} Kupferverlustwiderstand
- P_E Eisenverlustleistung
- P_{Cu} Kupferverlustleistung
- P Drosselverlustleistung
- v_E Ummagnetisierungsverluste in W/kg
- m_E Masse des Eisenkerns

Induktivität

$$L_v = \frac{N \hat{\phi}}{\hat{i}_\mu} = \frac{U_{AB}}{\omega I_\mu}$$

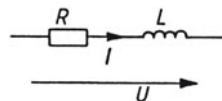
Komplexer Widerstand

$$\underline{Z} = R_{Cu} + \frac{R_E (\omega L_v)^2}{R_E^2 + (\omega L_v)^2} + j \frac{R_E^2 (\omega L_v)}{R_E^2 + (\omega L_v)^2}$$

Reihen-Ersatzschaltung

Umrechnungsbeziehungen für die Umwandlung der vollständigen Ersatzschaltung in eine Reihen-Ersatzschaltung:

$$R = R_{Cu} + \frac{R_E (\omega L_v)^2}{R_E^2 + (\omega L_v)^2} \quad L = \frac{R_E^2 L_v}{R_E^2 + (\omega L_v)^2}$$



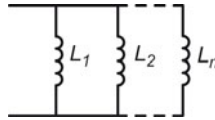
- R Gesamtverlustwiderstand der Drosselspule in der Reihen-Ersatzschaltung
- L Induktivität der Drosselspule in der Reihen-Ersatzschaltung

Elektrotechnik

Magnetisches Feld und Induktivität

5.4.8 Schaltungen von Induktivitäten

Parallelschaltung von Induktivitäten



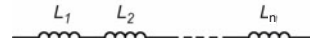
$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

L_{ges} Gesamtinduktivität

Für zwei parallel geschaltete Spulen gilt: $L_{\text{ges}} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$

Für n Spulen mit gleicher Induktivität gilt: $L_{\text{ges}} = \frac{L}{n}$

Reihenschaltung von Induktivitäten



$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

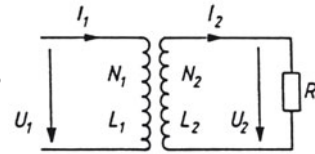
Für n Spulen mit gleicher Induktivität gilt: $L_{\text{ges}} = n L$

5.4.9 Einphasiger Transformator

(Transformator, verlust- und streuungsfrei)

$$\dot{u} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad R' = \dot{u}^2 R$$

$$U_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \hat{B} A \approx 4,44 f N \hat{B} A$$



(Transformatorhauptgleichung; U_0 sinusförmig)

- | | |
|---|--|
| U_0 Induktionsspannung | \hat{B} Scheitelwert der Flussdichte im Kern |
| U_1 Primärspannung | A Kernquerschnitt |
| U_2 Sekundärspannung | L_2 Selbstinduktivität der Sekundärwicklung |
| I_1 Primärstrom | R Lastwiderstand |
| L_1 Selbstinduktivität der Primärwicklung | I_2 Sekundärstrom |
| \dot{u} Übersetzungsverhältnis | N_1 Primärwindungszahl |
| R' auf die Primärseite übersetzter Lastwiderstand R | N_2 Sekundärwindungszahl |
| f Frequenz | |

Kurzschlussspannung

$$u_K = \frac{U_K \cdot 100\%}{U_1}$$

u_K Kurzschlussspannung in Prozent der Nennspannung
 U_K Kurzschlussspannung (gemessen in Volt)
 U_1 Primärspannung

Bei kurzgeschlossener Sekundärwicklung ist die Kurzschlussspannung die Primärspannung, bei der ein Transformator seinen Nennstrom aufnimmt.

u_K niedrig \rightarrow Transformator spannungssteif = kleiner Innenwiderstand (z. B. Spannungswandler, Netzanschlusstransformatoren)

u_K hoch \rightarrow Transformator spannungsweich = großer Innenwiderstand (z. B. Klingeltransformatoren, Zündtransformatoren)

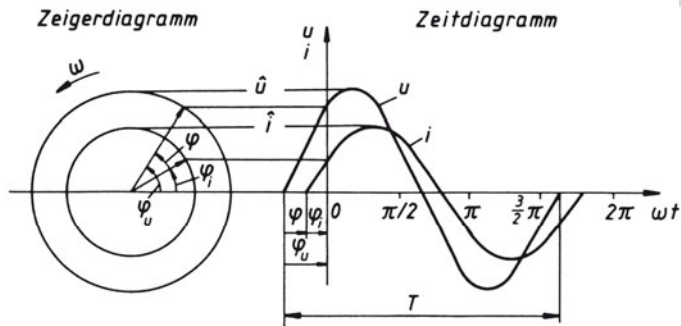
Dauerkurzschlussstrom

$$I_{Kd} = \frac{I_N \cdot 100\%}{u_K}$$

I_{Kd} Dauerkurzschlussstrom
 I_N Nennstrom
 u_K Kurzschlussspannung in Prozent der Nennspannung

5.5 Wechselstromtechnik

5.5.1 Kennwerte von Wechselgrößen



- ω Kreisfrequenz
- f Frequenz
- T Periodendauer
- i Zeitwert des Stromes
- u Zeitwert der Spannung
- \hat{i} Scheitelwert des Stromes
- \hat{u} Scheitelwert der Spannung
- φ_i Nullphasenwinkel des Stromes
- φ_u Nullphasenwinkel der Spannung
- φ Phasenverschiebungswinkel der Spannung gegen den Strom; hier: u eilt i um φ voraus, i eilt u um φ nach

$\omega = 2\pi f$

$f = \frac{1}{T}$

$i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i)$

$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Bei Darstellung des Effektivwertes im Zeigerdiagramm:

Zeigerlänge = Scheitelwert / $\sqrt{2}$

ω	f	T, t	i, \hat{i}	u, \hat{u}
$\frac{1}{s}$	Hz = $\frac{1}{s}$	s	A	V

Mittelwerte bei Sinusform

Effektivwert und Scheitelwert

$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = 0,707 \hat{i}$

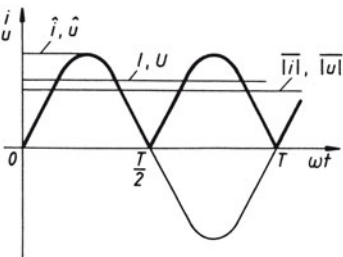
$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 0,707 \hat{u}$

$i, \hat{i}, I, \hat{i} $	$u, \hat{u}, U, \hat{u} $	F	S
A	V	1	1

Gleichrichtwert und Scheitelwert

$|\bar{i}| = \frac{2}{\pi} \hat{i} = 0,637 \hat{i}$

$|\bar{u}| = \frac{2}{\pi} \hat{u} = 0,637 \hat{u}$



Effektivwert und Gleichrichtwert

$I = 1,111 |\bar{i}| \quad |\bar{i}| = 0,9 I$

$U = 1,111 |\bar{u}| \quad |\bar{u}| = 0,9 U$

Formfaktor = $\frac{\text{Effektivwert}}{\text{Gleichrichtwert}}$

$F = 1,111$

Scheitelfaktor = $\frac{\text{Scheitelwert}}{\text{Effektivwert}}$

$S = \sqrt{2} = 1,414$

- i, u Zeitwert
- \hat{i}, \hat{u} Scheitelwert
- I, U Effektivwert
- $|\bar{i}|, |\bar{u}|$ Gleichrichtwert
- F Formfaktor
- S Scheitelfaktor

Mittelwerte bei beliebiger Kurvenform

Effektivwert $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$ $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$	Linearer Mittelwert $\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt$ $\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt$	Gleichrichtwert $ \bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt$ $ \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt$	Formfaktor $F = \frac{I}{ \bar{i} } = \frac{U}{ \bar{u} } \geq 1$ Scheitelfaktor $S = \frac{\hat{i}}{I} = \frac{\hat{u}}{U}$
--	---	---	---

Mischgrößen

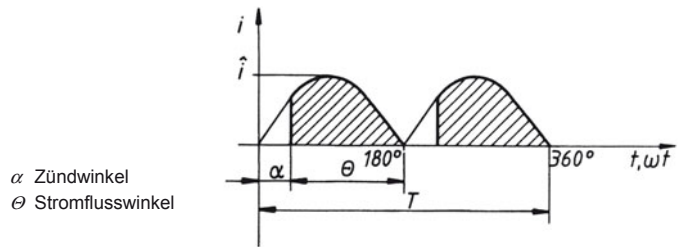
Effektivwert
 $I = \sqrt{\bar{i}^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}$ Wechselgröße: Gleichanteil ist null
 $U = \sqrt{\bar{u}^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}$ Mischgröße: Gleichanteil ist von null verschieden

Effektivwert des Wechselanteils
 $I_{\sim} = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} = \sqrt{I^2 - \bar{i}^2}$
 $U_{\sim} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} = \sqrt{U^2 - \bar{u}^2}$

Schwingungsgehalt $s = \frac{I_{\sim}}{I} = \frac{U_{\sim}}{U}$ Welligkeit $w = \frac{I_{\sim}}{\bar{i}} = \frac{U_{\sim}}{\bar{u}}$

Geschaltete Sinuswelle (Phasenanschnitt bei Ohm'scher Last)

	Einweg-Gleichrichtung	Zweiweg-Gleichrichtung
Gleichrichtwert	$ \bar{i} = \frac{\hat{i}}{2\pi}(1 + \cos \alpha)$	$ \bar{i} = \frac{\hat{i}}{\pi}(1 + \cos \alpha)$
Effektivwert	$I = \frac{\hat{i}}{2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{180^\circ} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}$	$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{180^\circ} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}$



Zündwinkel	0°	30°	60°	90°	120°	150°
Einweg-Gleichrichtung	$ \bar{i} $	0,3183 \hat{i}	0,2970 \hat{i}	0,2387 \hat{i}	0,1592 \hat{i}	0,0796 \hat{i}
	I	0,5 \hat{i}	0,4927 \hat{i}	0,4485 \hat{i}	0,3536 \hat{i}	0,2211 \hat{i}
Zweiweg-Gleichrichtung	$ \bar{i} $	0,6366 \hat{i}	0,5940 \hat{i}	0,4775 \hat{i}	0,3183 \hat{i}	0,1592 \hat{i}
	I	0,7071 \hat{i}	0,6968 \hat{i}	0,6342 \hat{i}	0,5 \hat{i}	0,3127 \hat{i}

5.5.2 Passive Wechselstrom-Zweipole an sinusförmiger Wechselspannung

Größen, Einheiten, Kennwerte

Leistungen

- P Wirkleistung
- Q Blindleistung
- Q_L induktive Blindleistung
- Q_C kapazitive Blindleistung
- S Scheinleistung

Spannungen

- U_R Wirkspannung
- U_L induktive Blindspannung
- U_C kapazitive Blindspannung
- U Gesamtspannung

Leitwerte

- G Wirkleitwert = Konduktanz
- B Blindleitwert = Suszeptanz
- Y Scheinleitwert = Admittanz

Ströme

- I_R Wirkstrom
- I_L induktiver Blindstrom
- I_C kapazitiver Blindstrom
- I Gesamtstrom

Widerstände

- R Wirkwiderstand = Resistanz
- X Blindwiderstand = Reaktanz
- X_L induktiver Blindwiderstand = Induktanz
- X_C kapazitiver Blindwiderstand = Kondensanz (Kapazitätz)
- Z Scheinwiderstand = Impedanz

Kennwerte

$\lambda = \cos \varphi$

Leistungsfaktor = $\frac{\text{Wirkgröße}}{\text{Scheingröße}}$

$\beta = \sin \varphi$

Blindfaktor = $\frac{\text{Blindgröße}}{\text{Scheingröße}}$

$d = \tan \delta$

Verlustfaktor = $\frac{\text{Wirkgröße}}{\text{Blindgröße}}$

$Q = \frac{1}{d}$

Gütefaktor = $\frac{1}{\text{Verlustfaktor}}$

R, X, Z	G, B, Y	U	I	P	Q	S	$\cos \varphi, \sin \varphi, d, Q$
$\Omega = \frac{V}{A}$	$S = \frac{A}{V} = \frac{1}{\Omega}$	V	A	W	var	VA	1

Frequenzabhängigkeit

$R = \frac{l}{\gamma q}$

$G = \frac{\gamma q}{l}$

$X_L = \omega L$

$B_L = \frac{1}{\omega L}$

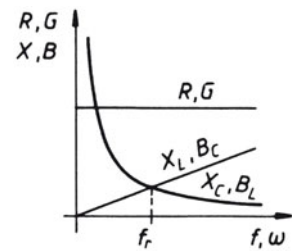
$X_C = \frac{1}{\omega C}$

$B_C = \omega C$

f_r Resonanzfrequenz

$X_L = X_C$ Reihenresonanzbedingung

$B_L = B_C$ Parallelresonanzbedingung

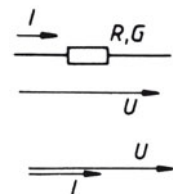


Wirkwiderstand R

Strom I und Spannung U sind phasengleich

$U = IR = \frac{I}{G} \quad G = \frac{1}{R} \quad \cos \varphi = 1$

$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad \sin \varphi = 0$



Elektrotechnik

Wechselstromtechnik

Induktiver Blindwiderstand X_L

Spannung U eilt dem Strom I um 90° voraus

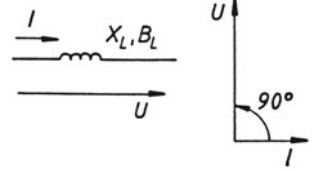
$$U = I X_L = \frac{I}{B_L} \quad B_L = \frac{1}{X_L}$$

$$X_L = \omega L$$

$$Q_L = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L}$$

$$\cos \varphi = 0$$

$$\sin \varphi = 1$$



Kapazitiver Blindwiderstand X_C

Spannung U eilt dem Strom I um 90° nach

$$U = I X_C = \frac{I}{B_C}$$

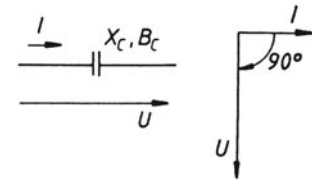
$$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$Q_C = UI = I^2 X_C = \frac{U^2}{X_C}$$

$$\cos \varphi = 0$$

$$\sin \varphi = 1$$



5.5.2.1 Reihenschaltung von Blindwiderständen

Reihenschaltung von induktiven Blindwiderständen X_L

$$U = U_{L1} + U_{L2} + \dots$$

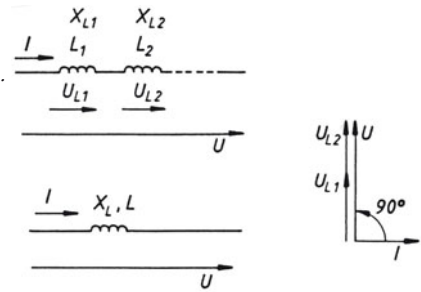
$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{U_{L1}}{X_{L1}} = \frac{U_{L2}}{X_{L2}} = \dots$$

$$X_L = X_{L1} + X_{L2} + \dots$$

$$L = L_1 + L_2 + \dots$$

$$\cos \varphi = 0$$

$$\sin \varphi = 1$$



(Ersatzschaltung)

Reihenschaltung von kapazitiven Blindwiderständen X_C

$$U = U_{C1} + U_{C2} + \dots$$

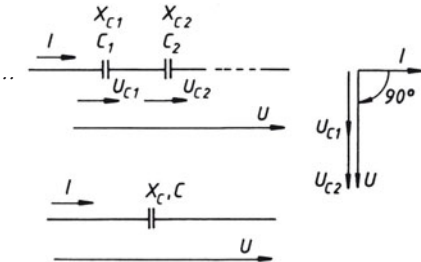
$$I = \frac{U}{X_C} = \frac{U_{C1}}{X_{C1}} = \frac{U_{C2}}{X_{C2}} = \dots$$

$$X_C = X_{C1} + X_{C2} + \dots$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

$$\cos \varphi = 0$$

$$\sin \varphi = 1$$



(Ersatzschaltung)

Für zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren gilt:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Reihenschaltung von R und X_L

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$$

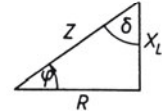
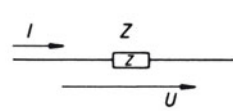
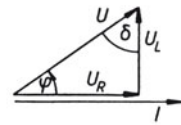
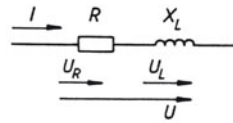
$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U_R}{R} = \frac{U_L}{X_L}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{Z} = \frac{P}{S}$$

$$\sin \varphi = \frac{U_L}{U} = \frac{X_L}{Z} = \frac{Q_L}{S}$$

$$d_L = \tan \delta = \frac{R}{X_L} = \frac{U_R}{U_L} = \frac{P}{Q_L} \quad S = UI = I^2 Z = \frac{U^2}{Z} = \sqrt{P^2 + Q_L^2}$$



(Ersatzschaltung)

Reihenschaltung von R und X_C

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$$

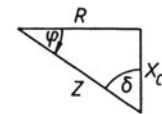
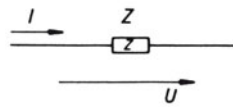
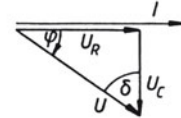
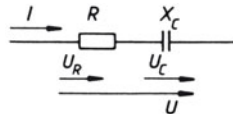
$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U_R}{R} = \frac{U_C}{X_C}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{Z} = \frac{P}{S}$$

$$\sin \varphi = \frac{U_C}{U} = \frac{X_C}{Z} = \frac{Q_C}{S}$$

$$d_C = \tan \delta = \frac{R}{X_C} = \frac{U_R}{U_C} = \frac{P}{Q_C} \quad S = UI = I^2 Z = \frac{U^2}{Z} = \sqrt{P^2 + Q_C^2}$$



(Ersatzschaltung)

**Reihenschaltung von R, X_L und X_C
($X_L > X_C$)
($U_L > U_C$)**

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U_R}{R} = \frac{U_L}{X_L} = \frac{U_C}{X_C}$$

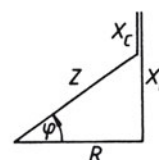
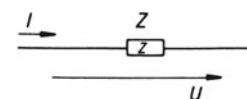
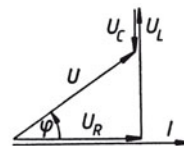
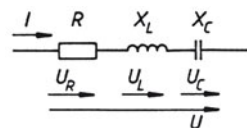
$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{Z} = \frac{P}{S}$$

$$\sin \varphi = \frac{U_L - U_C}{U} = \frac{X_L - X_C}{Z} = \frac{Q_L - Q_C}{S}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$d = d_L + d_C$$

$$S = UI = I^2 Z = \frac{U^2}{Z} = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}$$



(Ersatzschaltung)

5.5.2.2 Parallelschaltung von Blindwiderständen

Parallelschaltung von induktiven Blindwiderständen X_L

$$U = I X_L = I_1 X_{L1} = I_2 X_{L2} = \dots$$

$$\cos \varphi = 0$$

$$B_L = B_{L1} + B_{L2} + \dots$$

$$\frac{1}{X_L} = \frac{1}{X_{L1}} + \frac{1}{X_{L2}} + \dots$$

Für zwei parallelgeschaltete induktive Blindwiderstände/Induktivitäten gilt:

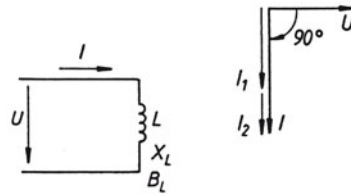
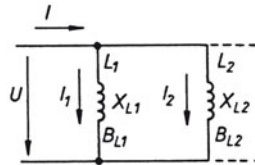
$$I = I_1 + I_2 + \dots$$

$$\sin \varphi = 1$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots$$

$$X_L = \frac{X_{L1} X_{L2}}{X_{L1} + X_{L2}}$$

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$



(Ersatzschaltung)

Parallelschaltung von kapazitiven Blindwiderständen X_C

$$U = I X_C = I_1 X_{C1} = I_2 X_{C2} = \dots$$

$$\cos \varphi = 0$$

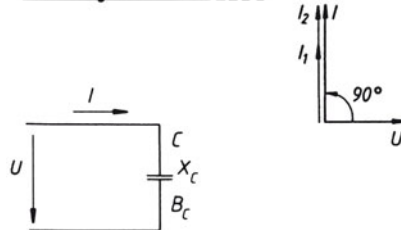
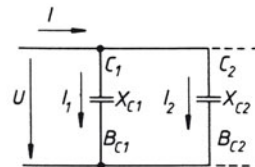
$$B_C = B_{C1} + B_{C2} + \dots$$

$$\frac{1}{X_C} = \frac{1}{X_{C1}} + \frac{1}{X_{C2}} + \dots$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots$$

$$\sin \varphi = 1$$

$$C = C_1 + C_2 + \dots$$



(Ersatzschaltung)

Parallelschaltung von R und X_L

$$U = IZ = I_R R = I_L X_L$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$$

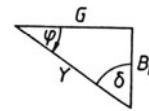
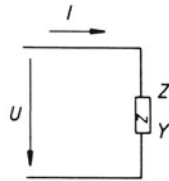
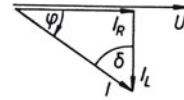
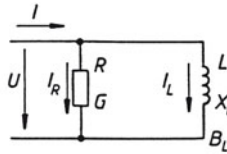
$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I} = \frac{G}{Y} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{Z}} = \frac{Z}{R} = \frac{P}{S}$$

$$\sin \varphi = \frac{I_L}{I} = \frac{B_L}{Y} = \frac{\frac{1}{X_L}}{\frac{1}{Z}} = \frac{Z}{X_L} = \frac{Q_L}{S}$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{G^2 + B_L^2}$$

$$d_L = \tan \delta = \frac{G}{B_L} = \frac{X_L}{R} = \frac{I_R}{I_L} = \frac{P}{Q_L}$$

$$S = UI = I^2 Z = \frac{U^2}{Z} = \sqrt{P^2 + Q_L^2}$$



(Ersatzschaltung)

Parallelschaltung von R und X_C

$$U = IZ = I_R R = I_C X_C$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$$

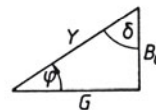
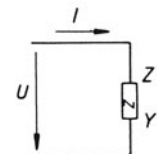
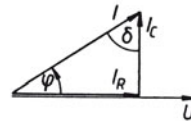
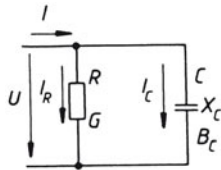
$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I} = \frac{G}{Y} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{Z}} = \frac{Z}{R} = \frac{P}{S}$$

$$\sin \varphi = \frac{I_C}{I} = \frac{B_C}{Y} = \frac{\frac{1}{X_C}}{\frac{1}{Z}} = \frac{Z}{X_C} = \frac{Q_C}{S}$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{G^2 + B_C^2}$$

$$d_C = \tan \delta = \frac{G}{B_C} = \frac{X_C}{R} = \frac{I_R}{I_C} = \frac{P}{Q_C}$$

$$S = UI = I^2 Z = \frac{U^2}{Z} = \sqrt{P^2 + Q_C^2}$$



(Ersatzschaltung)

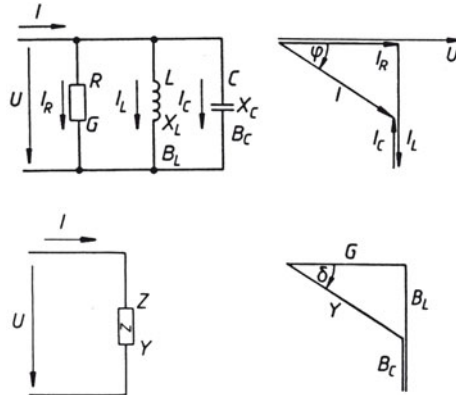
Parallelschaltung von R , X_L und X_C
($X_L < X_C$)
($B_L > B_C$)
($I_L > I_C$)

$$U = IZ = I_R R = I_L X_L = I_C X_C \quad I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I} = \frac{G}{Y} = \frac{1}{\frac{R}{Z}} = \frac{P}{S} \quad \sin \varphi = \frac{I_L - I_C}{I} = \frac{B_L - B_C}{Y} = \frac{Q_L - Q_C}{S}$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} \quad d = d_L + d_C$$

$$S = UI = I^2 Z = \frac{U^2}{Z} = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}$$



(Ersatzschaltung)

5.5.3 Umwandlung passiver Wechselstrom-Zweipole in gleichwertige Schaltungen

Bei konstanter Frequenz hat die gleichwertige Schaltung auf den Generator die gleiche Wirkung wie die Originalschaltung.

Umwandlung einer Reihenschaltung in eine gleichwertige Parallelschaltung

Umwandlung einer Parallelschaltung in eine gleichwertige Reihenschaltung

Gegebene Originalschaltung	Gesuchte gleichwertige Schaltung	Umrechnungsbeziehungen
		$G = \frac{R}{Z^2} \quad B_L = \frac{X_L}{Z^2}$
		$G = \frac{R}{Z^2} \quad B_C = \frac{X_C}{Z^2}$
		$R = \frac{G}{Y^2} \quad X_L = \frac{B_L}{Y^2}$
		$R = \frac{G}{Y^2} \quad X_C = \frac{B_C}{Y^2}$

$$Z^2 = R^2 + X^2$$

$$Y^2 = G^2 + B^2$$

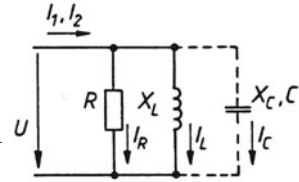
**5.5.4 Blindleistungs-
kompensation**

**Betriebswerte vor der
Kompensation**

$$I_1 = \frac{S_1}{U} = \frac{P_{zu}}{U \cos \varphi_1} = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$$

$$P_{L1} = I_1^2 R_L$$

$$I_B = I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{Q_L}{U} = \frac{S \sin \varphi_1}{U} = \frac{P_{zu} \tan \varphi_1}{U}$$



**Betriebswerte nach der
Kompensation**

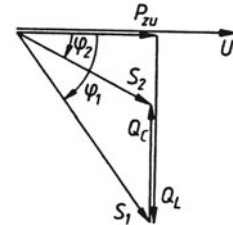
$$I_2 = \frac{S_2}{U} = \frac{P_{zu}}{U \cos \varphi_2} = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$$

$$P_{L2} = I_2^2 R_L$$

$$I_B = I_L - I_C$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{Q_C}{U} = \frac{P_{zu} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)}{U}$$

$$P_{zu} = \frac{P_{ab}}{\eta}$$



- P_{zu} zugeführte Wirkleistung
- P_{ab} abgegebene Wirkleistung (Nennleistung)
- P_L Leistungsverlust auf der Zuleitung
- R_L Leitungswiderstand
- I_B Blindstrom auf der Zuleitung
- Q_C kompensierte Blindleistung ($Q_L = Q_C$ bei Vollkompensation)

**Erforderliche
Kompensationskapazität**

$$Q_C = P_{zu} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)$$

$$C = \frac{Q_C}{U^2 \omega} \qquad C = \frac{Q_C}{U_{Str}^2 \omega}$$

(Einphasennetz)

(Dreiphasennetz)

C Einzelkapazität
 $U_{Str} = U$ bei Dreieckschaltung der Kondensatorbatterie

$U_{Str} = \frac{U}{\sqrt{3}}$ bei Sternschaltung der Kondensatorbatterie

**Leistungsverluste in
Abhängigkeit vom
Leistungsfaktor**

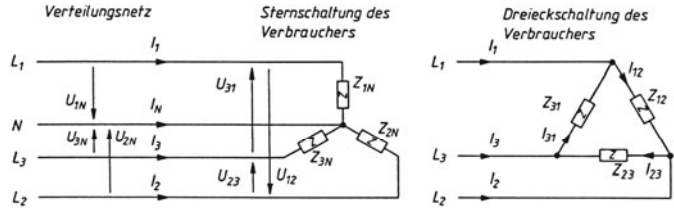
$$P_{LS} = \frac{P_L}{\cos^2 \varphi} = P_L (1 + \tan^2 \varphi)$$

- P_L Leistungsverlust auf der Leitung bei $\cos \varphi = 1$ des Verbrauchers
- P_{LS} Leistungsverlust auf der Leitung bei beliebigem $\cos \varphi$ des Verbrauchers
- $\cos \varphi, \tan \varphi$ Leistungsfaktor/Verlustfaktor des Verbrauchers

5.6 Drehstromtechnik

5.6.1 Drehstromnetz

Benennungen

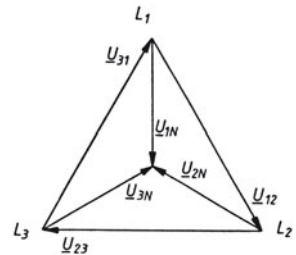


- L_1, L_2, L_3 Außenleiter
- N Neutraleiter (Sternpunktleiter)
- U_{1N}, U_{2N}, U_{3N} Sternspannung (auch U_1, U_2, U_3 zulässig, wenn Verwechslung ausgeschlossen)
- $U_{12}, U_{23}, U_{31}, U$ Dreieckspannung (Außenleiterspannung)
- I_1, I_2, I_3, I Außenleiterstrom (= Sternstrom bei Sternschaltung des Verbrauchers)
- I_{12}, I_{23}, I_{31} Dreieckstrom
- I_N Sternpunktleiterstrom
- U_{Str} Strangspannung, Spannung zwischen beiden Enden eines Stranges *unabhängig von der Schaltungsart*
- I_{Str} Strangstrom, Strom in einem Strang *unabhängig von der Schaltungsart*
- P Gesamtleistung des Verbrauchers
- P_{Str} Strangleistung des Verbrauchers

5.6.2 Stern- und Dreieckschaltung

Zeigerdiagramm der Spannungen

Dreiecksspannungen	Sternspannungen
$\underline{U}_{12} = U \angle -60^\circ$	$\underline{U}_{1N} = \frac{U}{\sqrt{3}} \angle -90^\circ$
$\underline{U}_{23} = U \angle 180^\circ$	$\underline{U}_{2N} = \frac{U}{\sqrt{3}} \angle 150^\circ$
$\underline{U}_{31} = U \angle 60^\circ$	$\underline{U}_{3N} = \frac{U}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ$



Sternschaltung des Verbrauchers

Stranggrößen

$$U_{Str} = \frac{U}{\sqrt{3}} \qquad I_{Str} = I$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}_{1N}} \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}_{2N}} \qquad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}_{3N}}$$

Dreieckschaltung des Verbrauchers

Stranggrößen

$$U_{Str} = U \qquad \underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} \qquad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} \qquad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}$$

Außenleiterströme

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

Sternschaltung des Verbrauchers

Symmetrische Last
 $Z_{1N} = Z_{2N} = Z_{3N}$
 $I_1 = I_2 = I_3$
 $I_1 + I_2 + I_3 = 0$
 $I_N = 0$
 $P = UI\sqrt{3} \cos \varphi = 3P_{\text{Str}}$
 $P_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} I_{\text{Str}} \cos \varphi$

Unsymmetrische Last
 $Z_{1N} \neq Z_{2N} \neq Z_{3N}$
 $I_1 \neq I_2 \neq I_3$
 $I_1 + I_2 + I_3 + I_N = 0$
 $I_N \neq 0$
 $P = P_{\text{Str}1} + P_{\text{Str}2} + P_{\text{Str}3}$
 $P_{\text{Str}1} = U_{1N} I_1 \cos \varphi_1$
 $P_{\text{Str}2} = U_{2N} I_2 \cos \varphi_2$
 $P_{\text{Str}3} = U_{3N} I_3 \cos \varphi_3$

Bei fehlendem Sternpunktleiter ergeben sich ungleiche Sternspannungen bei ungleichen gegenseitigen Phasenverschiebungswinkeln ($\neq 120^\circ$).

Dreieckschaltung des Verbrauchers

Symmetrische Last
 $Z_{12} = Z_{23} = Z_{31}$
 $I_1 = I_2 = I_3$
 $I_{12} = I_{23} = I_{31}$
 $I_1 + I_2 + I_3 = 0$
 $P = UI\sqrt{3} \cos \varphi = 3P_{\text{Str}}$
 $P_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} I_{\text{Str}} \cos \varphi$
 $I_{\text{Str}} = \frac{I}{\sqrt{3}}$

Unsymmetrische Last
 $Z_{12} \neq Z_{23} \neq Z_{31}$
 $I_1 \neq I_2 \neq I_3$
 $I_{12} \neq I_{23} \neq I_{31}$
 $I_1 + I_2 + I_3 = 0$
 $P = P_{\text{Str}1} + P_{\text{Str}2} + P_{\text{Str}3}$
 $P_{\text{Str}1} = U_{12} I_{12} \cos \varphi_1$
 $P_{\text{Str}2} = U_{23} I_{23} \cos \varphi_2$
 $P_{\text{Str}3} = U_{31} I_{31} \cos \varphi_3$

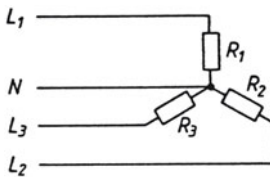
Leistung bei Stern-Dreieck-Umschaltung

Bedingungen: gleiche Außenleiterspannungen für beide Schaltungsarten und $R_{\text{Str}Y} = R_{\text{Str}\Delta}$

$$\frac{P_Y}{P_\Delta} = \frac{1}{3}$$

P_Y Leistung des Verbrauchers in Sternschaltung
 P_Δ Leistung des Verbrauchers in Dreieckschaltung

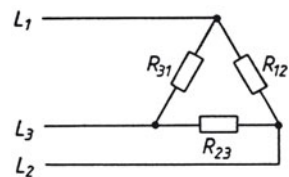
Leistung bei gestörten Drehstromschaltungen



$$R_1 = R_2 = R_3$$

Unterbrechung von	$P_{\text{Stör}}$
R_2	$\frac{2}{3}P$
R_2, N	$\frac{1}{2}P$
R_2, R_3	$\frac{1}{3}P$
R_2, R_3, N	0

$P_{\text{Stör}}$ Leistung der gestörten Schaltung
 P Leistung der ungestörten Schaltung



$$R_{12} = R_{23} = R_{31}$$

Unterbrechung von	$P_{\text{Stör}}$
R_{23}	$\frac{2}{3}P$
L_2	$\frac{1}{2}P$
R_{23}, R_{31}	$\frac{1}{3}P$
R_{23}, L_2	$\frac{1}{3}P$
R_{31}, L_2	$\frac{1}{6}P$

5.6.3 Stern-Dreieck-Umwandlung

Umwandlung einer Sternschaltung in eine gleichwertige Dreieckschaltung

Gegebene Originalschaltung	Gesuchte gleichwertige Schaltung	Umrechnungsbeziehungen
		$R_1 = R_x + R_z + \frac{R_x R_z}{R_y}$ $R_2 = R_x + R_y + \frac{R_x R_y}{R_z}$ $R_3 = R_y + R_z + \frac{R_y R_z}{R_x}$

Merkschema



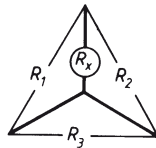
R_1 gesuchter Widerstand der Dreieckschaltung
 R_x, R_z benachbarte Widerstände der Sternschaltung
 R_y gegenüberliegender Widerstand der Sternschaltung

$$R_{\Delta} = \sum R_{y \text{ benachbart}} + \frac{\text{Produkt } R_{y \text{ benachbart}}}{R_y \text{ gegenüber}}$$

Umwandlung einer Dreieckschaltung in eine gleichwertige Sternschaltung

Gegebene Originalschaltung	Gesuchte gleichwertige Schaltung	Umrechnungsbeziehungen
		$R_x = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$ $R_y = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ $R_z = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

Merkschema



R_x gesuchter Widerstand der Sternschaltung
 R_1, R_2 benachbarte Widerstände der Dreieckschaltung
 R_y gegenüberliegender Widerstand der Dreieckschaltung

$$R_{\gamma} = \frac{\text{Produkt } R_{\Delta \text{ benachbart}}}{\sum R_{\Delta}}$$

Anmerkung

Die Umrechnungsbeziehungen gelten analog auch für Scheinwiderstände Z .

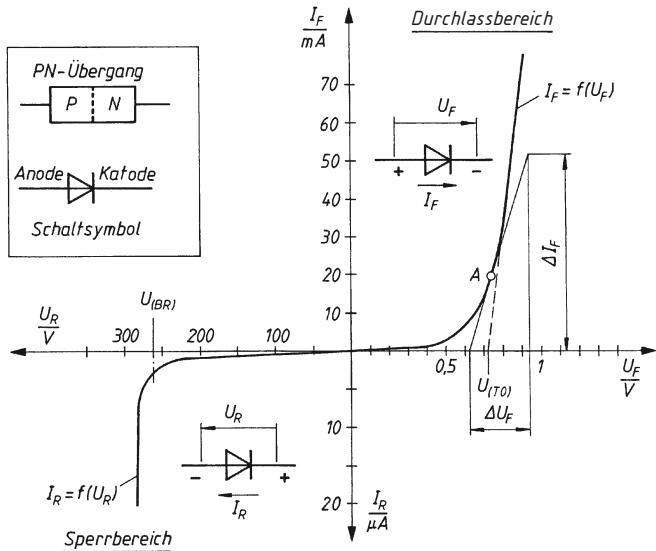
Beispiel für Z_1 :
 Umwandlung Stern in Dreieck $Z_1 = Z_x + Z_z + \frac{Z_x Z_z}{Z_y}$

5.7 Elementare Bauteile der Elektronik

5.7.1 Halbleiterdioden

5.7.1.1 Dioden zum Gleichrichten und Schalten

Typisches Kennlinienfeld einer Silizium-Diode



Durchbruchspannung $U_{(BR)}$ bis ≈ 3000 V
 Schwellenspannung $U_{(T0)} = 0,7$ V
 (Schwellenspannung)

Widerstandsverhalten

$$R_F = \frac{U_F}{I_F} \quad \begin{matrix} R_F \\ U_F \\ I_F \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Gleichstromwiderstand in Durchlassrichtung} \\ \text{Spannung in Durchlassrichtung} \\ \text{Strom in Durchlassrichtung} \end{matrix}$$

$$R_R = \frac{U_R}{I_R} \quad \begin{matrix} R_R \\ U_R \\ I_R \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Gleichstromwiderstand in Sperrichtung} \\ \text{Spannung in Sperrichtung} \\ \text{Strom in Sperrichtung} \end{matrix}$$

$$r_F = \frac{\Delta U_F}{\Delta I_F} \quad \begin{matrix} r_F \\ \Delta U_F \\ \Delta I_F \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Differenzieller Widerstand im Arbeitspunkt A} \\ \text{Differenz der Durchlassspannung} \\ \text{Differenz des Durchlassstromes} \end{matrix}$$

Verlustleistung

$$P_V = U_F I_F$$

1. Bedingung: $P_V \leq P_{tot}$ = totale Verlustleistung
2. Bedingung: Oberwellenfreie Gleichspannung

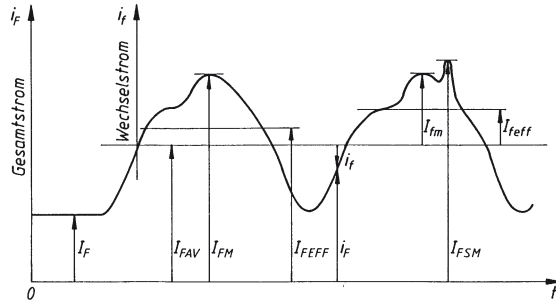
$$P_V = \frac{T_J - T_U}{R_{thJU}}$$

- T_J Sperrschichttemperatur
- T_U Umgebungstemperatur
- R_{thJU} Gesamtwärme-widerstand zwischen Sperrschicht und Umgebung

Elektrotechnik

Elementare Bauteile der Elektronik

Ströme und Stromgrenzwerte von Dioden in Vorwärtsrichtung



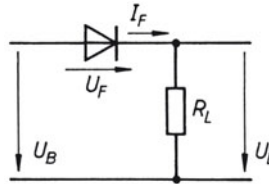
- I_F Gleichstromwert ohne Signal
- I_{FAV} Mittelwert des Gesamtstromes
- I_{FM} Scheitelwert des Gesamtstromes
- I_{FEFF} Effektivwert des Gesamtstromes
- I_{FSM} Stoßwert des Gesamtstromes
- i_f Augenblickswert des Gesamtstromes
- I_f Augenblickswert des Wechselstromes
- I_{fm} Scheitelwert des Wechselstromes
- I_{eff} Effektivwert des Wechselstromes

Beziehungen der Ströme

$$I_{FM} = I_{FAV} + I_{fm} \quad I_{FEFF} = \sqrt{I_{FAV}^2 + I_{eff}^2} \quad i_f = I_{FAV} + i_f$$

5.7.1.2 Dioden im Schaltbetrieb

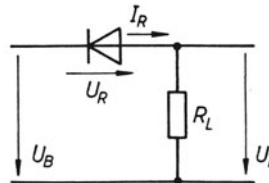
Diode leitet



- U_B Betriebsspannung
- U_F Durchlassspannung
- I_F Durchlassstrom
- R_L Lastwiderstand
- U_L Spannung am Lastwiderstand

$$U_B = U_F + I_F R_L$$

Diode sperrt



- I_R Strom in Sperrrichtung
- U_R Spannung in Sperrrichtung

$$U_B = U_R + I_R R_L$$

Maximale mögliche Schaltleistung der Diode

$$P_{Smax} = U_L I_{Fmax}$$

P_{Smax} max. mögliche Diodenschaltleistung

$$P_{Smax} = U_L \frac{P_{tot}}{U_F}$$

U_L Spannung am Lastwiderstand

I_{Fmax} maximaler Durchlassstrom

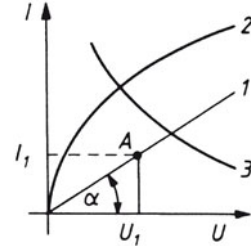
P_{tot} totale Verlustleistung

$$P_{Smax} = (U_B - U_F) \frac{P_{tot}}{U_F} = \left(\frac{U_B}{U_F} - 1 \right) P_{tot}$$

5.7.1.3 Nichtlinearer Widerstand, Arbeitspunkt

Benennungen

- 1 linearer Widerstand
- 2 nichtlinearer Widerstand mit positivem differentiellem Widerstand
- 3 nichtlinearer Widerstand mit negativem differentiellem Widerstand (gelegentlich als „negativer Widerstand“ bezeichnet). Strom nimmt ab bei steigender Spannung



Linearer Widerstand

Der Widerstandswert ist *unabhängig* vom Arbeitspunkt A

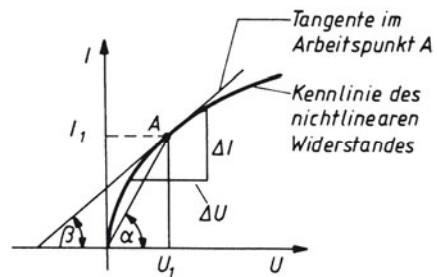
$$R = \frac{U_1}{I_1} = \text{konstant}$$

Nichtlinearer Widerstand

Der Widerstandswert ist *abhängig* vom Arbeitspunkt A

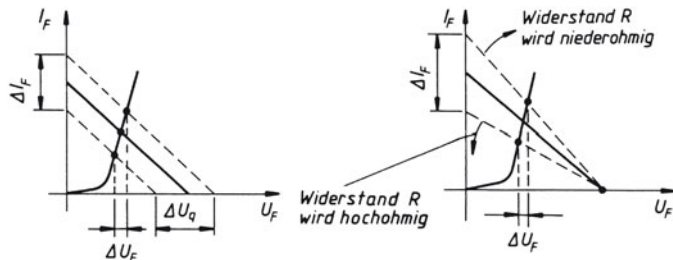
$$R = \frac{U_1}{I_1}$$

$$r = \frac{dU}{dI} \approx \frac{\Delta U}{\Delta I}$$



- R Gleichstromwiderstand, statischer Widerstand
r differentieller Widerstand, dynamischer Widerstand, Wechselstromwiderstand

Änderung des Arbeitspunktes



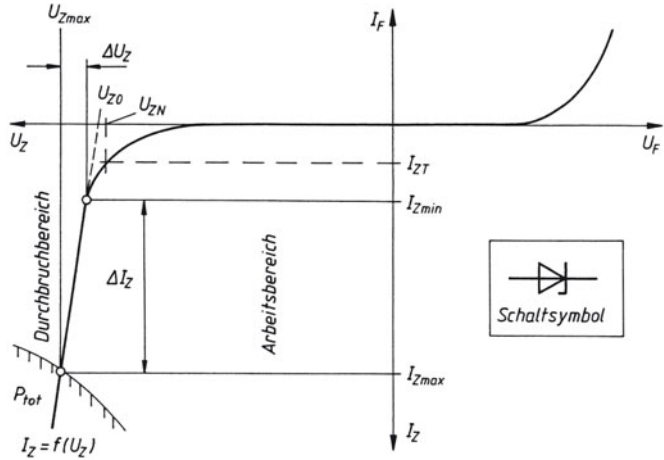
Einfluss der Quellenspannung U_q auf die Lage des Arbeitspunktes ($R = \text{konst.}$)

Einfluss des Widerstandes R auf die Lage des Arbeitspunktes ($U_q = \text{konst.}$)

Elektrotechnik
Elementare Bauteile der Elektronik

5.7.1.4 Z-Dioden

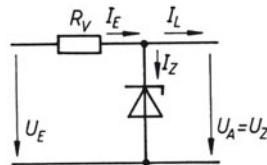
Kennlinie einer Z-Diode



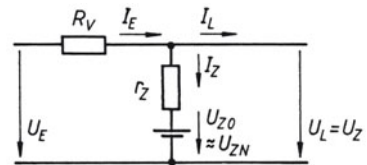
Benennungen

- U_Z Z-Arbeitsspannung (Durchbruchspannung)
- I_Z Z-Arbeitsstrom
- U_{ZN} Nennspannung der Z-Diode
- U_{Z0} Durchbruchspannung, extrapoliert für $I_Z = 0$
- I_{ZT} Messstrom (z. B. 5 mA)
- r_Z Statischer differentieller Widerstand im Durchbruchbereich
- r_{Zj} Dynamischer differentieller Widerstand im Durchbruchbereich (aus Datenblättern entnehmen)
- r_{Zth} Thermischer differentieller Widerstand im Durchbruchbereich
- α_{UZ} Temperaturkoeffizient der Arbeitsspannung
- ΔT_j Änderung der Sperrschichttemperatur
- R_{thJU} Gesamtwärmeleitwert

Schaltung und Ersatzschaltung



Schaltung mit Z-Diode



$$U_Z = U_{Z0} + I_Z r_Z \approx U_{ZN} + I_Z r_Z$$

Z-Diode als Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand r_Z

Statischer differentieller Widerstand

$$r_Z = \frac{\Delta U_Z}{\Delta I_Z} \quad r_Z = r_{Zj} + r_{Zth}$$

Im Arbeitsbereich ist $r_Z \approx$ konstant

Thermischer differentieller Widerstand

$$r_{Zth} = U_Z^2 \alpha_{UZ} R_{thJU}$$

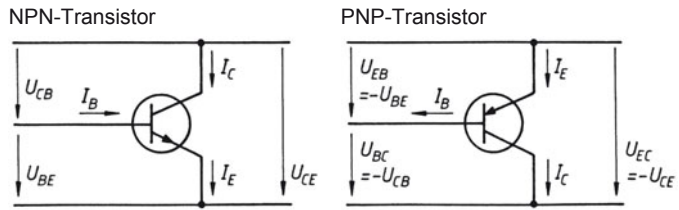
$$\Delta T_j = U_Z R_{thJU} \Delta I_L$$

$$\alpha_{UZ} = \frac{\Delta U_Z}{U_{ZN} \Delta T_j}$$

5.7.2 Transistoren

5.7.2.1 Bipolare Transistoren

Zählrichtungen für Spannungen und Ströme



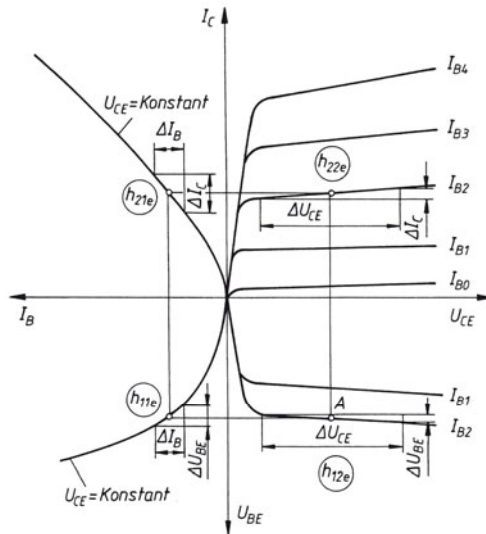
Ein NPN-Transistor zeigt in einer Schaltung die gleiche Wirkung wie ein PNP-Transistor. Dazu ist lediglich die Betriebsspannung umzupolen.

$I_E = I_C + I_B$	I_E	Emitterstrom
	I_C	Kollektorstrom
	I_B	Basisstrom
$U_{CE} = U_{CB} + U_{BE}$	U_{CE}	Kollektor-Emitter-Spannung
	U_{CB}	Kollektor-Basis-Spannung
	U_{BE}	Basis-Emitter-Spannung
		Bei Si-Transistoren $\approx (0,5 \dots 0,7) \text{ V}$

5.7.2.2 Kennlinien und Kenngrößen bipolarer Transistoren

Vierquadranten-Kennliniendarstellung eines Transistors

Stromsteuerkennlinie Ausgangskennlinienfeld



Eingangskennlinie Spannungs-Rückwirkungskennlinienfeld

Elektrotechnik

Elementare Bauteile der Elektronik

Statische Kennwerte des Transistors

Gleichstrom-Verstärkung

$$B = \frac{I_C}{I_B}$$

B Gleichstromverstärkung
 I_C Kollektorstrom
 I_B Basisstrom

Gleichstrom-Eingangswiderstand

$$R_{BE} = \frac{U_{BE}}{I_B}$$

R_{BE} Widerstand zwischen Basis und Emitter
 U_{BE} Basis-Emitter-Spannung

Gleichstrom-Ausgangswiderstand

$$R_{CE} = \frac{U_{CE}}{I_C}$$

R_{CE} Widerstand zwischen Kollektor und Emitter
 U_{CE} Kollektor-Emitter-Spannung

Restströme, Sättigungsspannung

$$I_{CEO} \approx B I_{CBO}$$

I_{CEO} Kollektor-Emitter-Reststrom ($I_B = 0$)
 I_{CES} Kollektor-Emitter-Reststrom ($U_{BE} = 0$)
 I_{CBO} Kollektor-Basis-Reststrom ($I_E = 0$)
 U_{CEsat} Sättigungsspannung, Restspannung zwischen Kollektor und Emitter

Dynamische Kennwerte des Transistors mit Vierpolparametern

Wechselstromverstärkung ($U_{CE} = \text{konst.}$)

$$\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = h_{21e}$$

β Wechselstrom-Verstärkungsfaktor ($\approx B$)
 ΔI_C Differenz des Kollektorstromes
 ΔI_B Differenz des Basisstromes

Dynamischer Eingangswiderstand ($U_{CE} = \text{konst.}$)

$$r_{BE} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B} = h_{11e}$$

r_{BE} Differentieller Eingangswiderstand
 ΔU_{BE} Differenz der Basis-Emitter-Spannung
 ΔI_B Differenz des Basisstromes

Dynamischer Ausgangswiderstand ($I_B = \text{konst.}$)

$$r_{CE} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C} = \frac{1}{h_{22e}}$$

r_{CE} Differentieller Ausgangswiderstand
 ΔU_{CE} Differenz der Kollektor-Emitter-Spannung
 ΔI_C Differenz des Kollektorstromes

Leerlaufspannungsrückwirkung ($I_B = \text{konst.}$)

$$D_U = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta U_{CE}} = h_{12e}$$

D_U Leerlaufspannungsrückwirkung
 ΔU_{BE} Differenz der Basis-Emitter-Spannung
 ΔU_{CE} Differenz der Kollektor-Emitter-Spannung

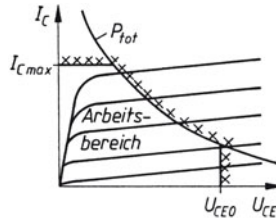
Steilheit ($U_{CE} = \text{konst.}$)

$$S = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{BE}}$$

S Steilheit
 ΔI_C Differenz des Kollektorstromes
 ΔU_{BE} Differenz der Basis-Emitter-Spannung

Grenzwerte des Transistors

Grenzwerte und Kennlinien



P_{tot} totale Verlustleistung
 I_{Cmax} maximaler Kollektorstrom
 U_{CE0} Kollektor-Emitter-Sperrspannung bei offener Basis ($I_B = 0$)
 U_{CEmax} Temperaturgrenzwerte für die T_{Umax}
 T_{Umax} maximale Umgebungs- bzw. Sperrschichttemperatur
 T_{jmax} für Silizium $\approx (150 \dots 200)^\circ C$

Verlustleistung

$$P_V = U_{CE} I_C + U_{BE} I_B \leq P_{tot}$$

$$P_V \approx U_{CE} I_C \leq P_{tot}$$

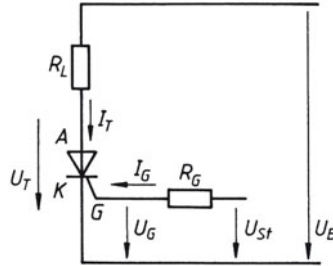
$$I_{Cmax} \leq \frac{P_{tot}}{U_{CE}}$$

P_{tot} gilt für eine vom Hersteller definierte Umgebungstemperatur T_U (meist $25^\circ C$).

5.7.3 Thyristoren

5.7.3.1 Grundsaltung und Kenndaten

Grundsaltung



- A Anode
- K Katode
- G Gate (Steueranschluss)
- R_L Lastwiderstand
- R_G Gatwiderstand
- U_B Betriebsspannung
- U_G Steuerspannung
- U_{St} Steuerkreisspannung
- U_T Durchlassspannung
- I_T Durchlassstrom
- I_G Steuerstrom

Ströme

$$I_T = \frac{U_B - U_T}{R_L} \approx \frac{U_B}{R_L} \quad \text{Lastkreis}$$

$$I_G = \frac{U_{St} - U_G}{R_G} \quad \text{Steuerkreis}$$

Verlustleistung

$$P_V = U_T I_T + U_G I_G \approx 1,1 U_T I_T$$

Kenndaten

Vorwärtsrichtung

- U_T, U_F Durchlassspannung
- U_D Vorwärts-Sperrspannung
- U_{DRM} Periodische Vorwärts-Spitzensperrspannung
- U_(BO) Kippspannung
- U_{(BO)0} Nullkippspannung
- U_H Haltespannung
- I_T, I_F Durchlassstrom
- I_{TAV} Mittelwert des Durchlassstromes (Dauergrenzstrom)
- I_{TEFF} Effektivwert des Durchlassstromes
- I_D Vorwärts-Sperrstrom
- I_H Haltestrom
- I_(BO) Kippstrom

Rückwärtsrichtung

- U_R Rückwärts-Sperrspannung
- U_{RRM} Periodische Rückwärts-Spitzensperrspannung
- U_{RSM} Rückwärts-Stoßspitzensperrspannung
- U_(BR) Durchbruchspannung
- I_R Rückwärts-Sperrstrom
- I_{RRM} Periodische Rückstromspitze

Elektrotechnik

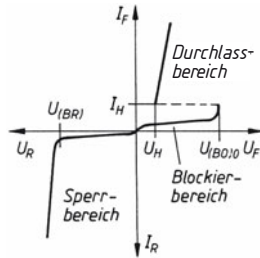
Elementare Bauteile der Elektronik

5.7.3.2 Ausgewählte Thyristorbauelemente

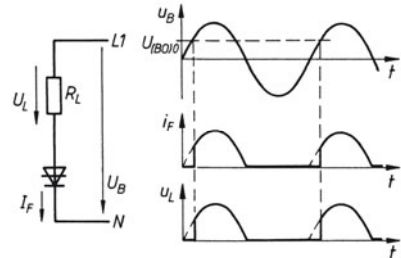
Vierschichtdiode (Einrichtungsthyristordiode)



Charakteristische Kennlinie



Schaltung und Schaltverhalten



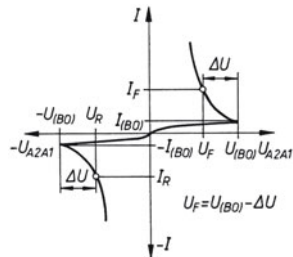
Auswahl typischer Werte: Nullkippspannung $U_{(BO)0} \approx 50 \text{ V}$
 Haltestrom $I_H \approx 10 \text{ mA bis } 50 \text{ mA}$
 Haltespannung $U_H \approx 1 \text{ V}$
 Durchlassstrom $I_F \approx \text{bis } 200 \text{ mA}$

Anwendungsbeispiele: Kippschaltungen, Impulsverstärker, Zählstufen. Zum Ansteuern von Thyristortrioden (Thyristoren).

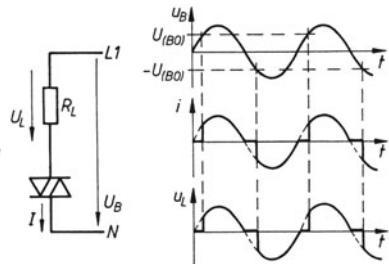
Diac (Zweirichtungs-Diode im Dreischichtaufbau)



Charakteristische Kennlinie



Schaltung und Schaltverhalten



Auswahl typischer Werte: Kippspannung $U_{(BO)} \approx 30 \text{ V}$
 Rücklaufspannung $\Delta U \approx 6 \text{ V}$ für einen definierten Strom I_F bzw. I_R (z. B. 10 mA)
 Max. Durchlassstrom $I_{\text{max}} \approx \text{bis } 3 \text{ A}$

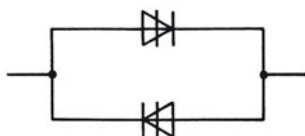
Anwendungsbeispiele: Hauptsächlich zur Ansteuerung von Triacs und als kontaktloser Schalter.

Diac (Zweirichtungs-Thyristordiode)



Der DIAC wird auch als Zweirichtungs-Thyristordiode ausgeführt. Das entspricht der Antiparallelschaltung von zwei Thyristordioden.

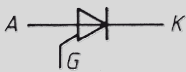
Antiparallelschaltung



**Thyristor
(Einrichtungs-
Thyristortriode)**

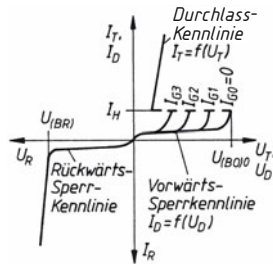


P-Gate-Thyristor

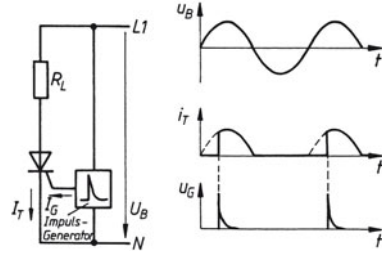


N-Gate-Thyristor

Charakteristische Kennlinie



Schaltung und Schaltverhalten



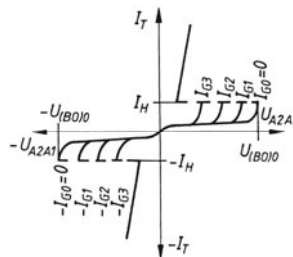
Auswahl typischer Werte: Spitzensperrspannung $U_{RRM} \approx 50 \text{ V bis } 5000 \text{ V}$
 Dauergrenzstrom $I_{TAV} \approx 0,5 \text{ A bis } > 1000 \text{ A}$
 Zündspannung $U_G \approx 1 \text{ V bis } 5 \text{ V}$
 Zündstrom $I_G \approx 10 \text{ mA bis } 500 \text{ mA}$

Anwendungsbeispiele: Als Leistungsschalter in Gleich-, Wechsel- und Drehstromkreisen. Als steuerbarer Stromrichter im Wechselstromkreis.

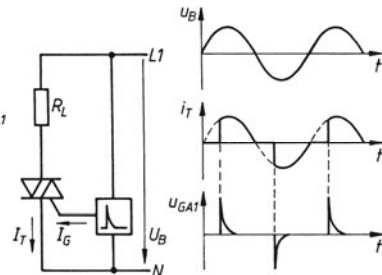
**Triac
(Zweirichtungs-
Thyristortriode)**



Charakteristische Kennlinie



Schaltung und Schaltverhalten



Auswahl typischer Werte: Spitzensperrspannung $U_{DRM} \approx \text{bis } 1500 \text{ V}$
 Durchlassstrom $I_{TEFF} \approx \text{bis } 50 \text{ A}$

Anwendungsbeispiele: Steuerung kleiner bis mittlerer Wechselstromleistungen. Phasenanschnittsteuerung.

**GTO-Thyristor
(Abschaltthyristortriode)**



GTO (Gate-Turn-Off)-Thyristoren sind Thyristoren, die durch geeignete Steuerimpulse nicht nur vom Sperrzustand in den Durchlasszustand, sondern auch umgekehrt umgeschaltet werden können.

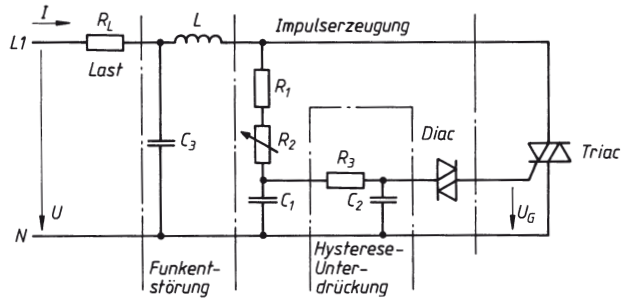
- Der Steuerstrom zum *Abschalten* eines GTO-Thyristors beträgt etwa 1/4 des Laststromes.
- GTO-Thyristoren werden u. a. in *Wechselrichter-Schaltungen* eingesetzt zur Umwandlung von Gleichspannung in Wechselspannung.

Elektrotechnik

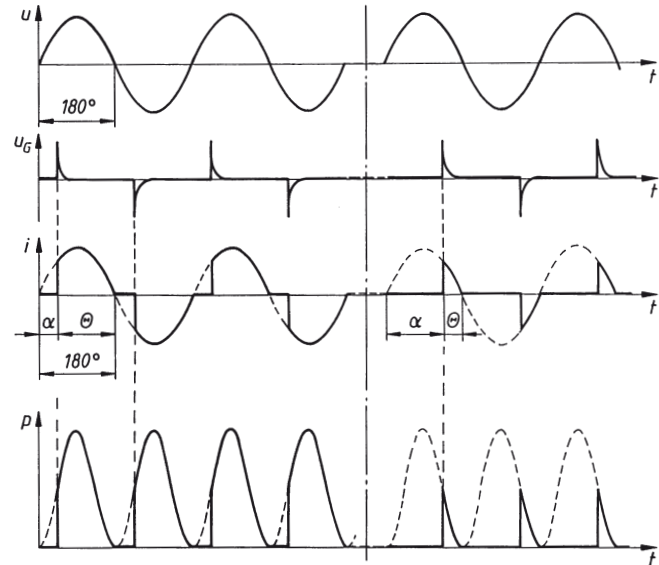
Elementare Bauteile der Elektronik

5.7.3.3 Phasenanschnittsteuerung

Phasenanschnittschaltung mit Diac und Triac



Phasenanschnittsteuerung mit Diac und Triac



u	Netzspannung	α	Zündverzögerungswinkel
u_G	Steuerimpulse	θ	Stromflusswinkel
i	Laststrom	$\alpha + \theta = 180^\circ$	
p	im Lastwiderstand umgesetzte Leistung		

Beschreibung der Steuerung

- Die Steuerschaltung liefert netzsynchrone Zündimpulse
- Steuerbar zwischen den Zündverzögerungswinkeln 0° bis 180°
- Stufenlose Leistungssteuerung zwischen P_0 und P_{\max}

6.1 Grundbegriffe

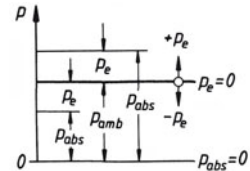
absoluter Druck p_{abs}

$$p_{abs} = p_{amb} + p_e \quad \text{(bei Überdruck)}$$

$$p_{abs} = p_{amb} - p_e \quad \text{(bei Unterdruck)}$$

p_e atmosphärische Druckdifferenz, Überdruck

p_{amb} umgebender Atmosphärendruck



Normvolumen V_n

ist das Volumen einer beliebigen Gasmenge im Normzustand. Einheit m^3 .

Physikalischer Normzustand: $T = 273,15 \text{ K}$; $p = 101325 \text{ N/m}^2 = 1,013 \text{ bar}$
 Das molare Normvolumen des idealen Gases beträgt $V_{mn} = 22,415 \text{ m}^3/\text{kmol}$

spezifisches Volumen v (6.9)

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\varrho}$$

v in m^3/kg (6.9)

V Volumen in m^3

m Masse in kg

ϱ Dichte in kg/m^3 (6.9)

Beachte: v ist der Quotient aus Volumen V und Masse m . ϱ ist der Quotient aus Masse m und Volumen V . Die Wichte $\gamma = \varrho g$ soll nicht mehr benutzt werden!

spezifisches Normvolumen v_n (6.9)

$$v_n = \frac{V_n}{m} \quad \text{ist das spezifische Volumen im Normzustand (siehe oben)}$$

Wärme Q

$$Q = m c \Delta T = m c (t_2 - t_1)$$

1 Joule (J) = 1 Nm = 1 Ws.

Das J ist die gesetzliche Einheit der Energie, der Wärme und der Arbeit. Das Kelvin (K) ist die gesetzliche Einheit der Temperatur (1 K = 1°C).

Q	m	c	ΔT	t_2, t_1
J	kg	$\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$	K	K oder °C

m Masse

c spezifische Wärmekapazität (6.10 und 6.11)

K und °C siehe 6.7

spezifische Wärme q

$$q = \frac{Q}{m}$$

q	Q	m
$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$	J	kg

spezifische Wärmekapazität c (6.10 und 6.11)

gibt die Wärme (Wärmemenge) in J an, die erforderlich ist, um 1 kg oder 1 g eines Stoffes um 1 Kelvin (1 K) zu erwärmen, c ist temperatur- und druckabhängig.

mittlere spezifische Wärmekapazität c_{m12} zwischen t_1 und t_2 (6.10 und 6.11)

$$c_{m12} = \frac{c_{m02} t_2 - c_{m01} t_1}{t_2 - t_1}$$

c_{m02} ist mittlere spezifische Wärmekapazität zwischen 0°C und t_2

c_{m01} entsprechend zwischen 0°C und t_1

Mischungstemperatur t_g (Gemischtemperatur)

$$t_g = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

K und °C siehe 6.7

t	m	c
K oder °C	kg	$\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$

Thermodynamik

Wärmeausdehnung

Schmelzenthalpie q_s
(6.12)

gibt die Wärme in J an, die nötig ist, um die Stoffmenge 1 kg des Stoffes bei der jeweiligen Schmelztemperatur zu schmelzen.

Verdampfungsenthalpie q_v
(6.13 und 6.15)

gibt die Wärme in J an, die nötig ist, um die Stoffmenge 1 kg des Stoffes bei der jeweiligen Siedetemperatur in den gasförmigen Zustand zu überführen.

Energieprinzip
(H. v. Helmholtz)

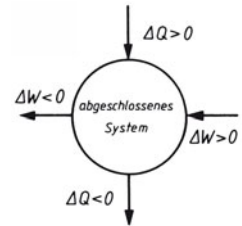
Der Energieinhalt eines abgeschlossenen Systems kann bei irgendwelchen Veränderungen innerhalb des Systems weder zu- noch abnehmen:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

ΔU Zuwachs an innerer Energie
 ΔW Arbeit
 ΔQ Wärme

ΔU	ΔQ	ΔW
J	J	Nm = J

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws}$$



$$\eta_{\text{th}} = \frac{\Delta W}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_1 - |\Delta Q_2|}{\Delta Q_1} = 1 - \frac{|\Delta Q_2|}{\Delta Q_1}$$

thermischer Wirkungsgrad η_{th}

6.2 Wärmeausdehnung

Längenzunahme Δl nach Erwärmung

$$\Delta l = l_1 \alpha_l (t_2 - t_1)$$

Länge l_2 nach Erwärmung

$$l_2 = l_1 [1 + \alpha_l (t_2 - t_1)]$$

Volumenzunahme ΔV nach Erwärmung

$$\Delta V \approx V_1 \alpha_v (t_2 - t_1)$$

Volumen V_2 nach Erwärmung

$$V_2 \approx V_1 [1 + \alpha_v (t_2 - t_1)]$$

Volumenzunahme ΔV nach Erwärmung

$$\Delta V = V_1 \frac{\alpha_v (t_2 - t_1)}{1 + \alpha_v t_1}$$

Volumen V_2 nach Erwärmung

$$V_2 = V_1 \frac{1 + \alpha_v t_2}{1 + \alpha_v t_1}$$

Wärmeausdehnung fester Körper (6.16)

l	V	α_l, α_v	t
m	m^3	$\frac{1}{\text{K}}$	K oder $^{\circ}\text{C}$

α_l Längenausdehnungskoeffizient
(6.16)

α_v Volumenausdehnungskoeffizient
(6.16): $\alpha_v \approx 3 \alpha_l$ für feste Körper

V_1 Volumen vor Erwärmung

K und $^{\circ}\text{C}$ siehe 6.7

Wärmeausdehnung flüssiger Körper (6.17)

V	α_v	t
m^3	$\frac{1}{\text{K}}$	K oder $^{\circ}\text{C}$

K und $^{\circ}\text{C}$ siehe 6.7

Wärmeausdehnung von Gasen

Vollkommene Gase dehnen sich bei Erwärmung um $1 \text{ K} = 1 ^{\circ}\text{C}$ (bei gleich bleibendem Druck) um den 273,15ten Teil des Volumens aus, das sie bei $0 ^{\circ}\text{C} = 273,15 \text{ K}$ und 101325 Pa (Normvolumen) einnehmen. $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$. Temperatur-Umrechnung siehe 6.7.

**Volumenausdehnungs-
koeffizient α_V**
(konstant für alle
vollkommenen Gase)

$$\alpha_V = \frac{1}{273,15} \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3 \text{K}} = \frac{1}{273,15} \frac{1}{\text{K}} \quad \text{oder}$$

$$\alpha_V = \frac{1}{273,15} \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3 \text{ } ^\circ\text{C}} = \frac{1}{273,15} \frac{1}{\text{ } ^\circ\text{C}} = 0,00366 \frac{1}{\text{ } ^\circ\text{C}}$$

**Gesetz von
Gay-Lussac**

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

gilt bei $p = \text{konstant}$ gilt bei $V = \text{konstant}$

**Gesetz von
Boyle-Mariotte**

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$$

gilt bei $t = \text{konstant}$

V	T	p
m^3	K	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$

**Volumenzunahme ΔV
nach Erwärmung**

$$\Delta V = \frac{V_0}{273,15} (T_2 - T_1) = \frac{V_1}{T_1} (T_2 - T_1)$$

T Temperatur (thermodynamische Temperatur). Zwischen dieser und der Celsiusstemperatur t eines Körpers gilt:
 $T = t + 273,15 \text{ K}$
(siehe 6.7)

**Volumen V_2 nach
Erwärmung**

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

6.3 Wärmeübertragung

Wärmeleitung

Wärmeleitung (6.18 bis 6.20)

ist der Wärmetransport von Teilchen zu Teilchen innerhalb eines Stoffes.

Wärmeleitfähigkeit λ
(6.18 bis 6.20)

gibt die Wärme in J an, die in 1 s bei einem Durchtrittsquerschnitt von 1 m^2 und einem Temperaturunterschied von 1 K durch die Stoffdicke von 1 m hindurchströmt. λ ändert sich mit der Temperatur und bei Gasen auch mit dem Druck.

**Wärmestrom Φ_{th} bei
ebener Wand und bei
dünnwandigem Rohr**

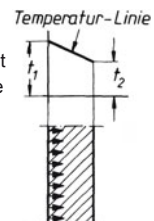
$$\Phi_{\text{th}} = \lambda \frac{A}{s} (t_1 - t_2)$$

$$\Phi_{\text{th}} = \frac{\text{Wärme } Q}{\text{Zeit } t}$$

$A = \pi d L$ innere Mantelfläche
 t_1, t_2 Oberflächentemperaturen
 s Wanddicke
 t Zeit

Φ_{th}	λ	A	s, l, D, d	t
W	$\frac{\text{J}}{\text{m s k}} = \frac{\text{W}}{\text{Km}}$	m^2	m	$^\circ\text{C}$

Beachte: Weil 1 Joule je Sekunde gleich 1 Watt ist ($1 \text{ J/s} = 1 \text{ W}$), wird für die Einheit der Wärmeleitfähigkeit λ das Watt je Kelvin und Meter (W/Km) benutzt.



Thermodynamik

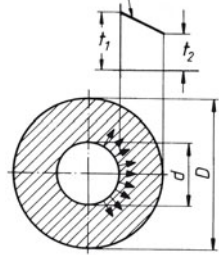
Wärmeübertragung

Wärmestrom Φ_{th} bei dickwandigem Rohr

$$\Phi_{th} = \frac{2\pi \lambda l}{\ln \frac{D}{d}} (t_1 - t_2)$$

- l Rohrlänge in m
- D Außendurchmesser in m
- d Innendurchmesser in m

Temperatur-Linie



Wärmestrom Φ_{th} bei ebener mehrschichtiger Wand

$$\Phi_{th} = \frac{A(t_1 - t_2)}{\sum \frac{s}{\lambda}}$$

- s Wanddicke in m
- In natürlicher Logarithmus
- Φ_{th} Wärmestrom in J/s = W

Wärmestrom Φ_{th} bei mehrschichtigem Hohlzylinder

$$\Phi_{th} = \frac{2\pi l(t_1 - t_2)}{\sum \frac{1}{\lambda} \ln \frac{D}{d}}$$

Beachte: $1 \frac{J}{s} = W$

Wärmestrom Φ_{th} bei mehrschichtiger Hohlkugel

$$\Phi_{th} = \frac{2\pi(t_1 - t_2)}{\sum \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right)}$$

Wärmeübergang (6.21)

Wärmeübergang

ist die Wärmeübertragung durch Konvektion von einem flüssigen oder gasförmigen Medium an eine feste Wand und umgekehrt.

Wärmeübergangszahl α (Wärmeübergangs-koeffizient)

gibt die Wärme in J an, die bei einer Berührungsfläche von 1 m² und einer Temperaturdifferenz von 1 K in 1 s übergeht. Die große Zahl von Einflussgrößen macht die Bestimmung von α schwierig.

Wärmestrom Φ_{th}

$$\Phi_{th} = \alpha A (t_{fl} - t_w)$$

- A wärmeübertragende Fläche
- t_{fl} mittlere Temperatur des strömenden Mediums
- t_w Wandtemperatur

Φ_{th}	α	A	t
W	$\frac{J}{m^2 sk} = \frac{W}{m^2 K}$	m ²	K

Formeln für Wärmeübergangszahl $\alpha_{Luft, 20^\circ C}$ in J/m² sK = W/m²K (nach Jürges)

für Luftgeschwindigkeit	$w < 5$ m/s	$w > 5$ m/s
glatte, polierte Wand	$\alpha = 5,6 + 3,9 w$	$\alpha = 7,1 w^{0,78}$
Wand mit Walzhaut	$\alpha = 5,8 + 3,9 w$	$\alpha = 7,14 w^{0,78}$
raue Wand	$\alpha = 6,2 + 4,2 w$	$\alpha = 7,52 w^{0,78}$

Wärmedurchgang

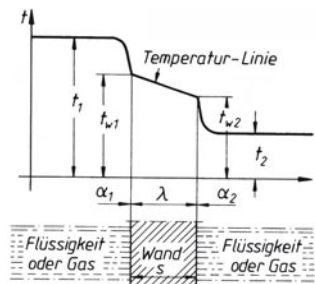
ist die Wärmeübertragung von einem flüssigen oder gasförmigen Körper durch eine Trennwand auf einen kälteren flüssigen oder gasförmigen Körper.

Teil Vorgänge:

Wärmeübergang Flüssigkeit (t_1)
→ Wandoberfläche (t_{w1})

Wärmeleitung Wandoberfläche (t_{w1})
→ Wandoberfläche (t_{w2})

Wärmeübergang Wandoberfläche (t_{w2})
→ kältere Flüssigkeit (t_2)



Wärmedurchgangszahl k (6.22)
(Wärmedurchgangskoeffizient)

gibt die Wärme in J an, die bei einer Wandfläche von 1 m^2 und einer Temperaturdifferenz von 1 K in 1 s hindurchgeht

Wärmestrom Φ_{th}

$$\Phi_{\text{th}} = k A (t_1 - t_2)$$

A Durchgangsfläche
 t Temperatur

Φ_{th}	k	A	t
W	$\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{sK}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$	m^2	K

Wärmedurchgangszahl k für ebene mehrschichtige Wand

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

k, α	λ	s, d, D	$\ln(D/d)$
$\frac{\text{W}}{\text{Km}^2}$	$\frac{\text{W}}{\text{Km}}$	m	1

für mehrschichtigen Hohlzylinder

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_i}{2} \sum \frac{1}{\lambda} \ln \frac{D}{d} + \frac{d_i}{\alpha_a D_a}}$$

d_i Innendurchmesser der innersten Schicht

D_a Außendurchmesser der äußersten Schicht

für mehrschichtige Hohlkugel

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_i}{2} \sum \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right) + \frac{d_i^2}{\alpha_a D_a^2}}$$

$\frac{D}{d} > 1$ Durchmesserverhältnis einer Schicht

ln natürlicher Logarithmus

Wärmestrahlung (6.23)

Stefan-Boltzmann'sches Gesetz

$$\Phi_s = C_s A T^4$$

Φ_s Strahlungsfluss

Φ	C	A	T	ε
W	$\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{sK}^4} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$	m^2	K	1

allgemeine Strahlungskonstante

$$C_s = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{sK}^4} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

Strahlungsfluss Φ des wirklichen Körpers

$$\Phi = C A T^4 = \varepsilon C_s A T^4$$

$$\Phi = \varepsilon Q_s$$

$\varepsilon = C/C_s$ Emissionsverhältnis

C Strahlungszahl, beide nach 6.23

A parallel gegenüberstehende Flächen der Temperatur T_1, T_2

C_1, C_2 Strahlungszahlen der Körper

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ Emissionsverhältnis nach 6.23

Strahlungsfluss Φ

$$\Phi_{1,2} = C_{1,2} A (T_1^4 - T_2^4)$$

Strahlungsaustauschzahl $C_{1,2}$

$$C_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s}} = \frac{C_s}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Thermodynamik

Gasmechanik

6.4 Gasmechanik

allgemeine Zustandsgleichung idealer Gase

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2} \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{p v}{T} = \frac{p_0 v_0}{273\text{K}} \quad \frac{p V}{T} = \frac{p_0 V_0}{273\text{K}}$$

$$p v = R_i T; \quad p V = m R_i T; \quad p = \varrho R_i T$$

p Druck
 v spezifisches Volumen
 R_i spezifische Gaskonstante (individuelle Gaskonstante)
 T Temperatur
 V Volumen
 m Masse
 ϱ Dichte

p	v	R_i	T	V	m	ϱ
$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$	$\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$	K	m^3	kg	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

spezifische Gaskonstante R_i (6.24)

ist eine Stoffkonstante, die durch Messung der zugehörigen Größen p , v , T bestimmt werden kann. Sie stellt die Raumschaffungsarbeit dar, die von 1 kg Gas verrichtet wird, wenn diese Gasmenge bei $p = \text{konstant}$ um 1 K erwärmt wird: $R_i = c_p - c_v$ (c_p spezifische Wärmekapazität bei $p = \text{konstant}$, c_v bei $V = \text{konstant}$, Werte in 6.11)

$$R_i = \frac{R}{M} \quad M \text{ molare Masse oder stoffmengenbezogene Masse (siehe 6.24)}$$

universelle Gaskonstante R

$$R = 8315 \frac{\text{J}}{\text{kmolK}}$$

R ist von der chemischen Beschaffenheit eines Gases unabhängig

molares Normvolumen V_{mn}

$$V_{mn} = 22,415 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} \quad (\text{bei } 0^\circ\text{C und } 101325 \text{ Pa; } 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2)$$

v_0 ist (unabhängig von der Gasart) das von 1 kmol eingenommene Volumen beim physikalischen Normzustand (6.1)

spezifische Wärmekapazitäten c_v und c_p bei konstantem Volumen und bei konstantem Druck (6.11)

$$c_v = \frac{1}{\kappa - 1} R_i$$

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R_i$$

$$R_i = c_p - c_v$$

c_v, c_p	κ	R_i
$\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$	1	$\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$

$$1 \text{ Nm} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Ws}$$

Verhältnis $\kappa = c_p / c_v$ (6.24)

innere Energie U

$$U = m c_v \Delta T$$

spezifische innere Energie u

$$u = c_v \Delta T$$

$$u = \frac{U}{m}$$

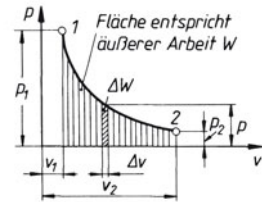
m	U	u	c_v	$\Delta T, t_1, t_2$
kg	J	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$	$\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$	K

Änderung der spezifischen inneren Energie Δu

$$\Delta u = u_2 - u_1 = c_v (t_2 - t_1)$$

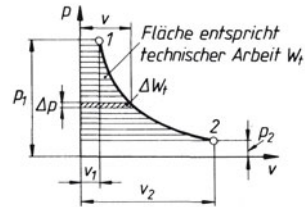
äußere Arbeit W
(absolute) eines
Gases (Volumen-
änderungsarbeit)

$$W = \sum_{v_1}^{v_2} \Delta W = \sum_{v_1}^{v_2} p \Delta v$$



technische Arbeit W_t
(Druckänderungsarbeit)

$$W_t = \sum_{p_1}^{p_2} \Delta W_t = \sum_{p_1}^{p_2} v \Delta p$$



W, W_t	p	v
$\frac{J}{kg}$	$\frac{N}{m^2} = Pa$	$\frac{m^3}{kg}$

Enthalpie H

$$H = m c_p \Delta T$$

H	h	m	c_p	$\Delta T, t_1, t_2$
J	$\frac{J}{kg}$	kg	$\frac{J}{kg K}$	K

spezifische
Enthalpie h

$$h = c_p \Delta T$$

Änderung der
spezifischen
Enthalpie Δh

$$\Delta h = h_2 - h_1 = c_p (t_2 - t_1)$$

6.5 Gleichungen für Zustandsänderungen und Carnot'scher Kreisprozess

Isochore (isovolume) Zustandsänderung

Das Gasvolumen v bleibt während der Zustandsänderung konstant ($v = \text{konstant}$); damit ist auch $p/T = \text{konstant}$:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \text{konstant}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{273^\circ + \vartheta_1}{273^\circ + \vartheta_2}$$

$q(u)$	c	T	h	κ
$\frac{J}{kg}$	$\frac{J}{kg K}$	K	$\frac{J}{kg}$	1

s	W	v	p
$\frac{J}{kg K}$	$\frac{J}{kg}$	$\frac{m^3}{kg}$	$\frac{N}{m^2} = Pa$

c_p, c_v nach 6.11
 κ nach 6.24

Thermodynamik

Gleichungen für Zustandsänderungen und Carnot'scher Kreisprozess

zu- oder abgeführte
Wärme Δq

$$\Delta q = c_v (T_2 - T_1) = \frac{R_i}{\kappa - 1} (T_2 - T_1)$$

Änderung der inneren
Energie Δu

$$\Delta u = c_v (T_2 - T_1) = \frac{R_i}{\kappa - 1} (T_2 - T_1)$$

Änderung der
Enthalpie Δh

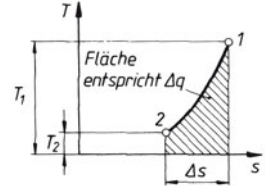
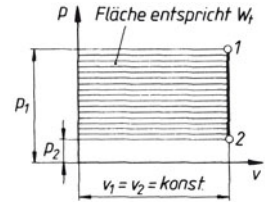
$$\Delta h = c_p (T_2 - T_1)$$

Änderung der
Entropie Δs

$$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}$$

technische Arbeit W_t
(äußere Arbeit $W = 0$)

$$W_t = v(p_1 - p_2) = (\kappa - 1)\Delta u$$



Isobare Zustandsänderung

Der Gasdruck p bleibt während der Zustandsänderung konstant ($p = \text{konstant}$); damit ist auch $v/T = \text{konstant}$:

$q(u)$	c	T	h	κ
$\frac{J}{kg}$	$\frac{J}{kgK}$	K	$\frac{J}{kg}$	1

$$\frac{v_1}{T_1} = \frac{v_2}{T_2} = \text{konstant}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{273\text{ K} + t_1}{273\text{ K} + t_2} = \frac{V_1}{V_2}$$

s	W	v	p
$\frac{J}{kgK}$	$\frac{J}{kg}$	$\frac{m^3}{kg}$	$\frac{N}{m^2} = Pa$

c_p, c_v nach 6.11
 κ nach 6.24

zu- oder abgeführte
Wärme Δq

$$\Delta q = c_p (T_2 - T_1) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R_i (T_2 - T_1)$$

Änderung der inneren
Energie Δu

$$\Delta u = c_v (T_2 - T_1)$$

Änderung der
Enthalpie Δh

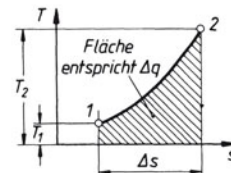
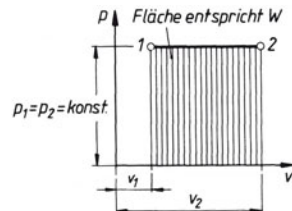
$$\Delta h = c_p (T_2 - T_1)$$

Änderung der
Entropie Δs

$$\Delta s = c_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

äußere Arbeit W
(technische Arbeit
 $W_t = 0$)

$$W = p(v_2 - v_1) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \Delta q$$



Isotherme Zustandsänderung

Die Temperatur T bleibt während der Zustandsänderung konstant ($T = \text{konstant}$); damit ist auch $pV = \text{konstant}$:

Einheiten siehe 6.5 (isochore Zustandsänderung)

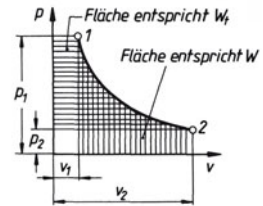
$$p_1 v_1 = p_2 v_2 = \text{konstant}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

zu- oder abgeführte Wärme Δq

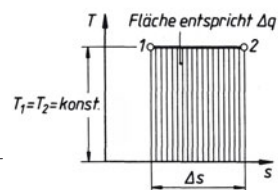
$$\Delta q = R_i T \ln \frac{v_2}{v_1} = R_i T \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Änderung der inneren Energie $\Delta u = 0$
ebenso Änderung der Enthalpie $\Delta h = 0$



Änderung der Entropie Δs

$$\Delta s = R_i \ln \frac{v_2}{v_1} = R_i \ln \frac{p_1}{p_2}$$



äußere Arbeit W
(technische Arbeit $W_t = \Delta q$)

$$W = W_t = \Delta q = R_i T \ln \frac{v_2}{v_1} = R_i T \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Adiabate (isentropie) Zustandsänderung

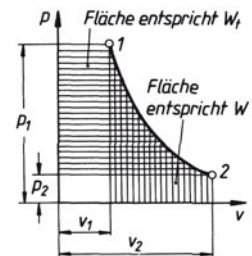
Während der Zustandsänderung wird Wärme weder zu- noch abgeführt ($\Delta q = 0$, also auch $\Delta s = 0$); damit wird $pV^\kappa = \text{konstant}$:

Einheiten siehe 6.5 (isochore Zustandsänderung)

$$p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa = \text{konstant}$$

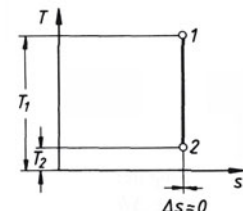
$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^\kappa = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\kappa/\kappa-1}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\kappa-1/\kappa}$$



Änderung der inneren Energie Δu (\cong | äußere Arbeit W)

$$\Delta u = c_v (T_2 - T_1)$$



Thermodynamik

Gleichungen für Zustandsänderungen und Carnot'scher Kreisprozess

Änderung der
Enthalpie Δh

$$\Delta h = c_p (T_2 - T_1) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 v_1 \frac{T_2}{T_1} - 1$$

$$\Delta h = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 v_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\kappa - 1 / \kappa} - 1 \right] = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 v_1 \left[\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa - 1} - 1 \right]$$

Änderung der
Entropie Δs

$$\Delta s = 0$$

äußere Arbeit W
($\cong |\Delta u|$)

$$W = c_v (T_1 - T_2) = \frac{1}{\kappa - 1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) = \frac{p_1 v_1}{\kappa - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

$$W = \frac{p_1 v_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\kappa - 1 / \kappa} \right] = \frac{p_1 v_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa - 1} \right]$$

technische Arbeit W_t
($\cong |\Delta h|$)

$$W_t = c_p (T_1 - T_2) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 v_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

$$W_t = \kappa A = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\kappa - 1 / \kappa} \right] = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa - 1} \right]$$

Polytrophe Zustandsänderung

Allgemeinste Zustandsänderung nach dem Gesetz $p v^n = \text{konstant}$. Die anderen Zustandsänderungen sind Sonderfälle der polytropen Zustandsänderung. Exponent n kann von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren.

Einheiten siehe 6.5
(isochore Zustandsänderung)

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n = \text{konstant}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^n = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{n-1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

zu- oder abgeführte
Wärme Δq

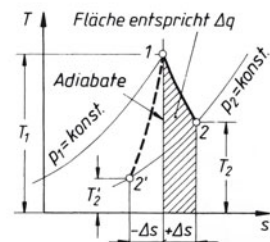
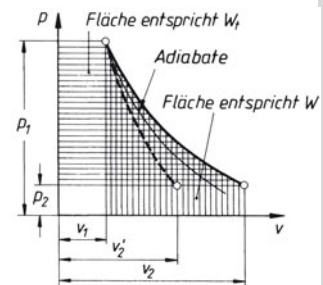
$$\Delta q = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1} (T_2 - T_1)$$

Änderung der inneren
Energie Δu

$$\Delta u = c_v (T_2 - T_1)$$

Änderung der
Enthalpie Δh

wie bei adiabater Zustandsänderung, wenn für κ der Exponent n eingesetzt wird



Änderung der Entropie Δs

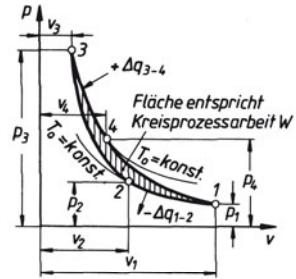
$$\Delta s = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

äußere Arbeit W und technische Arbeit W_t

wie bei adiabater Zustandsänderung, wenn für κ der Exponent n eingesetzt wird

Carnot'scher Kreisprozess

- 1 – 2 isotherme Kompression
- 2 – 3 adiabate Kompression
- 3 – 4 isotherme Expansion
- 4 – 1 adiabate Expansion

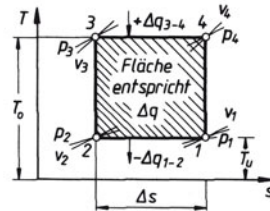


Kreisprozessarbeit W

$$W = R_i (T_u - T_o) \ln \frac{p_1}{p_2}$$

thermischer Wirkungsgrad η_{th}

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_u}{T_o}$$



6.6 Gleichungen für Gasgemische

Gesetz von Dalton

Nach *Dalton* nimmt jeder Gemischpartner das gesamte zur Verfügung stehende Gemischvolumen ein, als ob die anderen Partner nicht vorhanden wären.

Daher steht jedes Einzelgas unter einem Teildruck (Partialdruck). Die Summe aller Partialdrücke ergibt den Gesamtdruck

Gesamtdruck p_g

$$p_g = p_1 + p_2 + \dots p_n$$

$$\dot{m}_n = \frac{m_n}{m_g} \text{ Massenanteil } \sum \dot{m} = 1$$

Gesamtmasse m_g

$$m_g = m_1 + m_2 + \dots m_n$$

$$r_n = \frac{V_n}{V_g} \text{ Raumanteil } \sum r = 1$$

Gesamtvolumen V_g (bei n Einzelgasen) des Gemisches

$$V_g = V_1 + V_2 + \dots V_n$$

Gaskonstante R_g des Gemisches (6.24)

$$R_g = \dot{m}_1 R_1 + \dot{m}_2 R_2 + \dots \dot{m}_n R_n$$

p	m	V	\dot{m}_n, r_n
$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	kg	m^3	Einheit Eins (Verhältnisgrößen)

Thermodynamik

Spezifisches Normvolumen v_n und Dichte ϱ_n (0 °C und 101 325 N/m²)

Partialdruck p_n
des Gemisches

$$p_n = \dot{m}_n \frac{R_n}{R_g} p_g = r_n p_g$$

spezifische Wärme-
kapazität c_{pg} des
Gemisches

$$c_{pg} = \dot{m}_1 c_{p1} + \dot{m}_2 c_{p2} + \dots \dot{m}_n c_{pn}$$

$$c_{vg} = \dot{m}_1 c_{v1} + \dot{m}_2 c_{v2} + \dots \dot{m}_n c_{vn}$$

$c_{p1} \dots, c_{v1} \dots$ sind die spezifischen
Wärmekapazitäten
der Einzelgase (6.11)

Dichte ϱ_g des
Gemisches

$$\varrho_g = r_1 \varrho_1 + r_2 \varrho_2 + \dots r_n \varrho_n$$

$\varrho_1 \dots$ Dichten der Einzelgase
(6.24)

Temperatur t_g des
Gemisches

siehe 6.1

6.7 Temperatur- Umrechnungen

t in Grad Celsius (°C):

$$t = \frac{5}{9}(t_F - 32) = T - 273,15 = \frac{5}{9}(T_R - 491,67)$$

t_F in Grad Fahrenheit (°F):

$$t_F = 1,8 t + 32 = 1,8 T - 459,67 = T_R - 459,67$$

T in Grad Kelvin (K):

$$T = t + 273,15 = \frac{5}{9} t_F + 255,37 = \frac{5}{9} T_R$$

T_R in Grad Rankine (°R):

$$T_R = 1,8 t + 491,67 = t_F + 459,67 = 1,8 T$$

6.8 Temperatur- Fixpunkte

Sauerstoff (Siedepunkt)	- 182,97 °C
Wasser (Tripelpunkt)	0,01 °C
Wasser (Siedepunkt)	100,00 °C
Schwefel (Siedepunkt)	444,60 °C
Silber (Schmelzpunkt)	960,80 °C
Gold (Schmelzpunkt)	1063,00 °C

6.9 Spezifisches Normvolumen v_n und Dichte ϱ_n (0 °C und 101 325 N/m²)

Gasart	chemisches Kurzzeichen	v_n in $\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$	ϱ_n in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Kohlendioxid	CO ₂	0,506	1,977
Kohlenoxid	CO	0,800	1,250
Luft	-	0,774	1,293
Methan	CH ₄	1,396	0,717
Sauerstoff	O ₂	0,700	1,429
Stickstoff	N ₂	0,799	1,251
Wasserdampf	H ₂ O	1,243	0,804
Wasserstoff	H ₂	11,111	0,090

6.10 Mittlere spezifische Wärmekapazität c_m fester und flüssiger Stoffe zwischen 0 °C und 100 °C in J / (kg K)

Aluminium	896	Kork	2010	Steinzeug	773
Beton	1005	Kupfer	390	Ziegelstein	920
Blei	130	Marmor	870	Alkohol	2430
Eichenholz	2390	Messing	386	Ammoniak	4187
Eis	2050	Nickel	444	Aceton	2300
Eisen (Stahl)	450	Platin	134	Benzol	1840
Fichtenholz	2720	Quarzglas	725	Glycerin	2430
Glas	796	Quecksilber	138	Maschinenöl	1675
Graphit	870	Sandstein	920	Petroleum	2093
Gusseisen	540	Schamotte	796	Schwefelsäure	1380
Kieselgur	870	Silber	234	Wasser	4187

6.11 Mittlere spezifische Wärmekapazität c_p, c_v in J / (kg K) nach *Justi* und *Lüder*

t° in °C	CO	CO ₂	Luft	CH ₄	O ₂	N ₂	H ₂ O	H ₂
0 c_p	1038,13	707,43	1004,64	2155,79	912,55	1038,13	1854,40	14 232,40
c_v	740,92	519,06	715,81	1636,73	653,02	740,92	1393,94	10 109,19
100 c_p	1042,31	870,69	1008,83	2260,44	920,92	1042,31	1866,96	14 316,12
c_v	745,11	682,32	719,99	1741,38	661,39	745,11	1406,50	10 192,91
200 c_p	1046,50	916,73	1013,01	2453,00	933,48	1046,50	1887,89	14 399,84
c_v	749,29	728,36	724,18	1933,93	673,95	749,29	1427,43	10 276,63
300 c_p	1054,87	958,59	1021,38	2637,18	950,22	1050,69	1908,82	14 441,70
c_v	757,67	770,22	732,55	2118,12	690,69	753,48	1448,36	1946,49
400 c_p	1063,24	987,90	1029,76	2808,81	966,97	1059,06	1938,12	14 483,56
c_v	766,04	799,53	740,92	2289,74	707,43	761,85	1477,66	10 360,35
500 c_p	1075,80	1021,38	1042,31	2955,32	979,52	1074,43	1971,61	14 483,56
c_v	778,60	833,01	753,48	2436,25	719,99	770,22	1511,15	10 360,35
600 c_p	1088,36	1050,69	1050,69	3147,87	992,08	1075,82	2000,91	14 525,42
c_v	791,15	862,31	761,85	2628,81	732,55	778,60	1540,45	10 402,21
700 c_p	1096,73	1071,62	1059,06	3302,57	1004,64	1084,17	2030,21	14 567,28
c_v	799,53	883,25	770,22	2283,69	745,11	786,97	1569,75	10 444,07
800 c_p	1109,30	1092,55	1071,62	3436,71	1017,20	1096,73	2067,88	14 651,00
c_v	812,08	904,18	782,78	2917,64	757,67	799,53	1607,42	10 527,79
900 c_p	1121,85	1113,48	1084,17	3570,66	1025,57	1105,10	2101,37	14 692,86
c_v	824,64	925,11	795,34	3051,59	766,04	807,90	1640,91	10 569,65
1000 c_p	1130,22	1130,22	1092,55	3658,56	1033,94	1117,66	2134,86	14 734,72
c_v	833,01	941,85	803,71	3139,50	744,41	820,46	1674,40	10 611,51

6.12 Schmelzenthalpie q_s fester Stoffe in J / kg bei $p = 101325 \text{ N/m}^2$

Aluminium	$3,9 \cdot 10^5$	Grauguss	$0,96 \cdot 10^5$	Nickel	$2,3 \cdot 10^5$	Zink	$1,1 \cdot 10^5$
Blei	$0,23 \cdot 10^5$	Kupfer	$1,7 \cdot 10^5$	Platin	$1,0 \cdot 10^5$	Zinn	$0,6 \cdot 10^5$
Eis	$3,4 \cdot 10^5$	Magnesium	$2,0 \cdot 10^5$	Stahl	$2,5 \cdot 10^5$		

Thermodynamik

Volumenausdehnungskoeffizient α_V von Flüssigkeiten in 1/K bei 18 °C

6.13 Verdampfungs- und Kondensationsenthalpie q_V in J / kg bei 101 325 N/m²

Alkohol	$8,7 \cdot 10^5$	Quecksilber	$2,85 \cdot 10^5$	Stickstoff	$2,01 \cdot 10^5$
Benzol	$4,4 \cdot 10^5$	Sauerstoff	$2,14 \cdot 10^5$	Wasser	$22,5 \cdot 10^5$
				Wasserstoff	$5,0 \cdot 10^5$

6.14 Schmelzpunkt fester Stoffe in °C bei $p = 101\,325\text{ N/m}^2$

Aluminium	658	Gold	1063	Messing	900
Blei	327	Graphit	3600	Platin	1770
Chrom	1765	Iridium	2455	Silber	960
Diamant	3500	Kupfer	1084	Wolfram	3350
Eisen (rein)	1528	Magnesium	655	Zink	419
Elektron	625	Mangan	1260	Zinn	232

6.15 Siede- und Kondensationspunkt einiger Stoffe in °C bei $p = 101\,325\text{ N/m}^2$

Alkohol	78	Helium	- 269	Sauerstoff	- 183
Benzin	95	Kohlenoxid	- 190	Silber	2000
Benzol	80	Kupfer	2310	Stickstoff	- 196
Blei	1525	Magnesium	1100	Wasser	100
Eisen (rein)	2500	Mangan	1900	Wasserstoff	- 253
Glycerin	290	Methan	- 164	Zink	915
Gold	2650	Quecksilber	357	Zinn	2200

6.16 Längenausdehnungskoeffizient α_l fester Stoffe in 1/K zwischen 0 °C und 100 °C (Volumenausdehnungskoeffizient $\alpha_V \approx 3 \alpha_l$)

Aluminium	$23,5 \cdot 10^{-6}$	Invarstahl	$1,6 \cdot 10^{-6}$	Porzellan	$3,0 \cdot 10^{-6}$
Baustahl	$12,0 \cdot 10^{-6}$	Jenaer Glas	$4,5 \cdot 10^{-6}$	PVC	$78,1 \cdot 10^{-6}$
Blei	$92,2 \cdot 10^{-6}$	Kunststoffe	$(10 - 50) \cdot 10^{-6}$	Quarzglas	$0,6 \cdot 10^{-6}$
Bronze	$17,5 \cdot 10^{-6}$	Kupfer	$16,5 \cdot 10^{-6}$	Widia	$5,3 \cdot 10^{-6}$
Chromstahl	$11,0 \cdot 10^{-6}$	Magnesium	$26,0 \cdot 10^{-6}$	Wolfram	$4,5 \cdot 10^{-6}$
Glas	$9,0 \cdot 10^{-6}$	Messing	$18,4 \cdot 10^{-6}$	Zinn	$23,0 \cdot 10^{-6}$
Gold	$14,2 \cdot 10^{-6}$	Nickel	$14,1 \cdot 10^{-6}$	Zinnbronze	$17,8 \cdot 10^{-6}$
Gusseisen	$9,0 \cdot 10^{-6}$	Platin	$8,9 \cdot 10^{-6}$	Zink	$30,1 \cdot 10^{-6}$

6.17 Volumenausdehnungskoeffizient α_V von Flüssigkeiten in 1/K bei 18 °C

Äthylalkohol	$11,0 \cdot 10^{-4}$	Glycerin	$5,0 \cdot 10^{-4}$	Schwefelsäure	$5,6 \cdot 10^{-4}$
Äthyläther	$16,3 \cdot 10^{-4}$	Olivenöl	$7,2 \cdot 10^{-4}$	Wasser	$1,8 \cdot 10^{-4}$
Benzol	$12,4 \cdot 10^{-4}$	Quecksilber	$1,8 \cdot 10^{-4}$		

Wärme-Übergangszahlen α für Dampferzeuger bei normalen Betriebsbedingungen6.18 Wärmeleitzahlen λ fester Stoffe bei 20 °C in $10^3 \frac{\text{J}}{\text{mhK}}$; Klammerwerte in $\frac{\text{W}}{\text{mK}}$

Aluminium	754 (209)	Kesselstein, amorph ¹⁾	4 (1,1)	Quarzglas	5,0 (1,39)
Asbestwolle	0,3 (0,08)	–, gipsreich ¹⁾	5,5 (1,53)	Ruß	0,17
Asphalt	2,5 (0,69)	–, kalkreich ¹⁾	1,8 (0,5)	Sandstein	6,7
Bakelit	0,8 (0,22)	Kies	1,3 (0,36)	Schamottestein ¹⁾	3 (0,8)
Beton	4,6 (1,28)	Kohle, amorph	0,63 (0,17)	–, (1000 °C)	3,6 (1,0)
Blei	126 (35)	–, graphitisch	4,2 (1,17)	Schaumgummi ¹⁾	0,2 (0,06)
Duraluminium	628 (174)	Korkplatten	0,17 (0,05)	Schnee ¹⁾	0,5 (0,14)
Eichenholz, radial	0,6 (0,17)	Kupfer	1360 (380)	Silber	1500 (420)
Eis bei 0 °C	8,1 (2,25)	Leder	0,6 (0,17)	Stahl (0,1 % C)	193 (54)
Eisenzunder (1000 °C)	5,9 (1,64)	Linoleum	0,67 (0,19)	– (0,6 %C)	150 (42)
Fensterglas	4,2 (1,17)	Magnesium	510 (142)	– (V 2 A)	54 (15)
Fichtenholz, axial	0,84 (0,23)	Marmor	10,5 (2,92)	Ziegelmauer, außen	3,1 (0,86)
–, radial	0,42 (0,12)	Messing	376 (104)	–, innen	2,5 (0,7)
Gips, trocken ¹⁾	1,5 (0,42)	Mörtel und Putz	3,4 (0,94)	Zink	406 (113)
Gold	1120 (310)	Nickel	293 (81)	Zinn	239 (66)
Graphit	500 (140)	Nickelstahl (30% Ni)	42 (11,7)		
Hartgummi	0,6 (0,17)	Porzellan ¹⁾	4,5 (1,3)		

¹⁾ Mittelwerte

6.19 Wärmeleitzahlen λ von Flüssigkeiten bei 20 °C in $\frac{\text{J}}{\text{mhK}}$; Klammerwerte in $\frac{\text{W}}{\text{mK}}$

Ammoniak	1 800 (0,5)	Glycerin	1 000 (0,28)	Spindelöl	500 (0,14)
Äthylalkohol	700 (0,19)	– mit 50% Wasser	1 500 (0,42)	Transformatoröl	460 (0,13)
Aceton	600 (0,17)	Paraffinöl	460 (0,13)	Wasser	2 200 (0,61)
Benzin	500 (0,14)	Quecksilber	33 000 (9,2)	Xylol	470 (0,13)

6.20 Wärmeleitzahlen λ von Gasen in Abhängigkeit von der Temperatur

(Ungefährrwerte) in $\frac{\text{J}}{\text{mhK}}$ Klammerwerte in $\frac{\text{W}}{\text{mK}}$

	0 °C	200 °C	400 °C	600 °C	800 °C	1000 °C
Luft	84 (0,023)	47 (0,013)	188 (0,052)	222 (0,062)	251 (0,07)	281 (0,078)
Wasserdampf	63 (0,017)	117 (0,032)	197 (0,055)	293 (0,081)		
Argon	59 (0,016)	92 (0,026)	126 (0,035)	155 (0,043)	184 (0,05)	209 (0,058)

6.21 Wärme-Übergangszahlen α für Dampferzeuger bei normalen Betriebsbedingungen (Mittelwerte)

	in $\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{hK}}$		in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$
Verdampfer	$\alpha_1 = (83 \dots 209) \cdot 10^3$	zwischen Feuergas und Wand	23 ... 58
	$\alpha_2 = (210 \dots 420) \cdot 10^6$	zwischen Wand und Wasser	$(58 \dots 117) \cdot 10^3$
Überhitzer	$\alpha_1 = (125 \dots 209) \cdot 10^3$	zwischen Rohrwand und Feuergas oder Dampf	35 ... 58
Lufterhitzer	$\alpha_1 = (42 \dots 83) \cdot 10^3$	zwischen Blechwand und Luft oder Feuergas	12 ... 23
Wasservorwärmer	$\alpha_1 = (63 \dots 126) \cdot 10^3$	zwischen Feuergas und Rohrwand	17 ... 35
	$\alpha_2 = (210 \dots 330) \cdot 10^6$	zwischen Rohrwand und Wasser	$(58 \dots 92) \cdot 10^3$

Thermodynamik

Spezifische Gaskonstante R_i , Dichte ρ und Verhältnis $\kappa = c_p / c_v$ einiger Gase

6.22 Wärmedurchgangszahlen k bei normalem Kesselbetrieb (Mittelwerte)

in $\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{hK}}$		in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$
$(42 \dots 126) \cdot 10^3$	für Wasservorwärmer	11,7 ... 35
$(83 \dots 209) \cdot 10^3$	für Verdampferheizfläche	23 ... 58
$(83 \dots 251) \cdot 10^3$	für Berührungsüberhitzer	23 ... 70
$(33 \dots 63) \cdot 10^3$	für Plattenlufterhitzer	9,2 ... 17,5

6.23 Emissionsverhältnis ε und Strahlungszahl C bei 20 °C

	ε	C in $\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{hK}^4}$	C in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$
absolut schwarzer Körper	1	$20,8 \cdot 10^{-5}$	$5,78 \cdot 10^{-8}$
Aluminium, unbehandelt	0,07 ... 0,09	$(1,47 \dots 1,88) \cdot 10^{-5}$	$(0,41 \dots 0,52) \cdot 10^{-8}$
–, poliert	0,04	$0,796 \cdot 10^{-5}$	$0,22 \cdot 10^{-8}$
Glas	0,93	$19,3 \cdot 10^{-5}$	$5,36 \cdot 10^{-8}$
Gusseisen, ohne Gusshaut	0,42	$8,8 \cdot 10^{-5}$	$2,44 \cdot 10^{-8}$
Kupfer, poliert	0,045	$0,92 \cdot 10^{-5}$	$0,26 \cdot 10^{-8}$
Messing, poliert	0,05	$1,05 \cdot 10^{-5}$	$0,29 \cdot 10^{-8}$
Öle	0,82	$16,96 \cdot 10^{-5}$	$4,71 \cdot 10^{-8}$
Porzellan, glasiert	0,92	$19,17 \cdot 10^{-5}$	$5,32 \cdot 10^{-8}$
Stahl, poliert	0,28	$5,86 \cdot 10^{-5}$	$1,63 \cdot 10^{-8}$
Stahlblech, verzinkt	0,23	$4,69 \cdot 10^{-5}$	$1,30 \cdot 10^{-8}$
–, verzinkt	0,06 ... 0,08	$(1,3 \dots 1,7) \cdot 10^{-5}$	$(0,36 \dots 0,47) \cdot 10^{-8}$
Dachpappe	0,91	$18,92 \cdot 10^{-5}$	$5,26 \cdot 10^{-8}$

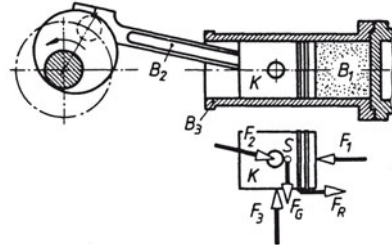
6.24 Spezifische Gaskonstante R_i , Dichte ρ und Verhältnis $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ einiger Gase

Gasart	Atomzahl	R_i in $\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$	ρ in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ¹⁾	κ	molare Masse M in $\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ (gerundet)
Argon (Ar)	1	208	1,7821	1,66	40
Acetylen (C ₂ H ₂)	4	320	1,1607	1,26	26
Ammoniak (NH ₃)	4	488	0,7598	1,31	17
Helium (He)	1	2078	0,1786	1,66	4
Kohlendioxid (CO ₂)	3	189	1,9634	1,30	44
Kohlenoxid (CO)	2	297	1,2495	1,40	28
Luft	–	287	1,2922	1,40	–
Methan (CH ₄)	5	519	0,7152	1,32	16
Sauerstoff (O ₂)	2	260	1,4276	1,31	32
Stickstoff (N ₂)	2	297	1,2499	1,40	28
Wasserdampf (H ₂ O)	3	462	–	1,40	18
Wasserstoff (H ₂)	2	4158	0,0899	1,41	2

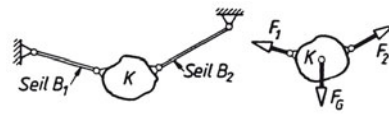
¹⁾ Die Werte gelten für die Temperatur von 0 °C und für einen Druck von $101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1,01325 \text{ bar}$.

7.1 Freimachen der Bauteile

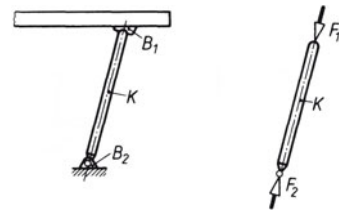
Alle am freizumachenden Körper K angreifenden Bauteile $B_1, B_2, B_3 \dots$ gedanklich nacheinander wegnehmen und deren Aktionskräfte $F_1, F_2, F_3 \dots$ an K antragen. Gewichtskraft F_G des Körpers K wirkt immer lotrecht nach unten und greift im Schwerpunkt S an. Angreifende Bauteile in diesem Sinn sind auch Gase, Flüssigkeiten usw. F_R ist die Reibungskraft.



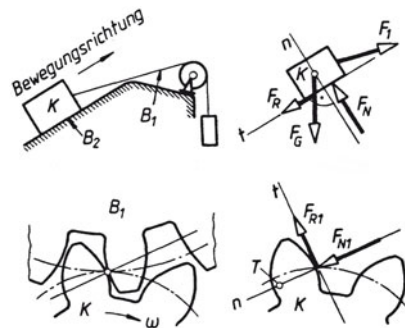
Seile, Ketten, Bänder, Riemen übertragen nur Zugkräfte in Richtung ihrer Schwerachse.



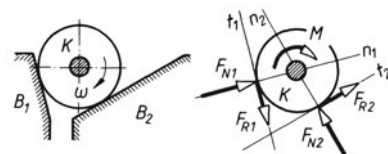
Zweigelenkstäbe (Pendelstützen) übertragen ohne Rücksicht darauf, ob die Stäbe gerade oder gekrümmt sind, nur *Zug-* oder *Druckkräfte* (Axialkräfte), deren Wirklinie durch beide Gelenkpunkte verläuft. Dies gilt jedoch nur dann exakt, wenn das Eigengewicht vernachlässigt wird.



Stützflächen, auch gekrümmte, übertragen je eine Normalkraft F_N und eine Tangentialkraft (Reibungskraft) F_R . F_N wirkt immer normal zur Auflagefläche. Bei gekrümmten Flächen geht die Wirklinie (WL) von F_N durch den Krümmungsmittelpunkt T . Bei ebenen Flächen liegt dieser im Unendlichen. F_R versucht den langsameren Körper zu beschleunigen, den schnelleren zu verlangsamen. F_N und F_R stehen immer rechtwinklig aufeinander.



Rollen, Kugeln haben gekrümmte Stützflächen mit Krümmungsradius = Kreisradius. Normalkraft F_N geht durch Berührungspunkt und Kreismittelpunkt, WL der Reibungskraft ist Kreistangente.



Mechanik fester Körper

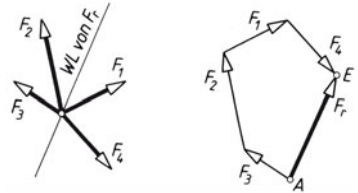
Rechnerische Bestimmung der Resultierenden F_r

7.2 Zeichnerische Bestimmung der Resultierenden F_r (zeichnerische Ersatzaufgabe)

Beim zentralen ebenen Kräftesystem:

Kräfte in beliebiger Reihenfolge maßstabgerecht aneinanderreihen, so dass sich fortlaufender Kräftezug ergibt.

F_r ist Verbindungslinie vom Anfangspunkt A der zuerst gezeichneten Kraft zum Endpunkt E der zuletzt gezeichneten Kraft.

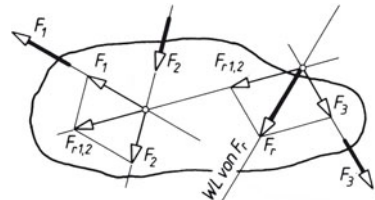


Beim zentralen räumlichen Kräftesystem:

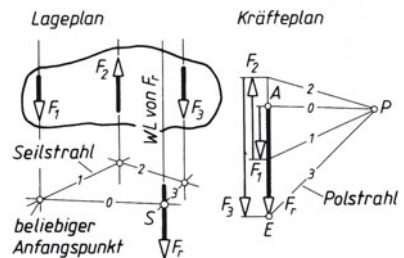
Nach den Gesetzen der darstellenden Geometrie Kraftecke im Grund- und Aufriss zeichnen, daraus wahre Größe und wahre Winkel bestimmen.

Beim allgemeinen ebenen Kräftesystem:

Bei schrägen Kräften durch wiederholte Parallelogrammzeichnung: F_1 und F_2 auf WL verschieben und zum Schnitt bringen ergibt $F_{r,1,2}$, diese mit F_3 zum Schnitt bringen ergibt WL von F_r .



Bei *parallelen* oder annähernd parallelen Kräften durch **Seileckverfahren**. Kräfteplan der gegebenen Kräfte durch Parallelverschiebung der WL aus dem Lageplan in den Kräfteplan; F_r als Verbindungslinie vom Anfangspunkt A zum Endpunkt E des Kräftezugs; Polpunkt P beliebig wählen und Polstrahlen ziehen; durch Parallelverschiebung in den Lageplan Seilstrahlen zeichnen; Anfangs- und Endseilstrahl zum Schnitt S bringen, womit ein Punkt der WL von F_r gefunden ist.



Beim allgemeinen räumlichen Kräftesystem:

Besser die rechnerische Lösung anwenden.

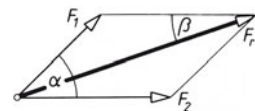
7.3 Rechnerische Bestimmung der Resultierenden F_r (rechnerische Ersatzaufgabe)

Beim zentralen ebenen Kräftesystem:

Zwei Kräfte, die den Winkel α einschließen, haben die Resultierende

$$F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha}$$

$$\sin \beta = \frac{F_1 \sin \alpha}{F_r}; \quad \beta = \arcsin \frac{F_1 \sin \alpha}{F_r}$$



Mechanik fester Körper

Rechnerische Bestimmung der Resultierenden F_r

Besonders bei mehreren Kräften bestimmt man die Resultierende F_r durch Zerlegen aller gegebenen Kräfte in Komponenten $F_{nx} = F_n \cdot \cos \alpha_n$; $F_{ny} = F_n \cdot \sin \alpha_n$ (Buchstabe „n“ steht für Zahlen 1, 2, 3 ...) nach Lageskizze.

Teilresultierende F_{rx} und F_{ry} berechnen aus:

$$F_{rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots \quad F_{nx} = \sum F_{nx}$$

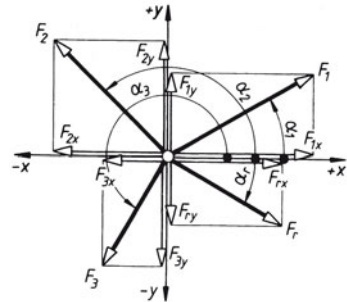
$$F_{ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots \quad F_{ny} = \sum F_{ny}$$

Gesamtresultierende:

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2}$$

deren Winkel zur positiven x-Achse (Richtungswinkel):

$$\tan \alpha_r = \frac{F_{ry}}{F_{rx}} \quad \alpha_r = \arctan \frac{F_{ry}}{F_{rx}}$$



Beim zentralen räumlichen Kräftesystem:

Wie beim zentralen ebenen Kräftesystem, mit zusätzlich dritter (z-)Richtung:

$$F_{nx} = F_n \cos \alpha_n$$

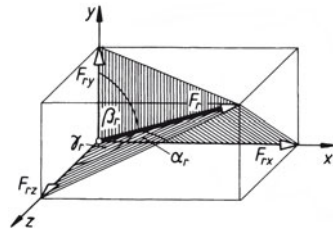
$$F_{ny} = F_n \cos \beta_n \quad F_{nz} = F_n \cos \gamma_n$$

$$F_{rx} = \sum F_n \cos \alpha_n$$

$$F_{ry} = \sum F_n \cos \beta_n \quad F_{rz} = \sum F_n \cos \gamma_n$$

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2 + F_{rz}^2}$$

$$\alpha_r = \arccos \frac{F_{rx}}{F_r} \quad \beta_r = \arccos \frac{F_{ry}}{F_r} \quad \gamma_r = \arccos \frac{F_{rz}}{F_r}$$



Beim allgemeinen ebenen Kräftesystem:

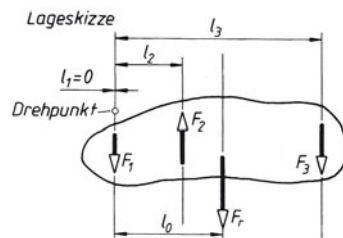
Betrag und Richtung der Resultierenden F_r wie beim zentralen ebenen Kräftesystem, zusätzlich Lage von F_r durch den

Momentensatz

Wirken mehrere Kräfte drehend auf einen Körper, so ist die algebraische Summe ihrer Momente gleich dem Moment der Resultierenden in Bezug auf den gleichen Drehpunkt.

$$F_r l_0 = F_1 l_1 + F_2 l_2 + \dots + F_n l_n$$

$F_1, F_2 \dots F_n$ gegebene Kräfte oder deren Komponenten F_x, F_y
 $l_0, l_1, l_2, \dots l_n$ deren Wirkabstände (\perp) vom gewählten (beliebigen) Drehpunkt
 $F_1 l_1, F_2 l_2 \dots F_n l_n$ die statischen Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf den gewählten Drehpunkt (Vorzeichen beachten)



Mechanik fester Körper

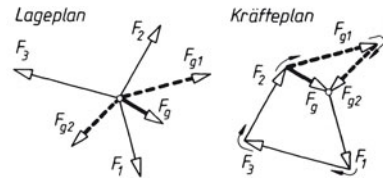
Zeichnerische Bestimmung unbekannter Kräfte

7.4 Zeichnerische Bestimmung unbekannter Kräfte (zeichnerische Gleichgewichtsaufgabe)

Beim zentrales ebenes Kräftesystem:

Das Kräfteck muss sich schließen.

Gegebene Kräfte in beliebiger Reihenfolge maßstäblich aneinanderreihen; gesuchte Gleichgewichtskraft F_g (oder zwei Kräfte F_{g1} , F_{g2}) bekannter Wirklinie schließen das Kräfteck.



Beim zentrales räumliches Kräftesystem:

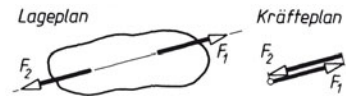
Räumliches Kräfteck muss sich schließen. Nach den Gesetzen der darstellenden Geometrie Kräftecke im Grund- und Aufriss konstruieren.

Beim allgemeines ebenes Kräftesystem:

Kraft- und Seileck müssen sich schließen. Oder je nach Anzahl der beteiligten Kräfte:

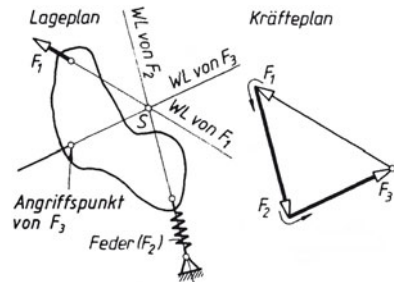
Zwei-Kräfteverfahren

Zwei Kräfte stehen im Gleichgewicht, wenn sie gleichen Betrag und Wirklinie, jedoch entgegengesetzten Richtungssinn haben.



Drei-Kräfteverfahren

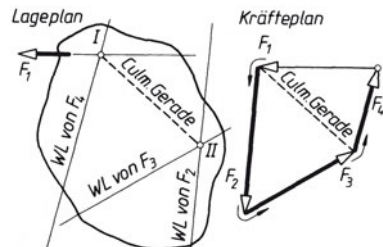
Drei nicht parallele Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn das Kräfteck geschlossen ist und die Wirklinien sich in einem Punkt schneiden. WL der gegebenen Kraft F_1 mit der bekannten WL der gesuchten Kraft schneiden lassen. Verbindungslinie vom Schnittpunkt S mit dem Angriffspunkt der gesuchten Kraft F_3 ist deren WL. Kräfteplan mit gegebener Kraft F_1 beginnen und mit F_2 und F_3 schließen. Zweiwertige Lager können eine beliebig gerichtete Lagerkraft aufnehmen (F_3), also zwei rechtwinklig aufeinander stehende Komponenten (F_{3x} und F_{3y}).



Vier-Kräfteverfahren

Vier nicht parallele Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn die Resultierenden je zweier Kräfte ein geschlossenes Kräfteck bilden und eine gemeinsame Wirklinie haben (die Culmann'sche Gerade).

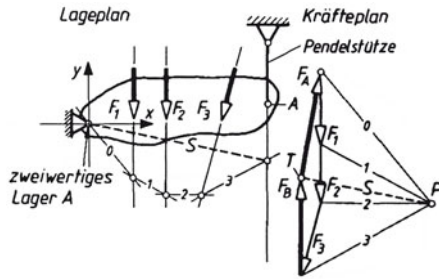
WL je zweier Kräfte zum Schnitt I und II bringen; Kräfteplan mit der bekannten Kraft beginnen; dann mit Culmann'scher Geraden und den WL der anderen Kräfte schließen. Voraussetzung: Alle WL sind bekannt.



Schlusslinien-Verfahren

Kraft- und Seileck müssen sich schließen. Geeignet für parallele oder nahezu parallele Kräfte, die sich nicht auf der Zeichenebene zum Schnitt bringen lassen.

Krafteck und Seileck zeichnen, dabei ersten Seilstrahl (0) durch zweiwertigen Lagerpunkt legen und Endseilstrahl (3) mit der WL der einwertigen Stützkraft zum Schnitt bringen, ergibt „Schlusslinie S“ im Seileck, die im Krafteck (übertragen) Teilpunkt T festlegt. Stützkkräfte nach zugehörigen Seilstrahlen ins Krafteck einzeichnen.



7.5 Rechnerische Bestimmung unbekannter Kräfte (rechnerische Gleichgewichtsaufgabe)

Beim zentrales ebenes Kräftesystem:

Zerlegen aller gegebenen und gesuchten Kräfte (diese mit angenommenem Richtungssinn) in ihre Komponenten in x- und y-Richtung mit

$$F_{nx} = F_n \cos \alpha_n \quad F_{ny} = F_n \sin \alpha_n$$

berechnen.

Algebraische Summe aller Komponentenbeträge muss null sein. Damit stehen *zwei Gleichungen* zur Verfügung:

$$\sum F_x = 0 = F_{1x} + F_{2x} + \dots F_{nx} \quad \sum F_y = 0 = F_{1y} + F_{2y} + \dots F_{ny}$$

Beim zentralen räumlichen Kräftesystem:

Wie beim zentralen ebenen Kräftesystem, zusätzlich einer dritten Richtung (z-Achse) und damit auch die dritte *Gleichung*:

$$\sum F_z = 0 = F_{1z} + F_{2z} + \dots F_{nz}$$

Beim allgemeinen ebenen Kräftesystem:

Wie beim zentralen ebenen Kräftesystem; zusätzlich muss die Summe aller Momente der Komponenten um einen beliebigen Drehpunkt D null sein; damit stehen bei diesem hauptsächlichsten Fall *drei Gleichungen* zur Verfügung:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_{(D)} = 0$$

Beim allgemeinen räumlichen Kräftesystem:

Es stehen drei Kräfte- und drei Momentgleichungen zur Verfügung.

7.6 Fachwerke

Jeder Knotenpunkt stellt ein zentrales Kräftesystem dar.

s Anzahl der Stäbe, k Anzahl der Knoten.

Bei $s = 2k - 3$ ist ein Fachwerk innerlich statisch bestimmt, bei $s > 2k - 3$ ist es innerlich statisch unbestimmt, bei $s < 2k - 3$ ist es kinematisch unbestimmt (beweglich).

Mechanik fester Körper

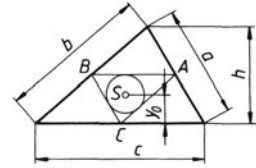
Schwerpunkt

7.7 Schwerpunkt

Dreiecksumfang

Dreieckseiten halbieren, Mittelpunkte A, B, C verbinden. S ist Mittelpunkt des dem Dreieck A, B, C einbeschriebenen Kreises.

$$y_0 = \frac{h}{2} \cdot \frac{a+b}{a+b+c}$$



Parallelogrammumfang und -fläche: S ist Schnittpunkt der Diagonalen

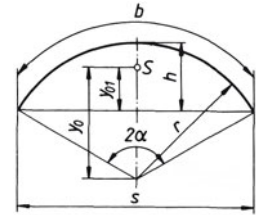
Kreisbogen

S liegt auf der Winkelhalbierenden des Zentriwinkels 2α (Symmetrielinie).

$$y_0 = \frac{rs}{b} \quad y_{01} \approx \frac{2}{3} h \text{ für flache Bögen}$$

$$y_0 = \frac{2r}{\pi} = 0,637 r \text{ für } 2\alpha = 180^\circ$$

$$y_0 = \frac{2r}{\pi} \sqrt{2} = 0,9 r \text{ für } 2\alpha = 90^\circ \quad y_0 = \frac{3r}{\pi} = 0,955 r \text{ für } 2\alpha = 60^\circ$$



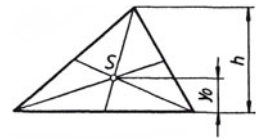
Dreiecksfläche

S liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

$$y_0 = \frac{1}{3} h$$

Liegt eine Dreiecksfläche im ebenen Achsenkreuz und sind x_1, x_2, x_3 bzw. y_1, y_2, y_3 die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks, so sind die Koordinaten des Schwerpunkts S :

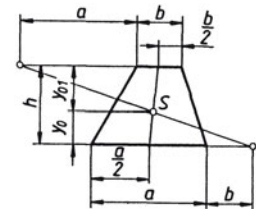
$$x_0 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad y_0 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$



Trapezfläche

Grundseiten a und b wechselseitig antragen und Endpunkte dieser Strecken verbinden, ebenso Mitten der Seiten a und b verbinden. S liegt im Schnittpunkt beider Verbindungslinien.

$$y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b} \quad y_{01} = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$$



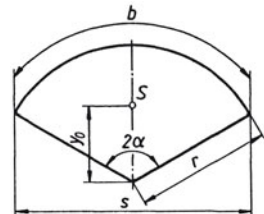
Kreisausschnittfläche

S liegt auf der Winkelhalbierenden des Zentriwinkels 2α .

$$y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b}$$

$$y_0 = \frac{4r}{3\pi} = 0,424 r \text{ für } 2\alpha = 180^\circ$$

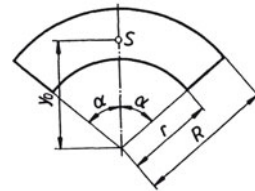
$$y_0 = \frac{4r}{3\pi} \sqrt{2} = 0,6 r \text{ für } 2\alpha = 90^\circ \quad y_0 = \frac{2r}{\pi} = 0,637 r \text{ für } 2\alpha = 60^\circ$$



Kreisringstückfläche

S liegt auf der Winkelhalbierenden des Zentriwinkels 2α .

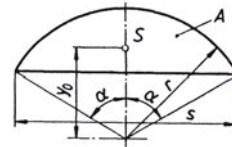
$$y_0 = 38,197 \frac{(R^3 - r^3) \sin \alpha}{(R^2 - r^2) \alpha^2}$$



Kreisabschnittsfläche

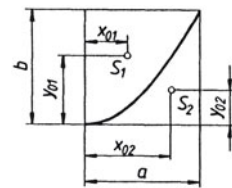
S liegt auf der Winkelhalbierenden des Zentriwinkels 2α .

$$y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{\text{arc } \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{s^3}{12 A}$$



Parabelfläche

$$\begin{aligned} x_{01} &= \frac{3}{8} a & y_{01} &= \frac{3}{5} b \\ x_{02} &= \frac{3}{4} a & y_{02} &= \frac{3}{10} b \end{aligned}$$



Mantel der Kugelzone und der Kugelhaube

Die Mittelpunkte beider Stirnflächen durch eine Gerade miteinander verbinden. Der Mantelschwerpunkt liegt auf der Mitte der Verbindungsstrecke. Bei der Kugelhaube tritt an die Stelle der kleinen Stirnfläche der Kugelpol.

Kegelmantel und Pyramidenmantel

Kegel- oder Pyramidenspitze mit dem Schwerpunkt des Umfangs der Grundfläche verbinden. Auf dieser Schwerlinie liegt der Mantelschwerpunkt. Sein Abstand beträgt ein Drittel der Kegel (Pyramiden-) höhe.

Mantel des abgestumpften Kreiskegels

Die Mitten beider Stirnflächen (Schwerlinie) verbinden. Der Schwerpunktsabstand von der Grundfläche beträgt:

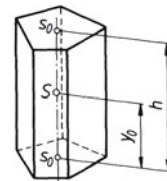
$$y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{R + 2r}{R + r}$$

h Höhe des Kegelstumpfes, R Radius der unteren, r Radius der oberen Stirnfläche.

gerades und schiefes Prisma (und Zylinder) mit parallelen Stirnflächen

Körperschwerpunkt S liegt in der Mitte der Verbindungslinie der Flächenschwerpunkte S_0 , also

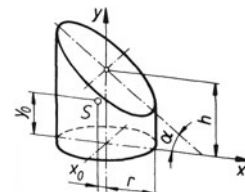
$$y_0 = \frac{h}{2}$$



abgeschrägter gerader Kreiszyylinder

Körperschwerpunkt S liegt auf der x, y -Ebene als Symmetrieebene mit den Abständen:

$$x_0 = \frac{r^2 \tan \alpha}{4 h} \quad y_0 = \frac{h}{2} + \frac{r^2 \tan^2 \alpha}{8 h}$$



Mechanik fester Körper

Guldin'sche Regeln

gerade und schiefe Pyramide und Kegel

Die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche verbinden. Der Körperschwerpunkt liegt auf dieser Schwerlinie. Sein Abstand von der Grundfläche beträgt ein Viertel der Pyramiden-(Kegel-)höhe.

Pyramidenstumpf mit beliebiger Grundfläche

Der Körperschwerpunkt liegt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte beider Stirnflächen. Sind A_1 , A_2 die Stirnflächen, h die Höhe des Stumpfes, so ist der Abstand des Schwerpunkts von der unteren Stirnfläche A_1 :

$$y_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{A_1 + 2\sqrt{A_1 A_2} + 3A_2}{A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2}$$

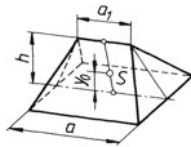
gerader und schiefer Kegelstumpf

Der Körperschwerpunkt liegt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte beider Stirnflächen. Ist h Höhe des Kegelstumpfes, R der Radius der unteren Stirnfläche, r der Radius der oberen Stirnfläche, so ist der Abstand des Schwerpunkts von der unteren Stirnfläche

$$y_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$$

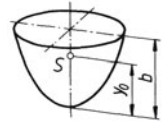
Keil

$$y_0 = \frac{h}{2} \cdot \frac{a + a_1}{2a + a_1}$$



Umdrehungsparaboloid

$$y_0 = \frac{2}{3} b$$



Kugelabschnitt

Der Körperschwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse. Ist R der Kugelradius, und h die Abschnittshöhe, so ist der Abstand des Schwerpunkts vom Kugelmittelpunkt

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2R - h)^2}{3R - h}$$

$$y_0 = \frac{3}{8} R$$

für Halbkugel

$$y_0 = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$$

für halbe Hohlkugel

Kugelausschnitt

Der Körperschwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse. Sein Abstand vom Kugelmittelpunkt ist

$$y_0 = \frac{3}{8} r(1 + \cos \alpha)$$

$$y_0 = \frac{3}{8}(2r - h)$$

7.8 Guldin'sche Regeln

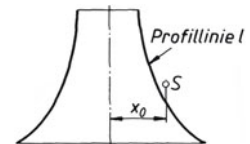
Oberfläche

A Flächeninhalt der Umdrehungsfläche in cm^2

x_0 Schwerpunktsabstand von der Drehachse in cm

l Länge der Profillinie in cm

$$A = 2 \pi x_0 l$$



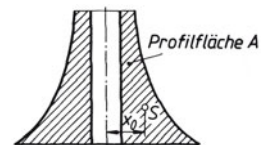
Volumen

V Volumen der Umdrehungsfläche in cm^3

x_0 Schwerpunktsabstand von der Drehachse in cm

A Flächeninhalt der Profilfläche in cm^2

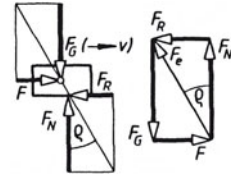
$$V = 2 \pi x_0 A$$



7.9 Reibung

Gleitreibung und Haftreibung

F_R Gleitreibungskraft (F_{R0} Haftreibungskraft), F_N Normalkraft,
 F_e Ersatzkraft (Resultierende aus Normalkraft und Reibungskraft),
 μ Reibungszahl (μ_0 Haftreibungszahl), ϱ Reibungswinkel
 (ϱ_0 Haftreibungswinkel)



$$F_R = F_N \mu \qquad F_{R0 \max} = F_N \mu_0$$

$$\tan \varrho = \mu = F_R / F_N \qquad \tan \varrho_0 = \mu_0 = F_{R0 \max} / F_N$$

Reibung auf schiefer Ebene

F_G Gewichtskraft des Körpers, F Verschiebe- oder Haltekraft, F_R Reibungskraft, F_{R0} Haftreibungskraft,
 F_N Normalkraft, F_e Ersatzkraft aus F_N und F_R (F_{R0}), Neigungswinkel $\alpha >$ Reibungswinkel ϱ (ϱ_0).

	Zugkraft wirkt parallel zur Ebene		Zugkraft wirkt waagrecht	
	Lageskizze	Krafteckskizze	Lageskizze	Krafteckskizze
<p>Körper bewegt sich gleichförmig</p> <p>$F = \text{Verschiebekraft}^*$</p> <p>* oberes Vorzeichen: aufwärts unteres Vorzeichen: abwärts</p>		$F = F_G \cdot \frac{\sin(\alpha \pm \varrho)}{\cos \varrho}$ $F = F_G \cdot (\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha)$		$F = F_G \cdot \tan(\alpha \pm \varrho)$ $F = F_G \cdot \frac{\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha}{\cos \alpha \pm \mu \sin \alpha}$
<p>Körper ist in Ruhe</p> <p>$F = \text{Haltekraft}$</p>		$F = F_G \cdot \frac{\sin(\alpha - \varrho_0)}{\cos \varrho_0}$ $F = F_G \cdot (\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha)$		$F = F_G \cdot \tan(\alpha - \varrho_0)$ $F = F_G \cdot \frac{\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha}$

Selbsthemmungsbedingung

Ein Körper bleibt auf schiefer Ebene solange in Ruhe, d. h. es liegt Selbsthemmung vor, solange der Neigungswinkel α einen Grenzwinkel ϱ_0 nicht überschreitet (z. B. bei Befestigungsgewinde mit $\alpha \approx 3^\circ$).

$$\tan \alpha \leq \tan \varrho_0 \qquad \tan \alpha \leq \mu_0$$

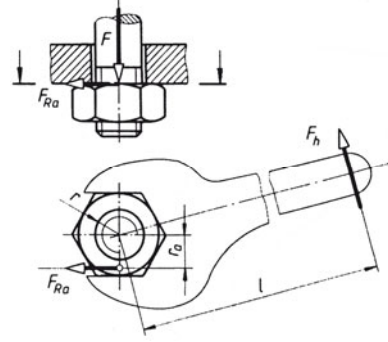
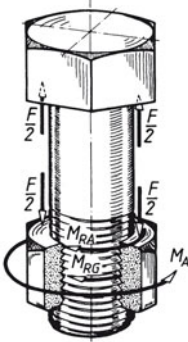
(Selbsthemmungsbedingung)

Mechanik fester Körper

Reibung in Maschinenelementen

7.10 Reibung in Maschinenelementen

Schraube



- F Schraubenlängskraft (z. B. Vorspannkraft)
- M_{RG} Gewindereibungsmoment
- M_{RA} Auflagereibungsmoment
(F_{Ra} Auflagereibungskraft)
- M_A Anziehdrehmoment
- α Steigungswinkel am Flankenradius r_2
 $\tan \alpha = P / 2 r_2 \pi$; $\alpha = \arctan (P / 2 r_2 \pi)$
- ϱ' Reibungswinkel im Gewinde
- μ' Reibungszahl im Gewinde
- μ Reibungszahl nach 7.12
- P Steigung des Gewindes
- r_2 Flankenradius
- $r_a = 1,4 r$ Wirkabstand der Auflagereibung
- r Nennradius (z. B. bei M 12: $r = 6$ mm)
- μ_a Reibungszahl der Mutterauflage, vom Werkstoff abhängig nach 7.12
- η Wirkungsgrad des Schraubgetriebes
- β Spitzenwinkel des Gewindes
($\beta = 30^\circ$ für Trapezgewinde, $\beta = 60^\circ$ für Spitzgewinde)

$$M_{RG} = F r_2 \tan (\alpha \pm \varrho')$$

$$M_{RA} = F_{Ra} r_a = F \mu_a r_a$$

$$M_A = M_{RG} + M_{RA} = F_h l$$

$$m_A = F [r_2 \tan (\alpha \pm \varrho') + \mu_a r_a]$$

$$\mu' = \tan \varrho' = \frac{\mu}{\cos(\beta / 2)}$$

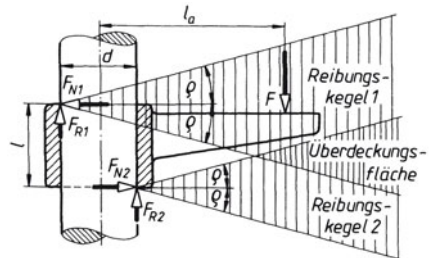
$$\eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varrho')}$$

$$\eta = \frac{\tan(\alpha - \varrho')}{\tan \alpha}$$

(+) für Anziehen (Heben)
 (-) für Lösen (Senken der Last)
 Selbsthemmung bei $\alpha \leq \varrho'$

Zylinderführung

F resultierende Verschiebekraft aus Gewichtskraft und äußerer Belastung.
 Führungsbuchse klemmt sich fest, solange die Wirklinie von F durch die Überdeckungsfläche der beiden Reibungskegel geht.
 Führungslänge l : $l = 2 \mu l_a$
 Bei $l < 2 \mu l_a$ klemmt die Buchse fest, bei $l > 2 \mu l_a$ gleitet sie.



Keilgetriebe

Verschiebekraft: $F = F_1 \frac{\sin(\alpha + \varrho_2 + \varrho_3) \cos \varrho_1}{\cos(\alpha + \varrho_1 + \varrho_2) \cos \varrho_3}$

Bei $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho$ ist

$F = F_1 \frac{\sin(\alpha + 2\varrho) \cos \varrho}{\cos(\alpha + 2\varrho) \cos \varrho} = F_1 \tan(\varrho + 2\varrho)$

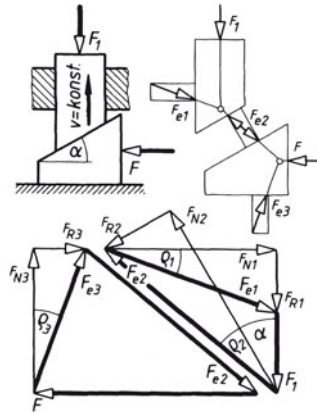
Wirkungsgrad η bei Lastheben:

$\eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + 2\varrho)}$

Selbsthemmung bei $\alpha < 2\varrho_0$

Haltekraft, die Herausdrücken des Keiles verhindert:

$F' = F_1 \tan(\alpha - 2\varrho_0)$



Querlager (Tragzapfen)

mittlere Flächenpressung:

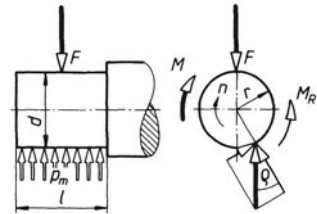
$p_m = \frac{F}{dl}$

Mit Zapfenreibungszahl μ , Zapfenradius r wird das Reibungsmoment:

$M_R = F r \mu$

Mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi n$ oder mit Drehzahl n wird die Reibungsleistung:

$P_R = M_R \omega = 2 F r \mu \pi n$

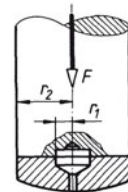


Längslager (Spurzapfen)

für Hohlzapfen ist Reibungsmoment $M_R = \frac{2}{3} \mu F \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}$

Reibungsleistung $P_R = M_R \omega$

Für Vollzapfen ist $M_R = \frac{2}{3} \mu F r_2$



Rollreibung

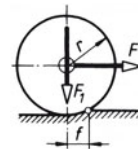
Rollkraft:

$F = F_1 \frac{f}{r}$

Rollbedingung:

$F_R < \mu_0 F_N$ oder $\frac{f}{r} < \mu_0$

f Hebelarm der Rollreibung: Stahlräder auf Stahlschienen $f \approx 0,05$ cm



Fahrwiderstand

Wird ein Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit v auf horizontaler Bahn bewegt, so ist, abgesehen vom Luftwiderstand, außer dem Rollwiderstand noch der durch Lagerreibung entstehende Widerstand zu überwinden. Beide werden zusammengefasst zum Fahrwiderstand F_f .

$F_f = F_N \mu_f$

F_N gesamte Normalkraft (Anpresskraft) des Fahrzeugs. Bei horizontaler Bahn ist

$F_N =$ Gewichtskraft des Fahrzeugs;

μ_f Fahrwiderstandszahlen:

Eisenbahn 0,0025

Straßenbahn mit Wälzlagern 0,005

Straßenbahn mit Gleitlagern 0,018

Kraftfahrzeuge auf Asphalt 0,025

Drahtseilbahn 0,01.

Mechanik fester Körper

Bremsen

Seilreibung

Durch Reibung F_R zwischen Zugmittel und Scheibe wird Spannkraft F_1 größer als Gegenkraft F_2 . Bei Gleichgewicht ist

$$F_1 = F_2 e^{\mu \alpha}$$

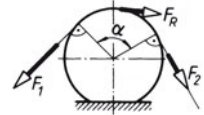
$e = 2,71828 \dots$ heißt Euler'sche Zahl

μ Reibungszahl zwischen Zugmittel und Scheibe: $\alpha = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi \text{rad}}{180^\circ}$

Umschlingungswinkel α im Bogenmaß (rad). (Werte für $e^{\mu \alpha}$ in 7.13)

Seilreibung F_R ist die größte Umfangskraft, die eine Seil-, Band- oder Riemenscheibe übertragen kann:

$$F_R = F_1 - F_2 = F_2 (e^{\mu \alpha} - 1) = F_1 \frac{(e^{\mu \alpha} - 1)}{e^{\mu \alpha}}$$

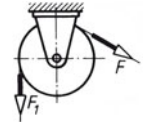


Rollen- und Flasenzüge

F Zugkraft, F_1 Last, s_1 Kraftweg, s_2 Lastweg, η Wirkungsgrad der festen und der losen Rolle, η_r Wirkungsgrad des Rollenzuges, n Anzahl der tragenden Seilstränge.

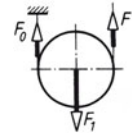
Feste Rolle (Leit- oder Umlenkrolle)

$$F = \frac{F_1}{\eta} \quad \eta \text{ für Ketten und Seile} \approx 0,96$$



Lose Rolle

$$F = \frac{F_1}{2\eta} \quad s_1 = 2 s_2$$



Flaschenzug (Rollenzug)

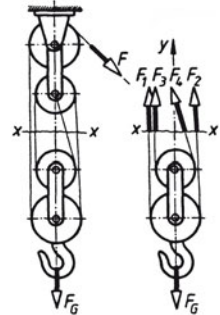
$$F = \frac{F_1}{n \eta_r} = F_1 \frac{1 - \eta}{\eta(1 - \eta^n)}$$

$$\eta_r = \frac{\eta(1 - \eta^n)}{n(1 - \eta)}$$

$$s_1 = n s_2$$

(η_r nach 7.13)

Rollenzug mit
 $n = 4$ tragenden Seilsträngen



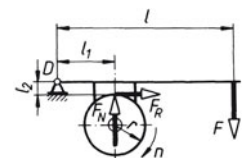
7.11 Bremsen

F Bremskraft in N, M Bremsmoment in Nm, P Wellenleistung in kW, μ Reibungszahl, sämtliche Längen l und r in m, Umschlingungswinkel in rad.

Backenbremse mit überhöhtem Drehpunkt D

$$F = F_N \frac{(l_1 \pm \mu l_2)}{l} \quad (+) \text{ bei Rechtslauf} \\ (-) \text{ bei Linkslauf}$$

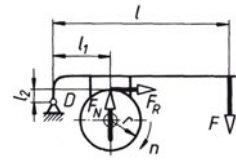
Selbsthemmung bei Linkslauf, wenn $l_1 < \mu l_2$.



Backenbremse mit unterzogenem Drehpunkt D

$$F = F_N \frac{(l_1 \mp \mu l_2)}{l} \quad (-) \text{ bei Rechtslauf} \\ (+) \text{ bei Linkslauf}$$

Selbsthemmung bei Rechtslauf, wenn $l_1 < \mu l_2$.



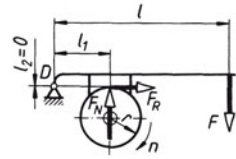
Backenbremse mit tangentialem Drehpunkt D

$$F = F_N \frac{l_1}{l}$$

Selbsthemmung tritt nicht auf.

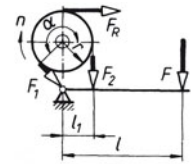
Die Normalkraft F_N ergibt sich bei den drei Backenbremsarten aus dem Bremsmoment M :

$$M = F_R r = F_N \mu r$$



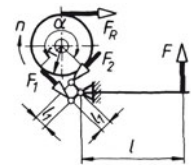
Einfache Bandbremse

$$M = F_R r = F r \frac{l}{l_1} (e^{\mu\alpha} - 1)$$



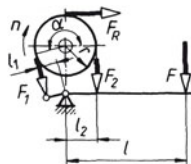
Summenbremse

$$M = F_R r = F r \frac{l}{l_1} \cdot \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha} + 1}$$



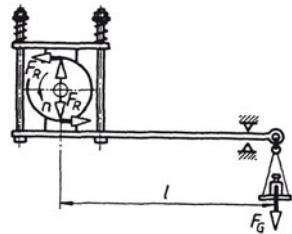
Differenzbremse

$$M = F_R r = F r l \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{l_2 - l_1 e^{\mu\alpha}}$$



Bremszaum

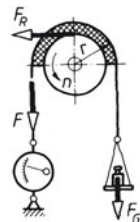
$$P = \frac{F_G l n}{9550} \quad \text{Einheiten siehe Bandbremszaum}$$



Bandbremszaum

$$P = \frac{(F_G - F) r n}{9550}$$

P	F_G	F	r, l	n
kW	N	N	m	min ⁻¹



Mechanik fester Körper

Geradlinige gleichmäßig beschleunigte (verzögerte) Bewegung

7.12 Gleitreibungszahl μ und Haftreibungszahl μ_0 (Klammerwerte sind die Gradzahlen für den Reibungswinkel ϱ bzw. ϱ_0)

Werkstoff	Haftreibungszahl μ_0		Gleitreibungszahl μ	
	trocken	gefettet	trocken	gefettet
Stahl auf Stahl	0,15 (8,5)	0,1 (5,7)	0,15 (8,5)	0,01 (0,6)
Stahl auf Gusseisen oder Bronze	0,19 (10,8)	0,1 (5,7)	0,18 (10,2)	0,01 (0,6)
Gusseisen auf Gusseisen		0,16 (9,1)		0,1 (5,7)
Holz auf Holz	0,5 (26,6)	0,16 (9,1)	0,3 (16,7)	0,08 (4,6)
Holz auf Metall	0,7 (35)	0,11 (6,3)	0,5 (26,6)	0,1 (5,7)
Lederriemen auf Gusseisen		0,3 (16,7)		
Gummiriemen auf Gusseisen			0,4 (21,8)	
Textilriemen auf Gusseisen			0,4 (21,8)	
Bremsbelag auf Stahl			0,5 (26,6)	0,4 (21,8)
Lederdichtungen auf Metall	0,6 (31)	0,2 (11,3)	0,2 (11,3)	0,12 (6,8)

7.13 Wirkungsgrad η_r des Rollenzugs in Abhängigkeit von der Anzahl n der tragenden Seilstränge ($\eta = 0,96$ angenommen)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
η_r	0,960	0,941	0,922	0,904	0,886	0,869	0,852	0,836	0,820	0,804

7.14 Geradlinige gleichmäßig beschleunigte (verzögerte) Bewegung

Die Gleichungen gelten auch für den *freien Fall* und für den *senkrechten Wurf* mit Fall- oder Steighöhe $h =$ Weg s und Fallbeschleunigung $g =$ Beschleunigung oder Verzögerung a ; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Beschleunigung a

Die Beschleunigung a ist konstant. Die rechnerische Behandlung beginnt mit dem Aufzeichnen des v, t -Diagramms, weil immer die Fläche unter der Geschwindigkeitslinie dem zurückgelegten Weg s entspricht.

$$a = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung } \Delta v}{\text{Zeitabschnitt } t} \text{ in } \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Umrechnung von $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$A \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{A \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \quad A, B \text{ Zahlenwert}$$

$$B \frac{\text{m}}{\text{s}} = B \cdot 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \text{Beispiel: } 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{72 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \cdot 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Mechanik fester Körper

Geradlinige gleichmäßig beschleunigte (verzögerte) Bewegung

Endgeschwindigkeit
 v_e (bei $v_a = 0$)

$$v_e = a t = \sqrt{2as}$$

Endgeschwindigkeit
 v_e (bei $v_a \neq 0$)

$$v_e = v_a + \Delta v = v_a + a t$$

$$v_e = \sqrt{v_a^2 + 2as}$$

Weg s
(bei $v_a = 0$)

$$s = \frac{v_e t}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{v_e^2}{2a}$$

Weg s
(bei $v_a \neq 0$)

$$s = \frac{v_a + v_e}{2} t = v_a t + \frac{at^2}{2} = \frac{v_e^2 - v_a^2}{2a}$$

Zeit t
(bei $v_a = 0$)

$$t = \frac{v_e}{a} = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

Zeit t
(bei $v_a \neq 0$)

$$t = \frac{v_e - v_a}{a} = -\frac{v_a}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_a}{a}\right)^2 + \frac{2s}{a}}$$

Beschleunigung a
(bei $v_a = 0$)

$$a = \frac{v_e^2}{2s} = \frac{v_e}{t} = \frac{2s}{t^2}$$

Beschleunigung a
(bei $v_a \neq 0$)

$$a = \frac{v_e - v_a}{t} = \frac{v_e^2 - v_a^2}{2s}$$

Anfangsgeschwindigkeit
 v_a (bei $v_e = 0$)

$$v_a = a t = \sqrt{2as}$$

Anfangsgeschwindigkeit
 v_a (bei $v_e \neq 0$)

$$v_a = v_e + \Delta v = v_e + a t$$

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + 2as}$$

Weg s
(bei $v_e = 0$)

$$s = \frac{v_a t}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{v_a^2}{2a}$$

Weg s
(bei $v_e \neq 0$)

$$s = \frac{v_a + v_e}{2} t = v_a t - \frac{at^2}{2}$$

Zeit t
(bei $v_e = 0$)

$$t = \frac{v_a}{a} = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

Zeit t
(bei $v_e \neq 0$)

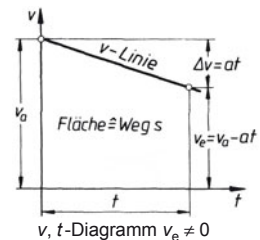
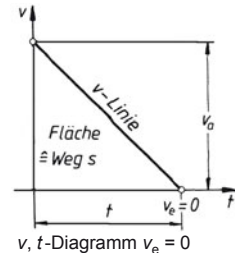
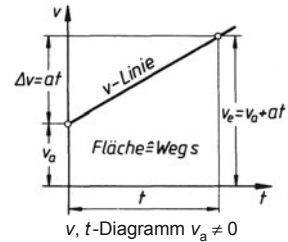
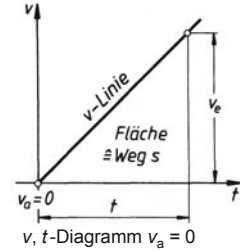
$$t = \frac{v_a - v_e}{a} = \frac{v_a}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_a}{a}\right)^2 - \frac{2s}{a}}$$

Verzögerung a
(bei $v_e = 0$)

$$a = \frac{v_a}{t} = \frac{v_a^2}{2s} = \frac{2s}{t^2}$$

Verzögerung a
(bei $v_e \neq 0$)

$$a = \frac{v_a - v_e}{t} = \frac{v_a^2 - v_e^2}{2s}$$



Mechanik fester Körper

Gleichförmige Drehbewegung

7.15 Wurfgleichungen

7.15.1 Horizontaler Wurf (ohne Luftwiderstand)

Geschwindigkeit v
in einem Bahnpunkt

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_a^2 + (gt)^2}$$

Geschwindigkeit v
nach Fallhöhe h

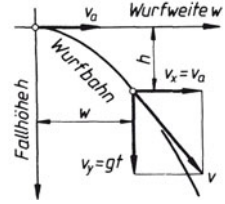
$$v = \sqrt{v_a^2 + 2gh}$$

Fallhöhe h
nach Wurfweite w

$$h = \frac{gw^2}{2v_a^2} \quad \text{Gleichung der Wurfbahn}$$

Wurfweite w

$$w = v_a \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



17.15.2 Wurf schräg nach oben (ohne Luftwiderstand)

Wurfweite w
(Größtwert bei $\alpha = 45^\circ$)

$$w = \frac{v_a^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Wurfdauer t

$$t = \frac{w}{v_a \cos \alpha} = \frac{2v_a \sin \alpha}{g}$$

Wurfhöhe h

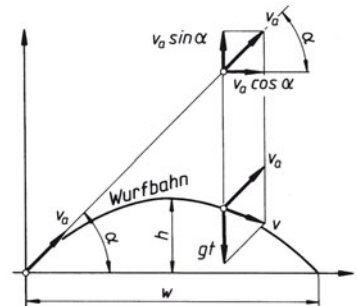
$$h = \frac{v_a^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Geschwindigkeit v_x
in x-Richtung

$$v_x = v_a \cos \alpha$$

Geschwindigkeit v_y
in y-Richtung

$$v_y = v_a \sin \alpha - gt$$



7.16 Gleichförmige Drehbewegung

Winkelgeschwindigkeit ω

$$\omega = 2\pi n = \frac{\varphi}{t} = \frac{v_u}{r}$$

Schieberweg s
(Hub)

$$s = r(1 - \cos \varphi)$$

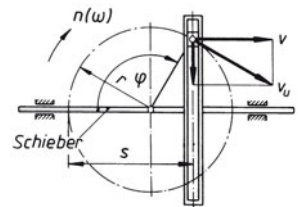
Umfangsgeschwindigkeit v_u

$$v_u = \frac{\varphi}{t} r = \omega r = d\pi n = 2\pi r n$$

Schiebergeschwindigkeit v

$$v = r \omega \sin \varphi$$

$$v_{\max} = v_u$$



Mechanik fester Körper

Gleichmäßig beschleunigte (verzögerte) Kreisbewegung

Drehwinkel φ
(z Anzahl der Umdrehungen)

$$\varphi = \omega t = 2 \pi z$$

v_u, v	ω, n	t	r, s	φ	z
$\frac{m}{s}$	$\frac{rad}{s}$	s	m	rad	1

Umfangsgeschwindigkeit v_u

$$v_u = \frac{\pi d n}{1000}$$

v_u	d	n
$\frac{m}{min}$	mm	min^{-1}

$$v_u = \frac{\pi d n}{60000}$$

v_u	d	n
$\frac{m}{s}$	mm	min^{-1}

Winkelgeschwindigkeit ω

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1n$$

ω	n
$\frac{rad}{s}$	min^{-1}

7.17 Gleichmäßig beschleunigte (verzögerte) Kreisbewegung

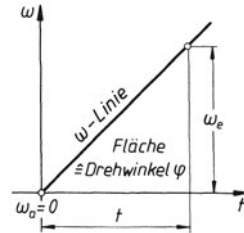
Winkelbeschleunigung α

Die Winkelbeschleunigung α ist konstant. Die rechnerische Behandlung beginnt mit dem Aufzeichnen des ω, t -Diagramms (ω Winkelgeschwindigkeit), weil immer die Fläche unter der Winkelgeschwindigkeitslinie dem überstrichenen Drehwinkel φ entspricht.

$$\alpha = \frac{\text{Winkelgeschwindigkeitsänderung } \Delta\omega}{\text{Zeitabschnitt } t} \text{ in } \frac{rad}{s^2}$$

Endwinkelgeschwindigkeit ω_e
(bei $\omega_a = 0$)

$$\omega_e = \alpha t = \sqrt{2\alpha\varphi}$$



ω, t -Diagramm bei $\omega_a = 0$

Endwinkelgeschwindigkeit ω_e (bei $\omega_a \neq 0$)

$$\omega_e = \omega_a + \Delta\omega = \omega_a + \alpha t$$

$$\omega_e = \sqrt{\omega_a^2 + 2\alpha\varphi}$$

Drehwinkel φ
(bei $\omega_a = 0$)

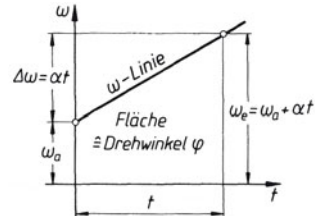
$$\varphi = \frac{\omega_e t}{2} = \frac{\alpha t^2}{2} = \frac{\omega_e^2}{2\alpha}$$

Drehwinkel φ
(bei $\omega_a \neq 0$)

$$\varphi = \frac{\omega_a + \omega_e}{2} t = \omega_a t + \frac{\alpha t^2}{2} = \frac{\omega_e^2 - \omega_a^2}{2\alpha}$$

Zeit t
(bei $\omega_a = 0$)

$$t = \frac{\omega_e}{\alpha} = \sqrt{\frac{2\varphi}{\alpha}}$$



ω, t -Diagramm bei $\omega_a \neq 0$

Zeit t
(bei $\omega_a \neq 0$)

$$t = \frac{\omega_e - \omega_a}{\alpha} = -\frac{\omega_a}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_a^2}{\alpha} + \frac{2\varphi}{\alpha}\right)}$$

Winkelbeschleunigung α
(bei $\omega_a = 0$)

$$\alpha = \frac{\omega_e}{t} = \frac{\omega_e^2}{2\varphi} = \frac{2\varphi}{t^2}$$

Mechanik fester Körper

Sinusschwingung (harmonische Schwingung)

Winkelbeschleunigung α
(bei $\omega_a \neq 0$)

$$\alpha = \frac{\omega_e - \omega_a}{t} = \frac{\omega_e^2 - \omega_a^2}{2\varphi}$$

Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_a
(bei $\omega_e = 0$)

$$\omega_a = \alpha t = \sqrt{2\alpha\varphi}$$

Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_a
(bei $\omega_e \neq 0$)

$$\omega_a = \omega_e + \Delta\omega = \omega_e + \alpha t$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_e^2 + 2\alpha\varphi}$$

Drehwinkel φ
(bei $\omega_e = 0$)

$$\varphi = \frac{\omega_a t}{2} = \frac{\alpha t^2}{2} = \frac{\omega_a^2}{2\alpha}$$

Drehwinkel φ
(bei $\omega_e \neq 0$)

$$\varphi = \frac{\omega_a + \omega_e}{2} t = \omega_a t - \frac{\alpha t^2}{2}$$

Zeit t
(bei $\omega_e = 0$)

$$t = \frac{\omega_a}{\alpha} = \sqrt{\frac{2\varphi}{\alpha}}$$

Zeit t
(bei $\omega_e \neq 0$)

$$t = \frac{\omega_a - \omega_e}{\alpha} = \frac{\omega_a}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_a}{\alpha}\right)^2 - \frac{2\varphi}{\alpha}}$$

Winkelverzögerung α
(bei $\omega_e = 0$)

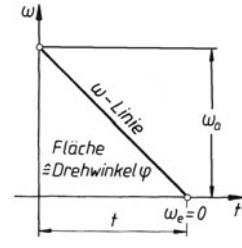
$$\alpha = \frac{\omega_a}{t} = \frac{\omega_a^2}{2\varphi} = \frac{2\varphi}{t^2}$$

Winkelverzögerung α
(bei $\omega_e \neq 0$)

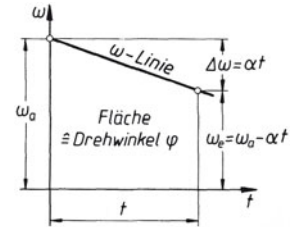
$$\alpha = \frac{\omega_a - \omega_e}{t} = \frac{\omega_a^2 - \omega_e^2}{2\varphi}$$

Tangentialbeschleunigung oder -verzögerung a_T

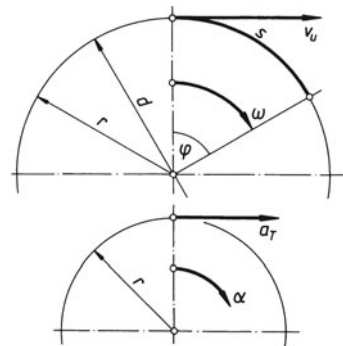
$$a_T = \frac{\Delta\omega r}{t} = \alpha r = \frac{\Delta v_{\perp}}{t}$$



ω, t -Diagramm bei $\omega_e = 0$



ω, t -Diagramm bei $\omega_e \neq 0$



7.18 Sinusschwingung (harmonische Schwingung)

Periodische Schwingung

liegt vor, wenn sich eine physikalische Größe (z. B. Auslenkung y eines Punktes) zeitlich so verändert, dass sich der Vorgang nach Periodendauer T (Schwingungsdauer) in genau gleicher Weise wiederholt.



Sinusschwingung (harmonische Schwingung)

ist Sonderfall einer periodischen Schwingung, z. B. eine lineare Schwingung, die sich als seitliche Projektion eines gleichförmig auf der Kreisbahn umlaufenden Punktes darstellen lässt.

Mechanik fester Körper

Sinusschwingung (harmonische Schwingung)

Zusammenhang zwischen periodischer Schwingung und Sinusschwingung

Jede periodische Schwingung lässt sich durch eine Fourier-Entwicklung in Sinusschwingungen zerlegen:

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos(n\omega t) + \sum B_n \sin(n\omega t)$$

Differenzialgleichung der freien ungedämpften Schwingung

$$m\ddot{y} + Ry = 0 \quad \text{für geradlinige Schwingbewegung}$$

$$J\ddot{\varphi} + R\varphi = 0 \quad \text{für Drehbewegung}$$

m Masse des Schwingers, y Auslenkung, R Federrate, J Trägheitsmoment, φ Drehwinkel

Phase

Phase ist der Winkel φ im Bogenmaß (rad), den der umlaufende Punkt im Zeitabschnitt t durchläuft:

$$\varphi = \omega t = 2\pi f t = 2\pi z$$

Auslenkung y

y ist die momentane Entfernung des schwingenden Punktes von der Nulllage (Mittellage, Gleichgewichtslage)

Amplitude A

A (Schwingsweite) ist die maximale Auslenkung y_{\max} aus der Nulllage. Bei ungedämpfte Schwingung ist $A = \text{konstant}$.

Periodendauer T (Schwingungsdauer)

$$T = \frac{t}{z} = \frac{\text{gemessener Zeitabschnitt}}{\text{Anzahl der Schwingungen}} \quad T \text{ ist die Zeit für eine volle Schwingung}$$

Frequenz f

f (Schwingungszahl) ist der Quotient aus der Anzahl z der Schwingungen und dem zugehörigen Zeitabschnitt t :

$$f = \frac{z}{t} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

f	T, t	z	ω	φ	n	A, y	v_y	a_y
$\frac{1}{s}$	s	1	$\frac{1}{s}$	rad	$\frac{1}{s}$	m	$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s^2}$

Kreisfrequenz ω

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \frac{z}{t} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Auslenkung y , Geschwindigkeit v_y und Beschleunigung a_y eines harmonisch schwingenden Punktes

$$y = A \sin(\omega t) = A \sin(2\pi f t) = A \sin \frac{2\pi t}{T}$$

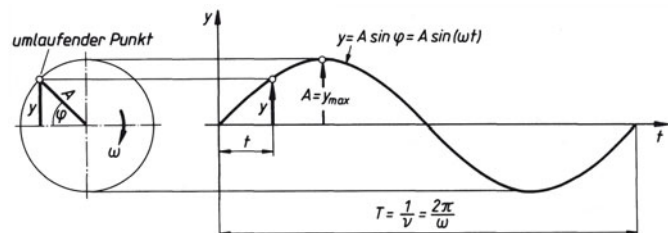
$$v_y = A \omega \cos(\omega t) = A \omega \cos(2\pi f t) = A \omega \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$a_y = -A \omega^2 \sin(\omega t) = -A \omega^2 \sin(2\pi f t) = -A \omega^2 \sin \frac{2\pi t}{T} = -y \omega^2$$

Schwingungsbeginn bei Phasenwinkel $\Delta\varphi_0$

$$y = A \sin(\varphi + \Delta\varphi_0) = A \sin(\omega t + \Delta\varphi_0)$$

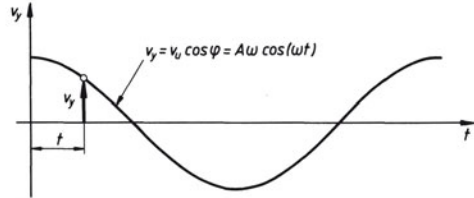
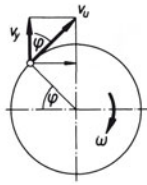
Auslenkung-Zeit-Diagramm



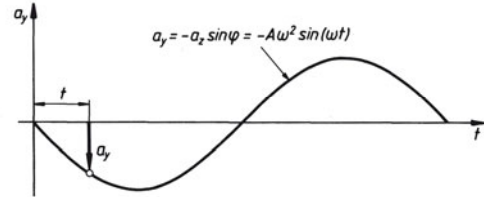
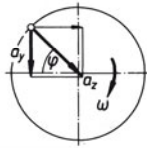
Mechanik fester Körper

Pendelgleichungen

Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm



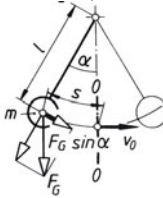
Beschleunigung-Zeit-Diagramm



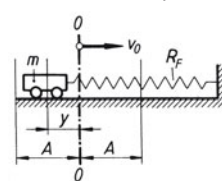
7.19 Pendelgleichungen

Pendelart

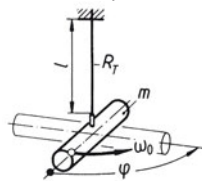
Schwerependel



Schraubenfederpendel



Torsionspendel



**Rückstellkraft F_R
Rückstellmoment M_R**

$$F_R = F_G \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

$$F_R = \frac{mg}{l} s = Ds$$

$$F_R = R_F y = m \frac{4\pi^2}{T^2} y$$

$$M_R = R_T \varphi$$

**Richtgröße D
Federrate R_F, R_T**

$$D = \frac{mg}{l}$$

$$R_F = m \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$R_T = \frac{M_R}{\Delta \varphi} = \frac{I_p G}{l}$$

(G Schubmodul, I_p polares Flächenmoment 2. Grades)

Periodendauer T

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{R_F}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{R_T}}$$

J Trägheitsmoment

**maximale
Geschwindigkeit v_0
maximale
Winkelgeschwindigkeit ω_0**

$$v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_{\max})}$$

gilt bis $\alpha_{\max} < 14^\circ$

$$v_0 = A \sqrt{\frac{R_F}{m}}$$

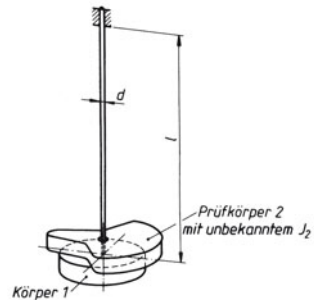
$$\omega_0 = \varphi \sqrt{\frac{R_T}{J}}$$

J Trägheitsmoment

experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes J_2 eines Körpers

$$J_2 = J_1 \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1^2}$$

J_1 bekanntes Trägheitsmoment
 J_2 unbekanntes Trägheitsmoment
 T_1 gemessene Schwingungsdauer bei Körper 1 allein
 T_2 bei Körper 1 und 2 zusammen



Einheiten der vorkommenden physikalischen Größen

F_R, F_G	M_R	m	g	l, s, y, A	R_F	R_T	φ	T	ω	J	v_0	ω_0
N	Nm/rad	kg	m/s ²	m	N/m	Nm/rad	rad	s	1/s	kgm ²	m/s	1/s

7.20 Schubkurbelgetriebe
 (für $\omega = \text{konstant} = \pi n / 30$)

Umfangsgeschwindigkeit v_u

$$v_u = \omega r = \frac{\pi h n}{60}$$

Kolbenweg s
 (+) für Hingang
 (-) für Rückgang

$$s = r(1 - \cos \varphi) \pm l(1 - \cos \beta)$$

$$s \approx r(1 - \cos \varphi \pm 0,5 \lambda \sin^2 \varphi)$$

Schubstangenverhältnis λ

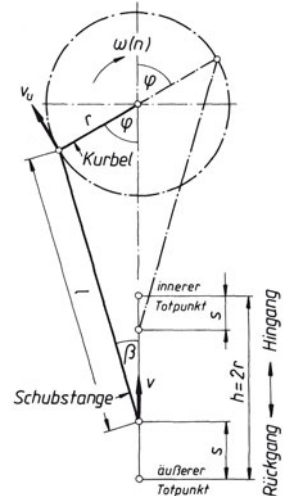
$$\lambda = \frac{\text{Kurbelradius } r}{\text{Länge der Schubstange } l}$$

Kolbengeschwindigkeit v
 (+) für Hingang
 (-) für Rückgang

$$v = v_u (\sin \varphi \pm 0,5 \lambda \sin 2 \varphi)$$

$$v = \omega r (\sin \omega t \pm 0,5 \lambda \sin 2 \omega t)$$

$$v_{\max} = v_u (1 + 0,5 \lambda^2) = \omega r (1 + 0,5 \lambda^2)$$



mittlere Geschwindigkeit v_m

$$v_m = \frac{hn}{30}$$

v_u, v_m, v	ω	a	h, r, s, l	λ	n
m/s	1/s	m/s ²	m	1	min ⁻¹

Kolbenbeschleunigung a
 (+) für Hingang
 (-) für Rückgang

$$a = \frac{v_u^2}{r} (\cos \varphi \pm \lambda \cos 2 \varphi)$$

$$a = \omega^2 r (\cos \omega t \pm \lambda \cos 2 \omega t)$$

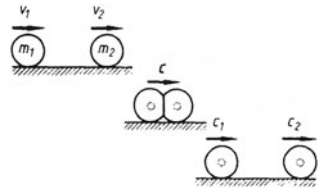
$$a_{\max} = \omega^2 r (1 \pm \lambda) \text{ in den Totlagen}$$

Mechanik fester Körper

Gerader zentrischer Stoß

7.21 Gerader zentrischer Stoß

Zwei Körper der Masse m_1, m_2 bewegen sich vor dem Stoß in Richtung der Stoßlinie mit den Geschwindigkeiten $v_1 > v_2$. Gemeinsamer Berührungspunkt und die Schwerpunkte beider Körper liegen auf der Stoßlinie. Nach erstem Stoßabschnitt (Stoßkraft $F = F_{\max}$) haben beide Körper die Geschwindigkeit c , nach zweitem Stoßabschnitt ($F = 0$) die Geschwindigkeiten c_1, c_2 .



Stoßzahl k

$$k = \frac{c_2 - c_1}{v_1 - v_2} \quad k = \frac{15}{16} \text{ für Glas, } \frac{8}{9} \text{ für Elfenbein,}$$

$$\frac{5}{9} \text{ für Stahl und Kork, } \frac{1}{2} \text{ für Holz}$$

$k = 0$ vollkommen unelastischer Stoß; $\Delta W = 0$ (ΔW Energieverlust)
 $k = 1$ vollkommen elastischer Stoß
 allgemeiner Fall: $0 < k < 1$

Stoßzahlbestimmung

$$k = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$$

h freie Fallhöhe einer Kugel auf waagerechte Platte aus gleichem Material
 h_1 Rücksprunghöhe der Kugel

gemeinsame Geschwindigkeit c

$$c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

c, v	m	k	W
$\frac{m}{s}$	kg	1	J

Geschwindigkeiten c_1, c_2 nach dem Stoß

$$c_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2}$$

$$c_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 (v_1 - v_2) k}{m_1 + m_2}$$

Energieverlust ΔW beim Stoß

$$\Delta W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2)$$

Energieverlust ΔW beim vollkommen unelastischen Stoß

$k = 0 \quad c_1 = c_2 = c$ Für Schmieden und Nieten muss ΔW möglichst groß sein ($m_2 \square m_1$)

$$\Delta W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

Geschwindigkeiten c_1, c_2 nach dem vollkommen elastischen Stoß

$k = 1 \quad \Delta W = 0$

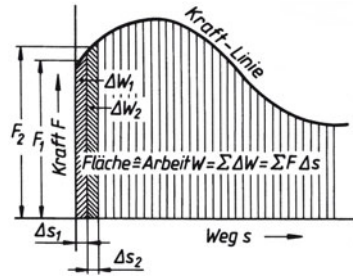
$$c_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad c_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Sonderfälle

bei $m_1 = m_2$ wird $c_1 = v_2$ und $c_2 = v_1$
 bei $m_2 = \infty$ und $v_2 = 0$ wird $c_1 = -v_1$
 bei $m_1 = \infty$ und $v_2 = 0$ wird $c_2 = 2v_1$

7.22 Mechanische Arbeit W

Die mechanische Teilarbeit ΔW einer den Körper bewegenden Kraft F ist das Produkt aus dem Wegabschnitt Δs und der Kraftkomponente F in Wegrichtung. Die Gesamtarbeit W ist die Summe aller Teilarbeiten ΔW :



Arbeit W einer veränderlichen Kraft

$$W = \sum \Delta W = \sum F \Delta s = F_1 \Delta s_1 + F_2 \Delta s_2 + \dots + F_n \Delta s_n$$

Die von der Kraft F oder dem Drehmoment M verrichtete Arbeit W entspricht immer der Fläche unter der Kraft- oder Momentenlinie im Kraft-Weg-Diagramm oder im Moment-Drehwinkel-Diagramm.

kohärente Einheit
(gesetzliche Einheit,
zugleich SI-Einheit)

1 Joule (J) = 1 Wattsekunde (Ws)

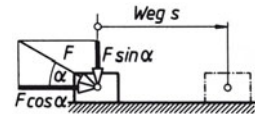
$$1 \text{ J} = 1 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

1 J = 1 N = 1 Ws

Arbeit W der konstanten Kraft F

$$W = F s \cos \alpha$$

$$W = F s \text{ (für } \alpha = 0^\circ \text{)}$$



Arbeit W der Gewichtskraft F_G (Hubarbeit)

$$W = F_G h = mgh$$

W	F_G	m	g	h
J = Nm	N	kg	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	m

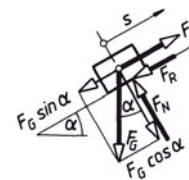
F_G Gewichtskraft des Körpers
 m Masse des Körpers
 h Hubhöhe

Reibungsarbeit W_R auf schiefer Ebene mit Winkel α , Kraft F parallel zur Bahn

$$W_R = F_R s \quad \mu \text{ Reibungszahl nach 7.12}$$

$$W_R = F_G \mu s \cos \alpha = mg \mu s \cos \alpha$$

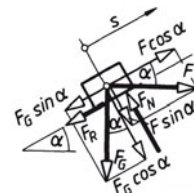
W_R	F_R, F_G	m	g	s
J = Nm	N	kg	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	m



Kraft F waagrecht

$$W_R = F_R s$$

$$W_R = \mu s (F_G \cos \alpha + F \sin \alpha)$$



Mechanik fester Körper

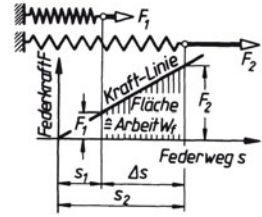
Leistung P , Übersetzung i und Wirkungsgrad η

Formänderungsarbeit W_f
 R Federrate
(Federsteifigkeit)

$$W_f = \frac{F_1 + F_2}{2} \Delta s; \quad R = \frac{F_2 - F_1}{\Delta s} = \frac{F_2}{s_2} = \frac{F_1}{s_1}$$

$$W_f = \frac{R}{2} (s_2^2 - s_1^2)$$

W_f	F_1, F_2	s_1, s_2	R
$J = \text{Nm}$	N	m	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$

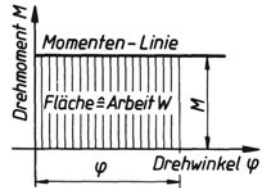


Arbeit W eines konstanten Drehmoments M

$$W = M \varphi$$

$$W = F_T \cdot 2 \pi r z$$

W	M	φ	F_T	r	z
$J = \text{Nm}$	$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	rad	N	m	1



Beschleunigungsarbeit W_b eines konstanten Kraftmoments M

$$W = \frac{J}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

W_b	J	ω
$J = \text{Nm}$	kgm^2	$\frac{1}{\text{s}}$

ω_1, ω_2 Winkelgeschwindigkeit vor oder nach dem Beschleunigungs- oder Verzögerungsvorgang

7.23 Leistung P , Übersetzung i und Wirkungsgrad η

P_{trans} bei geradliniger Bewegung

$$P_{\text{trans}} = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv$$

P_{trans}	F	v
$\frac{J}{s} = \frac{\text{Nm}}{s} = W$	N	$\frac{\text{m}}{s}$

P_{rot} bei Drehbewegung

$$P_{\text{rot}} = M \omega = 2 \pi Mn$$

P_{rot}	M	n, ω
$J = \frac{\text{Nm}}{s} = W$	Nm	$\frac{1}{s}$

Zahlenwertgleichungen für Leistung P und Drehmoment M

$$P = \frac{Mn}{9550}$$

$$M = 9550 \frac{P}{n}$$

P	M	n
kW	Nm	min^{-1}

Wirkungsgrad η
 M_1 Antriebsmoment
 M_2 Abtriebsmoment
 i Übersetzung

$$\eta = \frac{\text{Nutzarbeit } W_n}{\text{zugeführte Arbeit } W_z} = \frac{\text{Nutzleistung } P_n}{\text{zugeführte Leistung } P_z} < 1$$

$$\eta = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{1}{i} \quad M_2 = M_1 \eta_{\text{ges}} i_{\text{ges}}$$

Gesamtwirkungsgrad η_{ges}

$$\eta_{\text{ges}} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n < 1$$

Übersetzung i

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$i = \frac{M_2}{M_1} \text{ (ohne Reibung)} \quad i = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{1}{\eta_{\text{res}}} \text{ (mit Reibung)}$$

7.24 Dynamik der Verschiebewegung (Translation)

Dynamisches Grundgesetz, allgemein

$$F_{\text{res}} = ma$$

F_{res}, F_G	m	a, g
$N = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$	kg	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

F_{res} ist Resultierende der Kräftegruppe in Beschleunigungsrichtung
 m Masse des Körpers
 a Beschleunigung
 g Fallbeschleunigung

g_n Normfallbeschleunigung = $9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

F_{Gn} Normgewichtskraft des Körpers

Dynamisches Grundgesetz für freien Fall

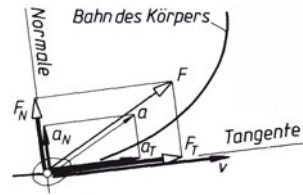
$$F_G = mg$$

$$F_{Gn} = mg_n$$

Dynamisches Grundgesetz für Tangenten- und Normalenrichtung

$$F_N = ma_N = m \frac{v^2}{\rho} = m \rho \omega^2$$

$$F_T = ma_T$$



F_N Zentripetalkraft
 ρ Krümmungsradius
 (für Kreisbogen ist $\rho = r$)

F_N, F_T	m	a_N, a_T	v	ρ	ω
$N = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$	kg	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	m	$\frac{1}{\text{s}}$

Energieerhaltungssatz

$$E_E = E_A + W_z - W_a$$

Energie am Ende = Energie am Anfang + zugeführte - abgeführte
 des Vorganges = des Vorganges + Arbeit - Arbeit
 (meist Reibungsarbeit W_R)

potenzielle Energie E_p
(Energie der Lage)

$$E_p = F_G h = mgh$$

kinetische Energie E_k
(Bewegungsenergie)

$$E_k = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$E_k = \text{Beschleunigungsarbeit } W_b$$

E	m	g	h	F_G	v_1, v_2
$J = Nm = Ws$	kg	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	m	N	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Impulserhaltungssatz (Antriebssatz)

$$F_{\text{res}}(t_2 - t_1) = m(v_2 - v_1)$$

für den „kräftefreien“ Körper ($F_{\text{res}} = 0$) gilt
 $m v_2 - m v_1 = 0$
 $m v_1 = m v_2 = \text{konstant}$

F_{res}	t	m	v
$N = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$	s	kg	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

d'Alembert'scher Satz

Körper freimachen, Beschleunigungsrichtung eintragen, Trägheitskraft

$$T = ma$$

entgegengesetzt zur Beschleunigungsrichtung eintragen,

Gleichgewichtsbedingungen unter Einschluss der Trägheitskraft (oder -kräfte) ansetzen.

T	m	a
$N = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$	kg	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Mechanik fester Körper

Dynamik der Drehung

7.25 Dynamik der Drehung (Rotation)

Dynamisches Grundgesetz, allgemein

$$M_{\text{res}} = J \alpha$$

M_{res} resultierendes Drehmoment
 J Trägheitsmoment nach 7.26
 α Winkelbeschleunigung

M_{res}	J	α
$\text{Nm} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$	kgm^2	$\frac{1}{\text{s}^2}$

Trägheitsmoment J Definitionsgleichung

$$J = \sum \Delta m r^2$$

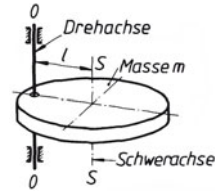
Berechnungsgleichungen in 7.26

$$J = \int d m \varrho^2$$

Verschiebesatz (Steiner)

$$J_0 = J_s + m l^2$$

J_0 Trägheitsmoment für gegebene parallele Drehachse 0-0
 J_s Trägheitsmoment für parallele Schwerachse S-S
 $m l^2$ Masse m mal Abstandsquadrat der beiden Achsen



Trägheitsradius i

$$i = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

$$i = \frac{D_i}{2}$$

i, D_i	J	m
m	kgm^2	kg

Reduktion der Trägheitsmomente $J_1, J_2 \dots$ bei Getrieben

$$J_{\text{red}} = J_1 + J_2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 + J_3 \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2 + \dots \quad n \text{ Drehzahl}$$

resultierendes Beschleunigungsmoment M_{res} der Antriebsachse 1

$$M_{\text{res}} = J_{\text{red}} \alpha_1$$

α_1 Winkelbeschleunigung

Drehenergie E (Drehwucht)

$$E = \frac{J}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) = \text{Beschleunigungsarbeit } W_b$$

Energieerhaltungssatz der Drehung

$$\frac{J}{2} \omega_2^2 = \frac{J}{2} \omega_1^2 \pm M_{\text{res}} \varphi$$

Drehwucht am Ende = Drehwucht am Anfang \pm zu- oder abgeführter Arbeit des des Vorganges des Vorganges resultierenden Moments aller Kräfte

Impulserhaltungssatz (Antriebssatz)

$$M_{\text{res}} (t_2 - t_1) = J (\omega_2 - \omega_1)$$

für den „kräftefreien“ Körper ($M_{\text{res}} = 0$) gilt

$$J \omega_2 - J \omega_1 = 0$$

$$J \omega_1 - J \omega_2 = \text{konstant}$$

M_{res}	t	J	ω
$J = \text{Nm} = \text{Ws}$	s	kgm^2	$\frac{1}{\text{s}}$

Fliehkraft F_z

$$F_z = m r_s \omega^2 = m \frac{v^2}{r_s}$$

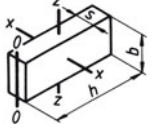
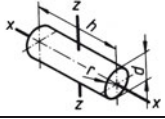
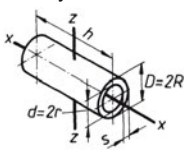
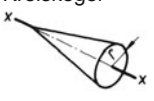

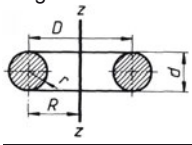
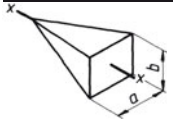
r_s Abstand des Körperschwerpunkts S von Drehachse

ω Winkelgeschwindigkeit

v Umfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts um die Drehachse

F_z	m	r_s	ω	v
$\text{N} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$	kg	m	$\frac{1}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$

7.26 Gleichungen für Trägheitsmomente J (Massenmomente 2. Grades)

Art des Körpers	Trägheitsmoment J (J_x um die x -Achse; J_z um die z -Achse); ρ Dichte
<p>Rechteck, Quader</p> 	$J_x = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2) = \frac{1}{12} \rho h b s (b^2 + h^2)$ <p>bei geringer Plattendicke s ist</p> $J_z = \frac{1}{12} m h^2 = \frac{1}{12} \rho b h^3 s \quad J_0 = \frac{1}{3} m h^2 = \frac{1}{3} \rho b h^3 s$ <p>Würfel mit Seitenlänge a: $J_x = J_z = m \frac{a^2}{6}$</p>
<p>Kreiszyylinder</p> 	$J_x = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{8} m d^2 = \frac{1}{32} \rho \pi d^4 h = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 h$ $J_z = \frac{1}{16} m (d^2 + \frac{4}{3} h^2) = \frac{1}{64} \rho \pi d^2 h (d^2 + \frac{4}{3} h^2)$
<p>Hohlzylinder</p> 	$J_x = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2) = \frac{1}{8} m (D^2 + d^2) = \frac{1}{32} \rho \pi h (D^4 - d^4)$ $J_x = \frac{1}{2} \rho \pi h (R^4 - r^4)$ $J_z = \frac{1}{4} m (R^2 + r^2 + \frac{1}{3} h^2) = \frac{1}{16} m (D^2 + d^2 + \frac{4}{3} h^2)$
<p>Kreiskegel</p> 	$J_x = \frac{3}{10} m r^2$ <p>Kreiskegelstumpf: $J_x = \frac{3}{10} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$</p>
<p>Zylindermantel</p>	$J_x = \frac{1}{4} m d_m^2 = \frac{1}{4} \rho \pi d_m^3 h s$ $J_z = \frac{1}{8} m (d_m^2 + \frac{2}{3} h^2) = \frac{1}{8} \rho \pi d_m h s (d_m^2 + \frac{2}{3} h^2)$ <p>Hohlzylinder mit Wanddicke $s = \frac{1}{2} (D - d)$ sehr klein im Verhältnis zum mittleren Durchmesser $d_m = \frac{1}{2} (D + d)$</p>
<p>Kugel</p> 	$J_x = \frac{2}{5} m r^2 = \frac{1}{10} m d^2 = \frac{1}{60} \rho \pi d^5 = \frac{8}{15} \rho \pi r^5$
<p>Hohlkugel (Kugelschale)</p>	$J_x = J_z = \frac{1}{6} m d_m^2 = \frac{1}{6} \rho \pi d_m^4 s$ <p>Wanddicke $s = \frac{1}{2} (D - d)$ sehr klein im Verhältnis zum mittleren Durchmesser $d_m = \frac{1}{2} (D + d)$</p>
<p>Ring</p> 	$J_z = m (R^2 + \frac{3}{4} r^2) = \frac{1}{4} m (D^2 + \frac{3}{4} d^2) \quad m = 2 \pi^2 r^2 R \rho$ $J_z = \frac{1}{16} \rho \pi^2 D d^2 (D^2 + \frac{3}{4} d^2) = \frac{1}{4} m D^2 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]$
	$J_x = \frac{1}{20} m (a^2 + b^2)$

Mechanik fester Körper

Größen und Definitionsgleichungen für Schiebung und Drehung

7.27 Gegenüberstellung einander entsprechender Größen und Definitionsgleichungen für Schiebung und Drehung

Geradlinige (translatorische) Bewegung

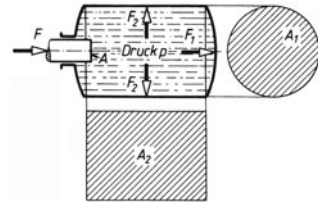
Drehende (rotatorische) Bewegung

Größe	Definitionsgleichung	Einheit	Größe	Definitionsgleichung	Einheit
Weg s	Basisgröße	m	Drehwinkel φ	$\frac{\text{Bogen } b}{\text{Radius } r}$	rad = 1
Zeit t	Basisgröße	s	Zeit t	Basisgröße	s
Masse m	Basisgröße	kg	Trägheitsmoment J	$J = \int dm \varrho^2$	kgm ²
Geschwindigkeit v	$v = \frac{ds}{dt} \left(= \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Winkelgeschwindigkeit ω	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \left(= \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right)$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}$
Beschleunigung a	$a = \frac{dv}{dt} \left(= \frac{\Delta v}{\Delta t} \right)$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Winkelbeschleunigung α	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \left(= \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right)$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \frac{1}{\text{s}^2}$
Beschleunigungskraft F_{res}	$F_{\text{res}} = m a$	N = $\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$	Beschleunigungsmoment M_{res}	$M_{\text{res}} = J \alpha$	Nm = $\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$
Arbeit W_{trans}	$W_{\text{trans}} = F s$	J = Nm = Ws	Arbeit W_{rot}	$W_{\text{rot}} = M \varphi$	J = Nm = Ws
Leistung P_{trans}	$P_{\text{trans}} = \frac{W_{\text{trans}}}{t} = Fv$	$\frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = \text{W}$	Leistung P_{rot}	$P_{\text{rot}} = \frac{W_{\text{rot}}}{t} M \omega$	$\frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = \text{W}$
Wucht W_{trans}	$W_{\text{trans}} = \frac{m}{2} v^2$	Nm = $\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$	Drehwucht W_{rot}	$W_{\text{rot}} = \frac{J}{2} \omega^2$	Nm = $\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$
Arbeitssatz (Wuchtsatz)	$W_{\text{trans}} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2)$	Nm = $\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$	Arbeitssatz (Wuchtsatz)	$W_{\text{rot}} = \frac{J}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2)$	Nm = $\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$
Impulserhaltungssatz	$F_{\text{res}} (t_2 - t_1) = m (v_2 - v_1)$ Kraftstoß = Impulsänderung		Impulserhaltungssatz	$M_{\text{res}} (t_2 - t_1) = J (\omega_2 - \omega_1)$ Momentenstoß = Drehimpulsänderung	

8.1 Statik der Flüssigkeiten

Druck p auf ebene und gewölbte Flächen

$$p = \frac{F}{A} \quad \frac{p}{\frac{N}{m^2}} = Pa \quad \left| \begin{array}{c} F \\ N \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} A \\ m^2 \end{array} \right|$$



Der Druck, der von außen auf irgendeinen Teil der abgesperrten Flüssigkeit ausgeübt wird (z. B. durch Kolbenkraft), pflanzt sich auf alle Teile nach allen Richtungen unverändert fort.

(1 Pascal (Pa) = 1 Newton durch Quadratmeter (N/m²))

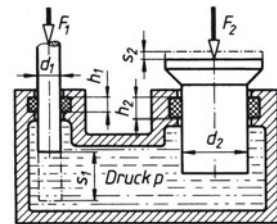
Triebkraft F_1 (Kolbenkraft)

$$F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} p$$

Last F_2 (Kolbenkraft)

$$F_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} p$$

$$F_2 = F_1 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \eta$$



Hydraulische Presse

**Wirkungsgrad η
 μ Reibzahl zwischen Kolben und Dichtung**

$$\eta = \frac{1 - 4\mu \frac{h_2}{d_2}}{1 + 4\mu \frac{h_1}{d_1}}$$

F_1, F_2	p	d, h, s	η, μ
N	$\frac{N}{m^2} = Pa$	m	1

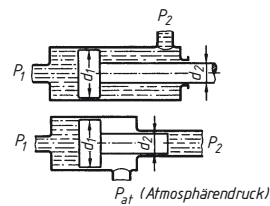
Kolbenwege s_1, s_2

$$s_2 = s_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2$$

Druckübersetzung

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{d_1^2}{d_2^2 - d_1^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$



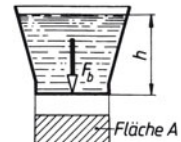
P_{at} (Atmosphärendruck)

hydrostatischer Druck p infolge der Schwerkraft (Schweredruck)

$$p = \rho g h$$

$$p_{abs} = \rho g h + p_{amb}$$

ρ Dichte
 g Fallbeschleunigung
 p_{abs} absoluter Druck
 p_{amb} umgebender Atmosphärendruck



Bodenkraft F_b

$$F_b = \rho g h A$$

F_b	p	ρ	g	h
N	$\frac{N}{m^2} = Pa$	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{m}{s^2}$	m

Fluidmechanik

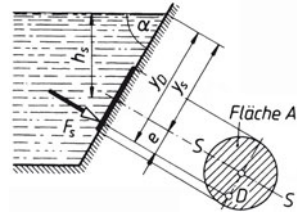
Strömungsgleichungen

Seitenkraft F_s
 I_s Flächenmoment
 2. Grades der gedrückten
 Fläche A bezogen auf die
 Schwerachse $S - S$
 D – Druckmittelpunkt

$$F_s = \rho g h_s A = \rho g y_s \sin \alpha A$$

$$h_s = y_s \sin \alpha; \quad y_s = \frac{h_s}{\sin \alpha}$$

$$y_D = y_s + e = y_s + \frac{I_s}{A y_s}; \quad e = \frac{I_s}{A y_s}$$



Abstand e

$$e = \frac{h^2}{12 y_s} \text{ für Rechteckfläche}$$

$$e = \frac{d^2}{16 y_s} \text{ für Kreisfläche}$$

F_s	ρ	g	A	I	V_v	h, y, e, d
N	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	m^2	m^4	m^3	m

Auftrieb F_a

$$F_a = V_v \rho g$$

V_v verdrängtes Flüssigkeitsvolumen

8.2 Strömungsgleichungen

Mach'sche Zahl Ma

$$Ma = \frac{w}{c}$$

w Strömungsgeschwindigkeit
 c Schallgeschwindigkeit

Bis $Ma < 0,3$ können die Strömungen von Gasen als inkompressibel angesehen werden.

Reynolds'sche Zahl Re

$$Re = \frac{w d \rho}{\eta} = \frac{w d}{\nu}$$

w mittlere Durchflussgeschwindigkeit
 d Durchmesser bei Kreisröhren
 ρ Dichte
 ν kinematische Zähigkeit
 η dynamische Zähigkeit

kritische Strömungsgeschwindigkeit w_{kr}

$$w_{kr} = \frac{Re \eta}{d \rho}$$

Re	w	d	ρ	η	ν
1	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	m	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

kinematische Zähigkeit ν

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Umrechnungen der Zähigkeit

für die dynamische Zähigkeit η das Poise (P):

$$1 \text{ Ns/m}^2 = 10 \text{ P (Poise)} = 1000 \text{ cP (Zentipoise)}$$

$$1 \text{ P} = 0,1 \text{ Ns/m}^2 = 100 \text{ cP (Zentipoise)}$$

für die kinematische Zähigkeit ν das Stokes (St):

$$1 \text{ m}^2/\text{s} = 10^4 \text{ St (Stokes)}$$

$$1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} = 100 \text{ cSt (Zentistokes)}$$

Umrechnung aus Englergraden in $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$:

$$\nu = \left(7,32 E - \frac{6,31}{E} \right) 10^{-6} \quad \text{in} \quad \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Umrechnungen °E in cSt

°E	cSt	°E	cSt
1	1	4,5	33,4
1,5	6,25	5	37,4
2	11,8	5,5	41,4
2,5	16,7	6	45,2
3	21,2	6,5	49,0
3,5	25,4	8	60,5
4	29,6	10	76,0

Strömungsgeschwindigkeit w_x im Abstand x von der Rohrachse

$$w_x = 2w \left[1 - \left(\frac{2x}{d} \right)^2 \right]$$

$$w = \frac{q_V}{A}$$

q_V Volumenstrom in $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

A Querschnitt in m^2

turbulente und laminare Strömung wird durch die kritische Reynoldszahl bestimmt; für ein Kreisrohr ist $Re_{kr} = 2300$

bei $Re < 2300$:
laminare Strömung stellt sich auch nach Störung wieder ein

bei $Re > 2300$:
bleibt einmal gestörte Strömung turbulent

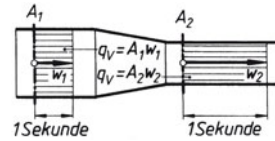
Bei $Re > 3000$ immer turbulente Strömung

Kontinuitätsgleichung (q_V Volumenstrom, q_m Massenstrom)

$$q_V = A_1 w_1 = A_2 w_2 = \text{konstant}$$

$$q_m = A_1 w_1 \rho_1 = A_2 w_2 \rho_2$$

q_V	A	w	q_m	ρ
$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	m^2	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

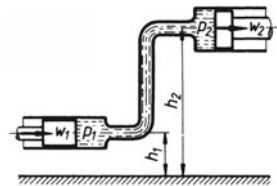


Bernoulli'sche Druckgleichung

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} w_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} w_2^2 = \text{konstant}$$

$\frac{\rho}{2} w^2$ Geschwindigkeitsdruck
 $\rho g h$ Schweredruck (8.1)

p	ρ	g	h	w
$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	m	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$



für Leitungen ohne Höhenunterschied

$$p_1 + \frac{\rho}{2} w_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} w_2^2$$

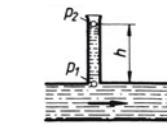
Der Gesamtdruck (statischer Druck p + Geschwindigkeitsdruck $\frac{\rho}{2} w^2$ = Staudruck q) der Flüssigkeit ist an jeder Stelle einer Horizontalleitung gleich groß.

Messung des statischen Drucks p_s

$$p_s = p_1 = p_2 + \rho g h$$

(siehe auch 8.1)

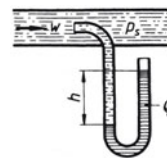
p_2 Luftdruck



Messung des Gesamtdrucks p_g

$$p_g = p_s + \frac{\rho}{2} w^2 = p_s + q$$

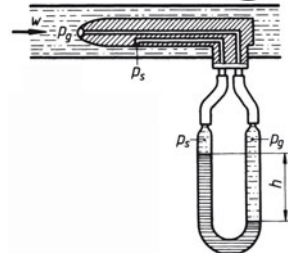
q Staudruck



Messung des Staudrucks q (Prandtl'sches Staurohr)

$$q = p_g - p_s = \beta \frac{\rho}{2} w^2$$

$\beta \approx 1^\circ$ bis ca. 17° Anströmwinkel zwischen Rohrachse und Strömungsrichtung



Fluidmechanik

Ausflussgleichungen

Volumenstrom q_V
(theoretischer)

$$q_V = \sqrt{\frac{2(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2 \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)}}$$

$\rho_1 - \rho_2 = \Delta p$ Δp Wirkdruck

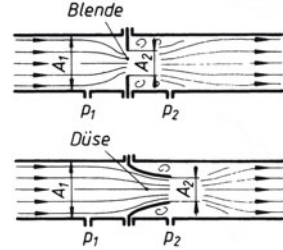
q_V	p	ρ	A
$\frac{m^3}{s}$	$\frac{N}{m^2} = Pa$	$\frac{kg}{m^3}$	m^2

Massenstrom q_m
(praktischer)

$$q_m = \alpha \frac{A_2}{\sqrt{1 - m^2}} \sqrt{2\rho(\rho_1 - \rho_2)}$$

Für Staurand (Blende) nach Prandtl:
 $\alpha = 0,598 + 0,395 m^2$

α Durchflusszahl (DIN 1952)
 m Querschnittsverhältnis = A_2/A_1



praktischer Volumenstrom q_V und Massenstrom q_m bei Gasen und Flüssigkeiten

$$q_V = 0,04 \alpha \varepsilon m D_t^2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho_1}}$$

$$q_m = 0,04 \alpha \varepsilon m D_t^2 \sqrt{\Delta p \rho_1}$$

q_V	α, ε, m	D_t	Δp	ρ_1
$\frac{m^3}{h}$	1	mm	$\frac{N}{m^2} = Pa$	$\frac{kg}{m^3}$

q_m	α, ε, m	D_t	Δp	ρ_1
$\frac{kg}{h}$	1	mm	$\frac{N}{m^2} = Pa$	$\frac{kg}{m^3}$

Durchflusszahl α (DIN 1952) ist oberhalb bestimmter Re -Zahlen konstant. Expansionszahl ε berücksichtigt die Dichteänderung des Mediums infolge des Druckabfalls ($\varepsilon = 1$ für inkompressible Medien). Dichte ρ_1 ist auf den statischen Druck p_1 vor die Drosselstelle bezogen. D_t lichte Weite der Rohrleitung bei Betriebstemperatur. $\Delta p = p_1 - p_2$ Wirkdruck.

8.3 Ausflussgleichungen

Geschwindigkeitszahl φ

abhängig von der Zähigkeit der Flüssigkeit
 $\varphi_{Wasser} = 0,97 \dots 0,99$

Kontraktionszahl α

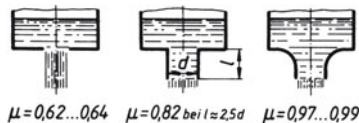
berücksichtigt die Einschnürung des Flüssigkeitsstrahles und dadurch die Verringerung der Ausflussmenge

- $\alpha \approx 0,6$ bei scharfer Kante
- $\alpha \approx 0,75$ bei gebrochener Kante
- $\alpha \approx 0,9$ bei kleinem Abrundungsradius



Ausflusszahl μ

$\mu = \alpha \varphi$
 μ ist abhängig von der Form der Öffnung

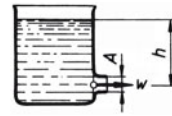


offenes Gefäß, konstante Druckhöhe h

q_V Volumenstrom

$$w = \varphi \sqrt{2gh}$$

$$q_V = \mu A \sqrt{2gh}$$



geschlossenes Gefäß, konstante Druckhöhe h

q_V Volumenstrom
 q_m Massenstrom
 $p_{\ddot{u}}$ Überdruck über dem Flüssigkeitsspiegel

$$w = \varphi \sqrt{2 \left(gh + \frac{p_{\ddot{u}}}{\rho} \right)}$$

$$q_V = \mu A \sqrt{2 \left(gh + \frac{p_{\ddot{u}}}{\rho} \right)}$$

$$q_m = q_V \rho$$

$gh + p_{\ddot{u}}/\rho = \Delta p_0 =$ Überdruck, mit Manometer in Austrittshöhe gemessen

w	g	h	q_V	q_m	A	p	ρ	V	t	μ, φ
$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s^2}$	m	$\frac{m^3}{s}$	$\frac{kg}{s}$	m^2	$\frac{N}{m^2} = Pa$	$\frac{kg}{m^3}$	m^3	s	1

Dichtebestimmung von Gasen

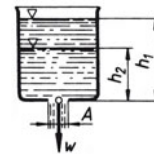
Fließen unter gleichen Bedingungen zwei Flüssigkeiten oder Gase mit den Dichten ρ_1, ρ_2 aus gleichen Gefäßen, so gilt

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{w_2}{w_1} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

offenes Gefäß mit sinkendem Flüssigkeitsspiegel

$$V = \mu A w_m t$$

$$V = \mu A t \frac{\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}}{2}$$



bei völliger Entleerung

$$V = \frac{1}{2} \mu A t \sqrt{2gh_1}$$

Ausflusszeit t

$$t = \frac{2V}{\mu A \sqrt{2gh_1}}$$

mittlere Geschwindigkeit w_m

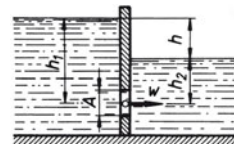
$$w_m = \frac{(w_1 + w_2)}{2}$$

Ausfluss unter Gegendruck

$$w = \varphi \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$q_V =$ Volumenstrom

$$q_V = \mu A \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$



8.4 Widerstände in Rohrleitungen

Druckabfall Δp in kreisförmigen Rohren

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{2d} w^2$$

$\lambda = 0,015 \dots 0,02$ für überschlägige Berechnungen für Luft, Wasser, Dampf
 d Rohrdurchmesser
 l Rohrlänge
 λ Rohrreibungszahl

Fluidmechanik

Widerstände in Rohrleitungen

Rohrreibungszahl λ für
glattes Kreisrohr und
laminare Strömung
($Re \leq 2300$)

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{\Delta p \cdot 2d}{w^2 \rho l}$$

p	l, d	ρ	w	λ	η
$\frac{N}{m^2} = Pa$	m	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{m}{s}$	1	$\frac{Ns}{m^2}$

Druckabfall Δp

$$\Delta p = 32 \eta w \frac{l}{d^2}$$

η dynamische Zähigkeit (8.2)

für turbulente
Strömung

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,3164 Re^{-0,25} \\ \lambda &= 0,0054 + 0,396 Re^{-0,3} \\ \lambda &= 0,0032 + 0,221 Re^{-0,237} \end{aligned}$$

bis $Re = 100\,000$
bis $Re = 2\,000\,000$
für $Re = 10^5 \dots 3,23 \cdot 10^6$

Rohrreibungszahl λ für
raues Kreisrohr für
körnige Rauigkeiten

$$\lambda = \frac{1}{[2 \lg(d/k) + 1,14]^2}$$

$\frac{d}{k}$ relative Wandrauigkeit
 d Rohrdurchmesser in mm
 k absolute Wandrauigkeit nach 8.7

Rohrreibungszahl λ
für Stahlrohrleitungen

$$\lambda = \lambda_{\text{glatt}} + \frac{0,86 \cdot 10^{-3}}{d^{0,28}} \left(\lg \frac{Re}{(10^5 d)^{1,1}} \right)^{\frac{7}{4}}$$

λ_{glatt} wie für turbulente Strömung

unrunde
Querschnitte

Es gelten die Gleichungen für Kreisrohre mit $d = 4a$,

$$\text{mit } a = \frac{\text{Querschnittsfläche } A}{\text{benetzter Umfang } U}$$

$$\text{Umstellung auch bei } Re\text{-Zahl: } Re = \frac{4wA}{U\nu}$$

ν kinematische Zähigkeit (8.2)

Druckabfall Δp für
Krümmer und Ventile

$$\Delta p = \zeta \frac{\rho}{2} w^2$$

ζ Widerstandszahl nach 8.7 bis 8.9

Δp	ζ	ρ	w
$\frac{N}{m^2} = Pa$	1	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{m}{s}$

Druckabfall Δp in einer
Abzweigung

$$\Delta p = \zeta_a \frac{\rho}{2} w^2$$

ζ_a, ζ_g Widerstandszahlen nach 8.10

Druckabfall Δp im
Gesamtstrom nach der
Abzweigung

$$\Delta p = \zeta_g \frac{\rho}{2} w^2$$

8.5 Dynamische Zähigkeit η , kinematische Zähigkeit ν und Dichte ρ von Wasser

Temperatur in °C	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$10^{-6} \eta$ in Ns/m ²	1780	1300	1000	805	658	560	470	403	353	314	285
$10^{-6} \nu$ in m ² /s	1,78	1,31	1,01	0,81	0,66	0,56	0,48	0,42	0,37	0,33	0,3
ρ in kg/m ³	1000	1000	998		992		983		972		958

8.6 Staudruck q in N/m² und Geschwindigkeit w in m/s für Luft und Wasser

Luft 15 °C. 1,013 bar = $1,013 \cdot 10^5$ N/m²

q	9,8	39	49	88	98	157	196	245	294	390	490
w	4	8	8,95	12	12,65	16	17,9	20	21,9	25,3	28,3

Wasser

q	9,8	20	29	69	98	128	177	245	490	980
w	0,14	0,2	0,28	0,4	0,447	0,5	0,6	0,7	1	1,4

Wasser

q	1960	2940	3920	4900	7840	9800	19600	29400	39200
w	2	2,45	2,83	3,16	4	4,47	6,33	7,73	8,95

8.7 Absolute Wandraugigkeit k

Wandwerkstoff	absolute Rauigkeit k mm
Gezogene Rohre aus Buntmetallen, Glas, Kunststoffen, Leichtmetallen	0 ... 0,0015
Gezogene Stahlrohre feingeschliffene, geschliffene Oberfläche geschliffene Oberfläche geschruppte Oberfläche	0,01 ... 0,05 bis 0,010 0,01 ... 0,040 0,05 ... 0,1
Geschweißte Stahlrohre handelsüblicher Güte neu nach längerem Gebrauch, gereinigt mäßig verrostet, leicht verkrustet schwer verkrustet	0,05 ... 0,10 0,15 ... 0,20 bis 0,40 bis 3
Gusseiserne Rohre inwendig bitumiert neu, nicht ausgekleidet angerostet verkrustet	0,12 0,25 ... 1 1 ... 1,5 1,5 ... 3
Betonrohre Glattstrich roh	0,3 ... 0,8 1 ... 3
Asbestzementrohre	0,1

Fluidmechanik

Widerstandszahlen ζ von Leitungsteilen

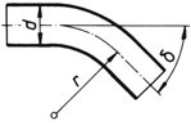
8.8 Widerstandszahlen ζ für plötzliche Rohrverengung

Querschnittsverhältnis $\frac{A_2}{A_1} = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1,0
$\zeta = 0,46$	0,42	0,37	0,33	0,23	0,13	0

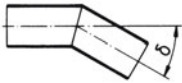
8.9 Widerstandszahlen ζ für Ventile

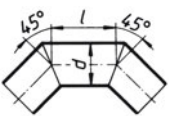
Ventilart	DIN-Ventil	Reform-Ventil	Rhei-Ventil	Koswa-Ventil	Freifluss-Ventil	Schieber
$\zeta =$	4,1	3,2	2,7	2,5	0,6	0,05

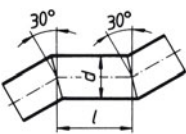
8.10 Widerstandszahlen ζ von Leitungsteilen

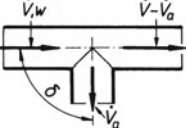
Krümmer 	$\frac{d}{r}$	glatt	1	2	4	6	10
			$\delta = 15^\circ$	0,03	0,03	0,03	0,03
rau	$\delta = 90^\circ$	$\delta = 22,5^\circ$	0,045	0,045	0,045	0,045	0,045
		$\delta = 45^\circ$	0,14	0,09	0,08	0,075	0,07
		$\delta = 60^\circ$	0,19	0,12	0,10	0,09	0,07
		$\delta = 90^\circ$	0,21	0,14	0,11	0,09	0,11
		$\delta = 90^\circ$	0,51	0,30	0,23	0,18	0,20

Gusskrümmer 90°	NW	50	100	200	300	400	500
$\zeta =$		1,3	1,5	1,8	2,1	2,2	2,2

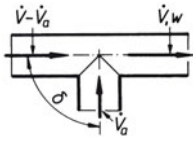
scharfkantiges Knie 	$\delta =$	22,5°	30°	45°	60°	90°
glatt	$\zeta =$	0,07	0,11	0,24	0,47	1,13
rau	$\zeta =$	0,11	0,17	0,32	0,68	1,27

Kniestück 	$\frac{l}{d} =$	0,71	0,943	1,174	1,42	1,86	2,56	6,28
glatt	$\zeta =$	0,51	0,35	0,33	0,28	0,29	0,36	0,40
rau	$\zeta =$	0,51	0,41	0,38	0,38	0,39	0,43	0,45

Kniestück 	$\frac{l}{d} =$	1,23	1,67	2,37	3,77
glatt	$\zeta =$	0,16	0,16	0,14	0,16
rau	$\zeta =$	0,30	0,28	0,26	0,24

Stromabzweigung (Trennung) 	$\frac{V_a}{V} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\delta = 90^\circ$	$\zeta_a =$	0,95	0,88	0,89	0,95	1,10	1,28
	$\zeta_g =$	0,04	-0,08	-0,05	0,07	0,21	0,35
$\delta = 45^\circ$	$\zeta_a =$	0,9	0,66	0,47	0,33	0,29	0,35
	$\zeta_g =$	0,04	-0,06	-0,04	0,07	0,20	0,33

Zusammenfluss
(Vereinigung)



$$\frac{\dot{V}_a}{\dot{V}} =$$

0 0,2 0,4 0,6 0,8 1

$\delta = 90^\circ$	$\zeta_a =$	-1,1	-0,4	0,1	0,47	0,72	0,9
	$\zeta_g =$	0,04	0,17	0,3	0,4	0,5	0,6
$\delta = 45^\circ$	$\zeta_a =$	0,9	-0,37	0	0,22	0,37	0,38
	$\zeta_g =$	0,05	0,17	0,18	0,05	-0,2	-0,57

für Warmwasserheizungen	Durchmesser	$d = 14 \text{ mm}$	20	25	34	39	49
Bogenstück 90°		$\zeta = 1,2$	1,1	0,86	0,53	0,42	0,51
Knie 90°		$\zeta = 1,2$	1,7	1,3	1,1	1,0	0,83

9.1 Grundlagen

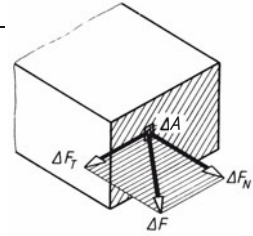
Normalspannung σ

$$\sigma = \frac{\Delta F_N}{\Delta A}$$

Schubspannung τ

$$\tau = \frac{\Delta F_T}{\Delta A}$$

σ, τ	F	A
$\frac{N}{mm^2}$	N	mm^2
A Querschnittsfläche		



Formänderung

zur Normalspannung σ gehört eine Dehnung ϵ
zur Schubspannung τ eine Gleitung γ

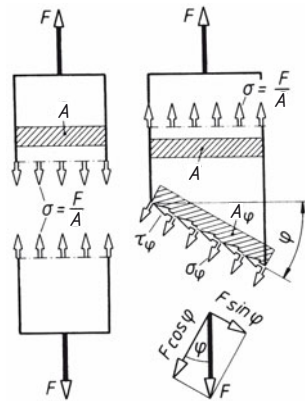
Schnitt rechtwinklig zur Achse

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Schnitt schräg zur Achse

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\varphi)$$

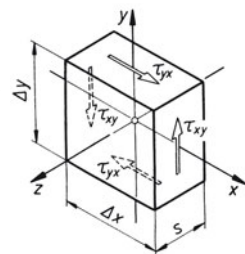
$$\tau_\varphi = \frac{\sigma}{2} \sin 2\varphi$$



Ebener Spannungszustand

Bedingung

Scheibe konstanter Dicke, sämtliche Komponenten der angreifenden Spannungen liegen in Scheibenebene. Wegen Momentengleichgewichts am Flächenteilchen muss $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ sein

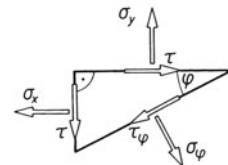


Normalspannung σ_φ

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi - \tau \sin 2\varphi$$

Schubspannung τ_φ

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi$$



Festigkeitslehre

Grundlagen

Hauptspannungen σ_1, σ_2

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Schnittwinkel φ_1, φ_2

$$\tan 2\varphi_1 = -\frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

maximale Schubspannung τ_{\max} (in Schnittebene, die gegen Hauptrichtungen 1,2 um 45° gedreht sind)

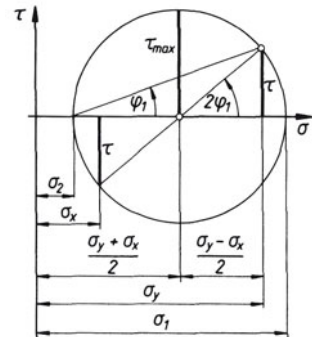
$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Spannungssumme

$$\sigma_\varphi + \sigma_{\varphi+(\pi/2)} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$$

Mohr'scher Spannungskreis

Kreis mit Radius $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ um Punkt $[\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2; \tau = 0]$ ergibt zeichnerisch die Spannungen in den verschiedenen Schnittebenen. σ_1 und σ_y sind relative Größtwerte (z. B. können σ_2 und σ_x negativ und absolut größer sein als σ_1 und σ_y).



Formänderung

Verlängerung Δl

$$\Delta l = l - l_0 \quad l_0 \text{ Ursprungslänge}$$

Dehnung ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

(bei Druck: Stauchung)

Hooke'sches Gesetz für Normalspannung

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E = \text{konstant}$$

E Elastizitätsmodul (9.5)

Bruchdehnung δ_0 beim Zerreiversuch

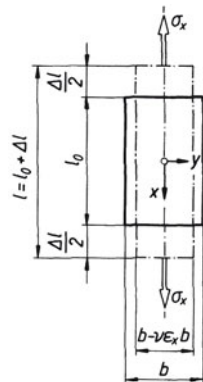
$$\delta = \frac{\Delta l_B}{l_0} \cdot 100 \text{ in \%}$$

Δl_B nach Zerreißen gebliebene Verlängerung

Querdehnung ε_y in y -Richtung

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \varepsilon_x$$

μ Poisson-Zahl



Festigkeitslehre

Zug- und Druckbeanspruchung

Poisson-Zahl μ

$$\mu = \frac{\text{Querdehnung } \varepsilon_y}{\text{Dehnung } \varepsilon}$$

$\mu_{\text{Stahl}} = 0,3$ (auch für Leichtmetall)
 $\mu_{\text{GG}} = 0,25$
 $\mu_{\text{Gummi}} = 0,5$

Dehnung ε_x infolge sämtlicher Normalspannungen

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

ε_y und ε_z durch zyklisches Vertauschen von x, y und z

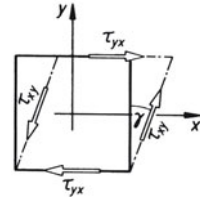
Volumendehnung e

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Hooke'sches Gesetz für Schubspannungen

$$\frac{\tau}{\gamma} = G = \text{konstant}$$

γ Schiebung
 G Schubmodul
 (9.5, 9.28, 9.29)



Modul-Verhältnis

$$\frac{G}{E} = \frac{1}{2(1+\mu)}$$

9.2 Zug- und Druckbeanspruchung

vorhandene Zug- oder Druckspannung $\sigma_{z,d}$

$$\sigma_{z,d \text{ vorh}} = \frac{F_{\text{max}}}{A} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

(Spannungsnachweis)

Bei *Zug*: Bohrungen und Nietlöcher vom tragenden Querschnitt abziehen.
 Bei *Druck*: Schlanke Stäbe auf Knickung nachrechnen.

erforderlicher Querschnitt A_{erf}

$$A_{\text{erf}} = \frac{F_{\text{max}}}{\sigma_{\text{zul}}}$$

(Querschnittsnachweis)

Bei Querschnittsänderungen gehört zum kleineren Querschnitt die größere Spannung und umgekehrt.

zulässige Belastung F_{max}

$$F_{\text{max}} = A \sigma_{\text{zul}}$$

(Belastungsnachweis)

$\sigma_{z,d}, E$	F	A	$\Delta l, l, l_0, f$	ε	W
$\frac{N}{\text{mm}^2}$	N	mm^2	mm	1	Nmm

Verlängerung Δl

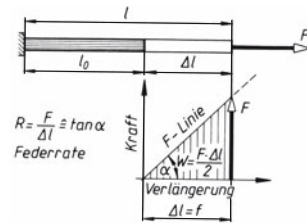
$$\Delta l = l - l_0 = \varepsilon l_0 = \frac{\sigma l_0}{E} = \frac{F l_0}{EA}$$

Formänderungsarbeit W

$$W = \frac{F \Delta l}{2} = \frac{\sigma^2 V}{2E} = \frac{R}{2} \Delta l^2 = \frac{R}{2} f^2$$

$$R = \frac{F}{\Delta l} = \frac{F}{f} \triangleq \tan \alpha$$

V Volumen in mm^3
 R Federrate in N/mm
 f Federweg in mm

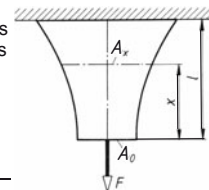


Stäbe gleicher Spannung (σ_{zul}) in jedem Querschnitt

$$A_{x \text{ erf}} = A_0 e^m = \frac{F}{\sigma_{\text{zul}}} e^m \quad e = 2,71828... \text{ Basis des natürlichen Logarithmus}$$

$$m = \frac{10^{-9} \varrho g x}{\sigma_{\text{zul}}} \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2 \text{ Fallbeschleunigung}$$

A_x, A_0	F	σ_{zul}	ϱ	g	x
mm^2	N	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	mm



Festigkeitslehre

Biegebeanspruchung

größte Spannung σ_{dyn} bei dynamischer Belastung
 $F_{G\ dyn}$

$$\sigma_{dyn} = \sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 + 2\sigma_0 E \frac{h}{l}}$$

$F_{G\ dyn}$ Gewichtskraft eines plötzlich frei am Seil fallenden Körpers
 E Elastizitätsmodul
 h Fallhöhe
 l Seillänge
 A Seilquerschnitt
 $\sigma_0 = \frac{F_{G\ dyn}}{A}$

größte Dehnung ϵ_{dyn} bei dynamischer Belastung
 $F_{G\ dyn}$

$$\epsilon_{dyn} = \epsilon_0 + \sqrt{\epsilon_0^2 + 2\epsilon_0 \frac{h}{l}}$$

bei plötzlich aufgebrachtener Last ohne vorherigen freien Fall ($h = 0$) ist

$$\sigma_{dyn} = 2\sigma_0$$

$$\epsilon_{dyn} = 2\epsilon_0$$

σ, E	$h, l, \Delta l$	ϵ	$F_{G\ dyn}$	A
$\frac{N}{mm^2}$	mm	1	N	mm^2

größte Verlängerung Δl_{dyn}

$$\Delta l_{dyn} = \frac{\sigma_{dyn}}{E} l$$

Verlängerung Δl_t bei Temperaturänderung ΔT

$$\Delta l_t = l_0 \alpha_l \Delta T$$

α_l Längenausdehnungskoeffizient (6.16)
 ΔT Temperaturdifferenz
 E E-Modul (9.5, 9.28, 9.29)

Länge l_t nach Temperaturänderung ΔT

$$l_t = l_0 (1 + \alpha_l \Delta T)$$

$\Delta l_t, l_0, l_t$	α_l	ΔT	σ_t, E
mm	$\frac{1}{K}$	K	$\frac{N}{mm^2}$

Wärmespannung σ_t

$$\sigma_t = \alpha_l \Delta T E$$

9.3 Biegebeanspruchung

vorhandene Biegespannung $\sigma_{b\ vorh}$

$$\sigma_{b\ vorh} = \frac{M_{b\ max}}{W} \leq \sigma_{b\ zul}$$

(Spannungsnachweis)

Diese Gleichung nur anwenden, wenn $e_1 = e_2 = e$ ist. Sonst die Gleichung für unsymmetrischen Querschnitt benutzen.
 W axiales Widerstandsmoment nach 9.8
 I axiales Flächenmoment 2. Grades nach 9.8

erforderliches Widerstandsmoment W_{erf}

$$W_{erf} = \frac{M_{b\ max}}{\sigma_{b\ zul}}$$

(Querschnittsnachweis)

σ_b	M_b	W	I	e
$\frac{N}{mm^2}$	Nmm	mm^3	mm^4	mm

zulässige Belastung $M_{b\ max}$

$$M_{b\ max} = W \sigma_{b\ zul}$$

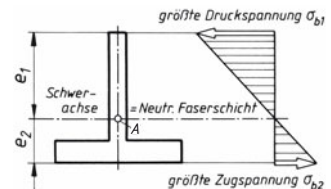
(Belastungsnachweis)

größte Zugspannung $\sigma_{z\ max}$

$$\sigma_{z\ max} = \sigma_{b2} = \frac{M_b e_2}{I} = \frac{M_b}{W_2} \leq \sigma_{z\ zul}$$

größte Druckspannung $\sigma_{d\ max}$

$$\sigma_{d\ max} = \sigma_{b1} = \frac{M_b e_1}{I} = \frac{M_b}{W_1} \leq \sigma_{d\ zul}$$



Bestimmung des maximalen Biegemomentes $M_{b,max}$

Stützkkräfte bestimmen,

rechnerisch ($\sum F_y = 0, \sum M = 0$) oder zeichnerisch (Seileckfläche \triangleq Biegemomentenfläche), worin

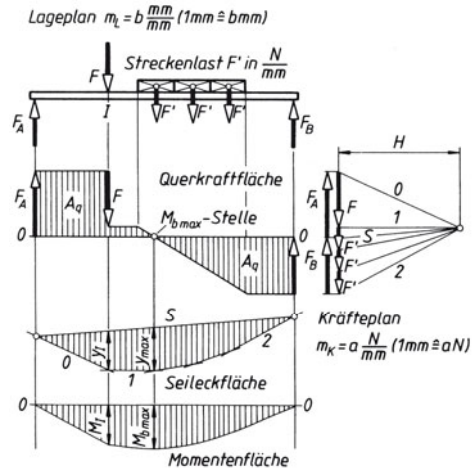
$$M_b = Hy m_K m_L$$

M_b	H, y	m_K	m_L
Nmm	mm	$\frac{N}{mm}$	$\frac{mm}{mm}$

H Polabstand in mm
 $m_K = a \text{ N/mm}$ Kräftemaßstab
 $m_L = b \text{ mm/mm}$ Längenmaßstab

Querkraftfläche zeichnen und Nulldurchgänge festlegen.

$M_{b,max}$ entweder aus Querkraftfläche links oder rechts vom Nulldurchgang ($M_b \triangleq A_q$) berechnen, oder: In den Querschnitt x stellen und die Momente rechts oder links vom Querschnitt addieren, Summe ist $M_{b(x)}$.



9.4 Flächenmomente 2. Grades I, Widerstandsmomente W, Trägheitsradius i
 (siehe auch 9.8, 9.9, 9.10)

axiales Flächenmoment I_x

$$I_x = \sum y^2 \Delta A$$

(bezogen auf die x-Achse)

axiales Flächenmoment I_y

$$I_y = \sum x^2 \Delta A$$

(bezogen auf die y-Achse)

polares Flächenmoment I_p

$$I_p = \sum r^2 \Delta A = I_x + I_y$$

Zentrifugalmoment I_{xy}

$$I_{xy} = \sum x y \Delta A$$

Trägheitsradius i

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

bezogen auf Achsen, parallel zu den Schwerachsen A-A oder B-B

$$I_A = I_x + A l_a^2$$

$$I_B = I_y + A l_b^2$$

$$I_{AB} = I_{xy} + A l_a l_b$$

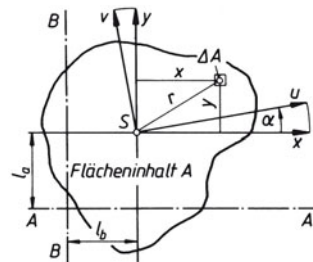
(Verschiebesatz von Steiner)

für I kann I_x, I_y, I_p eingesetzt werden, das ergibt dann i_x, i_y, i_p
 A Flächeninhalt

axiales Flächenmoment bezogen auf A-A

axiales Flächenmoment bezogen auf B-B

Zentrifugalmoment



bei Drehung um Winkel α

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$

Festigkeitslehre

Elastizitätsmodul E und Schubmodul G verschiedener Werkstoffe in N/mm^2

Hauptflächenmomente
 I_I, I_{II}

(zeichnerisch mit Trägheitskreis)

Lage der Hauptachsen
($I_{uv} = 0$)

axiales Widerstandsmoment W_x, W_y

polares Widerstandsmoment W_p

axiales Widerstandsmoment bei unsymmetrischem Querschnitt

$$I_I = I_{\max} = \frac{I_x - I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}$$

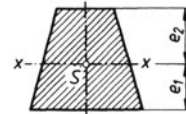
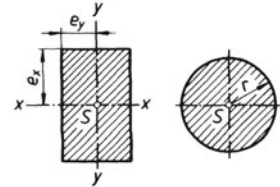
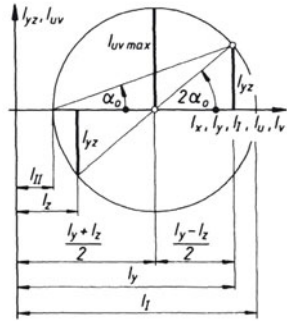
$$I_{II} = I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$W_x = \frac{I_x}{e_x} \quad W_y = \frac{I_y}{e_y}$$

$$W_p = \frac{I_p}{r}$$

$$W_{x1} = \frac{I_x}{e_1} \quad W_{x2} = \frac{I_x}{e_2}$$



Flächenmomente 2. Grades zusammengesetzter Flächen unsymmetrischer Querschnitte:

1. Querschnitt in Teilflächen bekannter Schwerpunktlage zerlegen,
2. Schwerpunkte der Teilflächen bestimmen (7.7),
3. Flächenmomente der Teilflächen, bezogen auf ihre eigene Schwerachse nach 9.8 berechnen,
4. Lage des Gesamtschwerpunkts bestimmen, wenn die Gesamtschwerachse Bezugsachse ist,
5. Flächenmoment nach Verschiebesatz von Steiner bestimmen.

9.5 Elastizitätsmodul E und Schubmodul G verschiedener Werkstoffe in N/mm^2

Werkstoff	E	G
Stahl und Stahlguss	200 000 ... 210 000	80 000 ... 83 000
Gusseisen	75 000 ... 105 000	30 000 ... 60 000
Temperguss	90 000 ... 100 000	50 000 ... 60 000
Messing	100 000 ... 110 000	35 000 ... 42 000
Zinnbronze	110 000 ... 115 000	40 000
Al Cu Mg	72 000	-
Kunstharz	4 000 ... 16 000	-
Fichte (\parallel/\perp) ¹⁾	11 000/ 550	-
Buche (\parallel/\perp) ¹⁾	16 000/1 500	-
Esche (\parallel/\perp) ¹⁾	13 400/1 100	28 000

¹⁾ parallel/rechtwinklig zur Faserrichtung

9.6 Träger gleicher Biegebeanspruchung

Längs- und Querschnitt des Trägers	Begrenzung des Längsschnittes	Gleichungen zur Berechnung der Querschnitts-Abmessungen
------------------------------------	-------------------------------	---

Die Last F greift am Ende des Trägers an:

	<p>obere Begrenzung: Gerade</p> <p>untere Begrenzung: quadratische Parabel</p>	$y = \sqrt{\frac{6F}{b\sigma_{zul}}} x; h = \sqrt{\frac{6Fl}{b\sigma_{zul}}}; y = h\sqrt{\frac{x}{l}}$ $\text{Durchbiegung in A: } f = \frac{8F}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$
	<p>Gerade</p>	$y = \frac{6F}{h^2\sigma_{zul}} x; b = \frac{6Fl}{h^2\sigma_{zul}}; y = \frac{bx}{l}$ $\text{Durchbiegung in A: } f = \frac{6F}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$
	<p>Kubische Parabel</p>	$y = \sqrt[3]{\frac{32F}{\pi\sigma_{zul}}} x; d = \sqrt[3]{\frac{32Fl}{\pi\sigma_{zul}}}; y = \sqrt[3]{\frac{lx}{l}}$ $\text{Durchbiegung in A: } f = \frac{3}{5} \frac{Fl^3}{EI}; I = \frac{\pi d^4}{64}$

Die Last F ist gleichmäßig über den Träger verteilt:

	<p>Gerade</p>	$y = x\sqrt{\frac{3F'}{bl\sigma_{zul}}}; h = \sqrt{\frac{3Fl'}{b\sigma_{zul}}}; y = \frac{hx}{l}$ $F = F' l \quad F' \text{ Streckenlast in } \frac{N}{m}$
	<p>Quadratische Parabel</p>	$y = \frac{3F'}{l\sigma_{zul}} \left(\frac{x}{h}\right)^2; b = \frac{3Fl'}{h^2\sigma_{zul}}; y = \frac{bx^2}{l^2}$ $\text{Durchbiegung in A: } f = \frac{3F'}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$

Festigkeitslehre

Stützkräfte, Biegemomente und Durchbiegungen

Die Last F wirkt in C:

	<p>obere Begrenzung: zwei quadratische Parabeln</p>	$y = \sqrt{\frac{6F(l-a)}{bl\sigma_{zul}}} x = h\sqrt{\frac{x}{a}}$ $y_1 = \sqrt{\frac{6Fa}{bl\sigma_{zul}}} x_1 = h\sqrt{\frac{x_1}{l-a}}$ $h = \sqrt{\frac{6F(l-a)a}{bl\sigma_{zul}}}$
--	---	--

Die Last F ist gleichmäßig über den Träger verteilt:

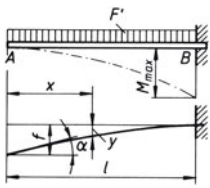
	<p>obere Begrenzung: Ellipse</p>	$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1; \quad h = \sqrt{\frac{3Fl}{4b\sigma_{zul}}}$ <p>Durchbiegung in C:</p> $f = \frac{1}{64} \cdot \frac{Fl^3}{EI} = \frac{3}{16} \cdot \frac{F}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$
--	--------------------------------------	---

9.7 Stützkräfte, Biegemomente und Durchbiegungen bei Biegeträgern von gleichbleibendem Querschnitt

- F Einzellast oder Resultierende der Streckenlast
- F' die auf die Längeneinheit bezogene Streckenlast
- F_A, F_B Stützkräfte in den Lagerpunkten A und B
- M_{max} maximales Biegemoment in den Wendepunkten der Biegelinie ist $M = 0$
- I axiales Flächenmoment 2. Grades des Querschnitts
- E Elastizitätsmodul des Werkstoffs
- f Durchbiegung.

Die strichpunktierte Linie gibt den Momentenverlauf über der Balkenlänge an. Positive Momentenlinien laufen nach oben, negative nach unten.

<p> $F_B = F$ $M_{max} = Fl$ $f = \frac{Fl^3}{3EI}$ </p> $y = \frac{Fl^3}{3EI} \left(1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3}\right); \quad \tan \alpha = \frac{Fl^2}{2EI} = \frac{3f}{2l}$	<p> $F_A = F_B = \frac{F}{2}$ $M_{max} = \frac{Fl}{4}$ $f = \frac{Fl^3}{48EI}$ </p> $y = \frac{Fl^2x}{16EI} \left(1 - \frac{4x^2}{3l^2}\right) \text{ für } x \leq \frac{l}{2} \quad \tan \alpha = \frac{Fl^2}{16EI} = \frac{3f}{l}$
--	---



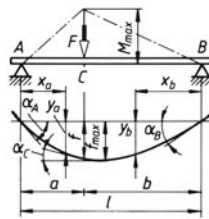
$$F_B = F = F'l$$

$$M_{\max} = \frac{Fl}{2}$$

$$f = \frac{Fl^3}{8EI} = \frac{F'l^4}{8EI}$$

$$\tan \alpha = \frac{Fl^2}{6EI} = \frac{4f}{3l}$$

$$y = \frac{F'l^4}{24EI} \left(\frac{x^4}{l^4} - 4\frac{x}{l} + 3 \right)$$



$$F_A = F \frac{b}{l} \quad F_B = F \frac{a}{l}$$

$$M_{\max} = F \frac{ab}{l}$$

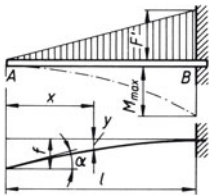
$$f = \frac{Fa^2b^2}{EI3l}$$

$$f_{\max} = f \frac{l+a}{3a} \sqrt{\frac{l+a}{3b}}$$

$$\tan \alpha_A = f \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \right) \quad \tan \alpha_B = f \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2a} \right)$$

$$y_a = \frac{Fab^2x_a}{6EI} \left(1 + \frac{l}{b} - \frac{x_a^2}{ab} \right); \quad y_b = \frac{Fa^2bx_b}{6EI} \left(1 + \frac{l}{a} - \frac{x_b^2}{ab} \right)$$

(für $x_a \leq a$) (für $x_b \leq b$)



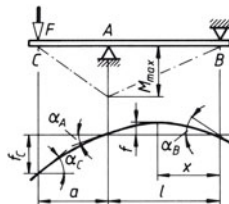
$$F_B = F = \frac{F'l}{2}$$

$$M_{\max} = \frac{Fl}{3}$$

$$f = \frac{Fl^3}{15EI}$$

$$\tan \alpha = \frac{Fl^2}{12EI} = \frac{5f}{4l}$$

$$y = \frac{F'l^4}{120EI} \left(\frac{x^5}{l^5} - 5\frac{x}{l} + 4 \right)$$



$$F_A = F \left(1 + \frac{a}{l} \right) \quad F_B = F \frac{a}{l}$$

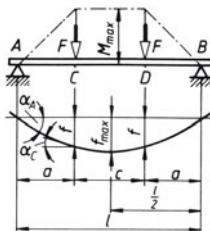
$$M_{\max} = Fa = M_A$$

$$f = \frac{Fl^3 a}{EI9\sqrt{3}l}$$

für $x = 0,577 l$

$$f_C = \frac{Fl^3 a^2}{3EI l^2} \left(1 + \frac{a}{l} \right)$$

$$\tan \alpha_A = \frac{Fal}{3EI}; \quad \tan \alpha_B = \frac{Fal}{6EI}; \quad \tan \alpha_C = \frac{Fa(2l+3a)}{6EI}$$



$$F_A = F_B = F$$

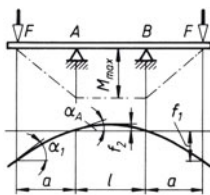
$$M_{\max} = Fa$$

$$f = \frac{Fl^3 a^2}{2EI l^2} \left(1 - \frac{4a}{3l} \right)$$

$$f_{\max} = \frac{Fl^3 a}{8EI l} \left(1 - \frac{4a^2}{3l^2} \right)$$

$$\tan \alpha_A = \frac{Fa(a+c)}{2EI}$$

$$\tan \alpha_C = \tan \alpha_D = \frac{Fac}{2EI}$$



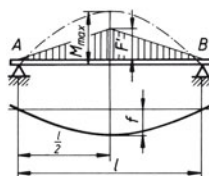
$$F_A = F_B = F$$

$$M_{\max} = Fa$$

$$f_1 = \frac{Fa^2}{EI} \left(\frac{a}{3} + \frac{l}{2} \right)$$

$$f_2 = \frac{Fal^2}{8EI}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{Fa(l+c)}{2EI} \quad \tan \alpha_2 = \frac{Fal}{2EI}$$



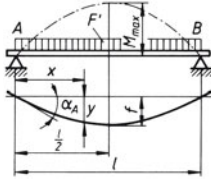
$$F_A = F_B = \frac{Fl}{4}$$

$$M_{\max} = \frac{Fl}{6} = \frac{F'l^2}{12}$$

$$f = \frac{Fl^3}{60EI} = \frac{F'l^4}{120EI}$$

Festigkeitslehre

Stützkräfte, Biegemomente und Durchbiegungen



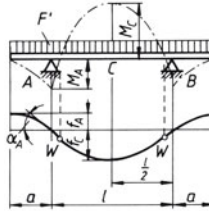
$$F_A = F_B = \frac{F'l}{2}$$

$$M_{\max} = \frac{F'l^2}{8}$$

$$f \approx 0,013 \frac{F'l^3}{EI}$$

$$\tan \alpha_A = \frac{F'l^3}{24EI} = \frac{16f}{5l}$$

$$y = \frac{F'l^3 x}{24EI} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 + \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)$$



$$F_A = F_B = F' \left(\frac{l}{2} + a\right)$$

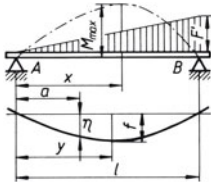
$$M_A = \frac{F'a^2}{2}$$

$$M_C = \frac{F'l^2}{2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]$$

$$f_A = \frac{F'l^4}{4EI} \left[\frac{a}{6l} - \left(\frac{a}{l}\right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{l}\right)^4\right]$$

$$\tan \alpha_A = \frac{F'l^3}{4EI} \left[\frac{1}{6} - \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]$$

$$f_C = \frac{F'l^4}{16EI} \left[\frac{5}{24} - \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]$$



$$F_A = \frac{F'l}{6} \quad F_B = \frac{F'l}{3}$$

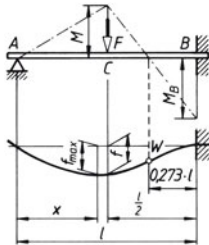
$$M_{\max} = 0,064 F'l^2$$

bei $x = 0,5774 l$

$$f = \frac{F'l^4}{153,4EI}$$

bei $y = 0,5193 l$

$$\eta = \frac{F'l^3 a}{360EI} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \left(7 - 3 \frac{a^2}{l^2}\right)$$



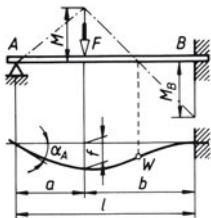
F in Stabmitte

$$F_A = \frac{5}{16} F \quad F_B = \frac{11}{16} F$$

$$M = \frac{5}{32} Fl \quad M_B = \frac{3}{16} Fl$$

$$f = \frac{7Fl^3}{768EI}$$

$$f_{\max} = \frac{Fl^3}{48\sqrt{5}EI} \quad \text{bei } x = 0,447l$$



$$F_A = F \frac{b^2}{l^2} \left(1 + \frac{a}{2l}\right)$$

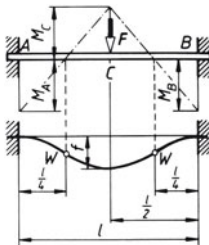
$$F_B = F - F_A$$

$$f = \frac{Fa^2 b^3}{4EI l^2} \left(1 + \frac{a}{3l}\right)$$

$$\tan \alpha_A = \frac{Fab^2}{4EI l}$$

$$M = Fa \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{3a}{2l}\right]$$

$$M_B = \frac{Fl}{2} \left[\frac{a}{l} - \left(\frac{a}{l}\right)^3\right]$$

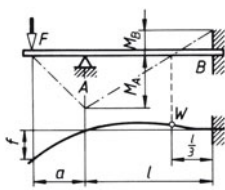


$$F_A = F_B = \frac{F}{2}$$

$$M_C = \frac{Fl}{8} = M_A = M_B$$

$$f = \frac{Fl^3}{192EI}$$

Axiale Flächenmomente I , Widerstandsmomente W , Flächeninhalte A , Trägheitsradius i



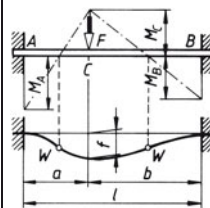
$$F_A = F \left(1 + \frac{3a}{2l} \right)$$

$$F_B = F \frac{3a}{2l}$$

$$M_A = Fa$$

$$M_B = \frac{Fa}{2}$$

$$f = \frac{Fl^3}{EI} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a}{l} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]$$



$$M_A = Fa \left(\frac{b}{l} \right)^2$$

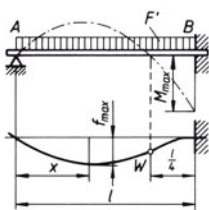
$$M_B = Fb \left(\frac{a}{l} \right)^2$$

$$f = \frac{Fa^3b^3}{3EI l^3}$$

$$M_C = 2Fb \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(1 - \frac{a}{l} \right)$$

$$F_A = F \left(\frac{b}{l} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{b}{l} \right)$$

$$F_B = F \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{a}{l} \right)$$



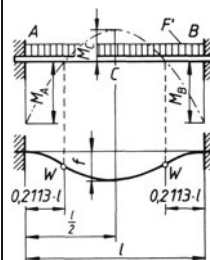
$$F_A = \frac{3}{8} F' l$$

$$F_B = \frac{5}{8} F' l$$

$$M_{\max} = \frac{F' l^2}{8}$$

$$f_{\max} = \frac{F' l^4}{185 EI}$$

für $x = 0,4215 l$



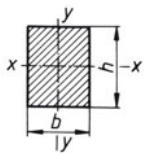
$$F_A = F_B = \frac{F' l}{2}$$

$$M_C = \frac{F' l^2}{24}$$

$$M_A = M_B = \frac{F' l^2}{12} = M_{\max}$$

$$f = \frac{F' l^4}{384 EI}$$

9.8 Axiale Flächenmomente I , Widerstandsmomente W , Flächeninhalte A und Trägheitsradius i verschieden gestalteter Querschnitte für Biegung und Knickung (die Gleichungen gelten für die eingezeichneten Achsen)



$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}$$

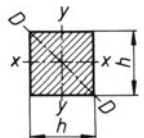
$$i_x = 0,289 h$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}$$

$$i_y = 0,289 b$$

$$A = b h$$



$$I_x = I_y = I_D = \frac{h^4}{12}$$

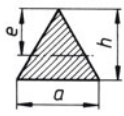
$$W_x = W_y = \frac{h^3}{6}$$

$$i = 0,289 h$$

$$W_D = \sqrt{2} \frac{h^3}{12}$$

$$A = h^2$$

Festigkeitslehre

Axiale Flächenmomente I , Widerstandsmomente W , Flächeninhalte A , Trägheitsradius i 

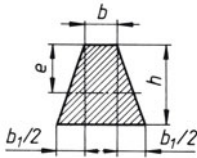
$$I = \frac{ah^3}{36}$$

$$e = \frac{2}{3}h$$

$$A = \frac{ah}{2}$$

$$W = \frac{ah^2}{24}$$

$$i = 0,236h$$



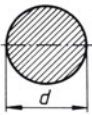
$$I = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{36(2b + b_1)} h^3$$

$$A = \frac{2b + b_1}{2} h$$

$$W = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12(3b + 2b_1)} h^2$$

$$e = \frac{1}{3} \frac{3b + 2b_1}{2b + b_1} h$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$



$$I = \frac{\pi d^4}{64} \approx \frac{d^4}{20}$$

$$A = \frac{\pi}{4} d^2$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \approx \frac{d^3}{10}$$

$$i = \frac{d}{4}$$

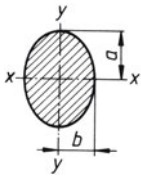


$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

$$W = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D}$$

$$i = 0,25\sqrt{D^2 + d^2}$$



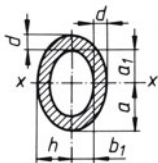
$$I_x = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

$$I_y = \frac{\pi b^3 a}{4} \quad i_x = \frac{a}{2}$$

$$A = \pi a b$$

$$W_x = \frac{\pi a^2 b}{4}$$

$$W_y = \frac{\pi b^2 a}{4} \quad i_y = \frac{b}{2}$$

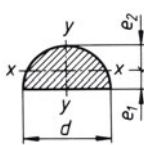


$$I_x = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a_1^3 b_1) \approx \frac{\pi}{4} a^2 d (a + 3b)$$

$$A = \pi (ah - a_1 b_1)$$

$$W_x = \frac{I_x}{a} \approx \frac{\pi}{4} ad(a + 3b)$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$



$$I_x = 0,0068 d^4$$

$$I_y = 0,0245 d^4$$

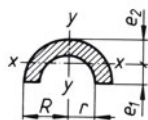
$$W_{x1} = 0,0238 d^3$$

$$W_{x2} = 0,0323 d^3$$

$$W_y = 0,049 d^3$$

$$i_x = 0,132 d$$

$$e_1 = \frac{4r}{3\pi} = 0,4244 r$$



$$I_x = 0,1098(R^4 - r^4) - 0,283R^2 r^2 \frac{R-r}{R+r}$$

$$W_y = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{8R}$$

$$I_y = \pi \frac{R^4 - r^4}{8}$$

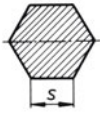
$$W_{x1} = \frac{I_x}{e_1}$$

$$W_{x2} = \frac{I_x}{e_2}$$

$$e_1 = \frac{2(D^3 - d^3)}{3\pi(D^2 - d^2)}$$

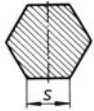
Festigkeitslehre

Axiale Flächenmomente I , Widerstandsmomente W , Flächeninhalte A , Trägheitsradius i



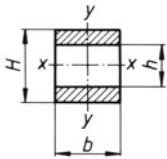
$$I = \frac{5\sqrt{3}}{16} s^4 = 0,5413 s^4 \quad A = \frac{3}{2} \sqrt{3} s^2$$

$$W = \frac{5}{8} s^3 = 0,625 s^3 \quad i = 0,456 s$$



$$I = \frac{5\sqrt{3}}{16} s^4 = 0,5413 s^4 \quad A = \frac{3}{2} \sqrt{3} s^2$$

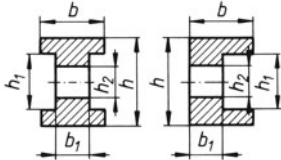
$$W = 0,5413 s^3 \quad i = 0,456 s$$



$$I_x = \frac{b}{12} (H^3 - h^3) \quad I_y = \frac{b^3}{12} (H - h) \quad A = b(H - h)$$

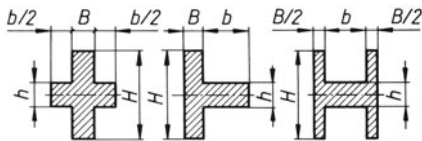
$$W_x = \frac{b}{6H} (H^3 - h^3) \quad W_y = \frac{b^2}{6} (H - h)$$

$$i_x = \sqrt{\frac{H^3 - h^3}{12(H - h)}} \quad I_y = 0,289 b$$



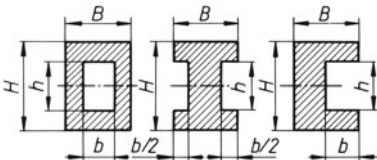
$$I = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{12} \quad A = bh - b_1 h_2 - h_1(b - b_1)$$

$$W = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{6h} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$



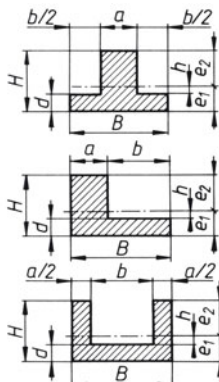
$$I = \frac{BH^3 + bh^3}{12} \quad A = BH + bh$$

$$W = \frac{BH^3 + bh^3}{6H} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$



$$I = \frac{BH^3 - bh^3}{12} \quad A = BH - bh$$

$$W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$



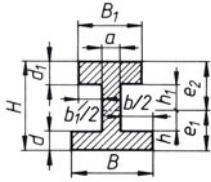
$$I = \frac{1}{3} (Be_1^3 - bh^3 + ae_2^3) \quad A = Bd + a(H - d)$$

$$e_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{aH^2 + bd^2}{aH + bd} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$e_2 = H - e_1$$

Festigkeitslehre

Warmgewalzter rundkantiger U-Stahl

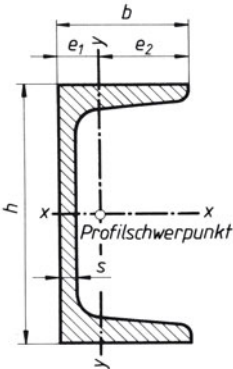


$$I = \frac{1}{3}(Be_1^3 - bh^3 + B_1e_2^3 - b_1h_1^3) \quad A = Bd + b_1d_1 + a(h + h_1)$$

$$e_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{aH^2 + bd^2 + b_1d_1(2H - d_1)}{aH + bd + b_1d_1} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$e_2 = H - e_1$$

9.9 Warmgewalzter rundkantiger U-Stahl



Beispiel für die Bezeichnung eines U-Stahls und für das Ablesen von Flächenmomenten I und Widerstandsmomenten W :

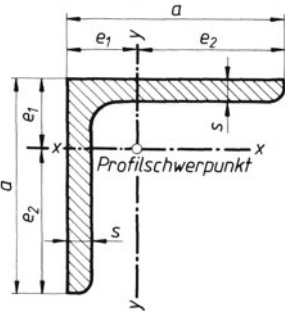
U 100 DIN 1026

Höhe	$h = 100 \text{ mm}$
Breite	$b = 50 \text{ mm}$
Flächenmoment	$I_x = 206 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
Widerstandsmoment	$W_x = 41,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
Flächenmoment	$I_y = 29,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
Widerstandsmoment	$W_{y1} = 18,9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
	$W_{y2} = 8,49 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
Oberfläche je Meter Länge	$A'_0 = 0,372 \text{ m}^2/\text{m}$
Profilumfang	$U = 0,372 \text{ m}$
Trägheitsradius	$i_x = \sqrt{I_x/A} = 39,1 \text{ mm}$

Kurzzeichen	Querschnitt			A mm ²	Querschnitt					Oberfläche je Meter Länge A' ₀ m ² /m ¹⁾	Gewichtskraft je Meter Länge F _G N/m	
	h mm	b mm	s mm		e _{1/2} mm	I _x · 10 ⁴ mm ⁴	W _x · 10 ³ mm ³	I _y · 10 ⁴ mm ⁴	W _{y1} · 10 ³ mm ³			W _{y2} · 10 ³ mm ³
30 × 15	30	15	4	221	5,2/9,8	2,53	1,69	0,38	0,73	0,39	0,103	17,0
30	30	33	5	544	13,1/19,9	6,39	4,26	5,33	4,07	2,68	0,174	41,9
40 × 20	40	20	5	366	6,7/13,3	7,58	3,79	1,14	1,70	0,86	0,142	28,2
40	40	35	5	621	13,3/21,7	14,1	7,05	6,68	5,02	3,08	0,200	47,8
50 × 25	50	25	5	492	8,1/16,9	16,8	6,73	2,49	3,07	1,47	0,181	37,9
50	50	38	5	712	13,7/24,3	26,4	10,6	9,12	6,66	3,75	0,232	54,8
60	60	30	6	646	9,1/20,9	31,6	10,5	4,51	4,98	2,16	0,215	49,7
65	65	42	5,5	903	14,2/27,8	57,5	17,7	14,1	9,93	5,07	0,273	69,5
80	80	45	6	1100	14,5/30,5	106	26,5	19,4	13,4	6,36	0,312	84,7
100	100	50	6	1350	15,5/34,5	206	41,2	29,3	18,9	8,49	0,372	104,0
120	120	55	7	1700	16,0/39,0	364	60,7	43,2	27,0	11,1	0,434	130,9
140	140	60	7	2040	17,5/42,5	605	86,4	62,7	35,8	14,8	0,489	157,1
160	160	65	7,5	2400	18,4/46,6	925	116	85,3	46,4	18,3	0,546	184,8
180	180	70	8	2800	19,2/50,8	1350	150	114	59,4	22,4	0,611	215,6
200	200	75	8,5	3220	20,1/54,9	1910	191	148	73,6	27,0	0,661	248,0
220	220	80	9	3740	21,4/58,6	2690	245	197	92,1	33,6	0,718	288,0
240	240	85	9,5	4230	22,3/62,7	3600	300	248	111	39,6	0,775	325,7
260	260	90	10	4830	23,6/66,4	4820	371	317	134	47,7	0,834	372
280	280	95	10	5330	25,3/69,7	6280	448	399	158	57,3	0,890	410,5
300	300	100	10	5880	27,0/73,0	8030	535	495	183	67,8	0,950	452,8
320	320	100	14	7580	26,0/74,0	10870	679	597	230	80,7	0,982	583,7
350	350	100	14	7730	24,0/76,0	12840	734	570	238	75,0	1,05	595,3
380	380	102	13,5	8040	23,8/78,2	15760	829	615	258	78,6	1,11	619,1
400	400	110	14	9150	26,5/83,5	20350	1020	846	355	101	1,18	704,6

1) Die Zahlenwerte geben zugleich den Profilumfang U in m an.

9.10 Warmgewalzter gleichschenkliger rundkantiger Winkelstahl



Beispiel für die Bezeichnung eines Winkelstahls und für das Ablesen von Flächenmomenten I und Widerstandsmomenten W :

L 40 × 6 DIN 1028

- Schenkelbreite $a = 40 \text{ mm}$
- Schenkeldicke $s = 6 \text{ mm}$
- Flächenmoment $I_x = 6,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
- Widerstandsmoment $W_{x1} = 5,28 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
 $W_{x2} = 2,26 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
- Oberfläche je Meter Länge $A'_0 = 0,16 \text{ m}^2/\text{m}$
- Profilumfang $U = 0,16 \text{ m}$
- Trägheitsradius $i_x = \sqrt{I_x/A} = 11,9 \text{ mm}$

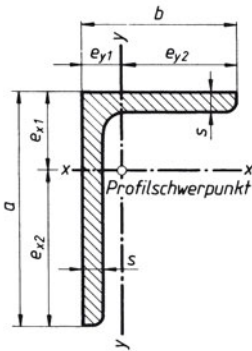
Kurzzeichen	$\frac{a}{s}$	Querschnitt A mm^2	$\frac{e_1}{e_2}$	$I_x = I_y$ $\cdot 10^4 \text{ mm}^4$	$W_{x1} = W_{y1}$ $\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	$W_{x2} = W_{y2}$ $\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	Oberfläche je Meter Länge	Gewichtskraft je Meter Länge F_G N/m
	mm						A'_0 m^2/m^{-1}	
20 × 4	20/ 4	145	6,4/ 13,6	0,48	0,75	0,35	0,08	11,2
25 × 5	25/ 5	226	8 / 17	1,18	1,48	0,69	0,10	17,4
30 × 5	30/ 5	278	9,2/ 20,8	2,16	2,35	1,04	0,12	21,4
35 × 5	35/ 5	328	10,4/ 24,6	3,56	3,42	1,45	0,14	25,3
40 × 6	40/ 6	448	12 / 28	6,33	5,28	2,26	0,16	34,5
45 × 6	45/ 6	509	13,2/ 31,8	9,16	6,94	2,88	0,17	39,2
50 × 6	50/ 6	569	14,5/ 35,5	12,8	8,83	3,61	0,19	43,8
50 × 8	50/ 8	741	15,2/ 34,8	16,3	10,7	4,68	0,19	57,1
55 × 8	55/ 8	823	16,4/ 38,6	22,1	13,5	5,73	0,21	63,4
60 × 6	60/ 6	691	16,9/ 43,1	22,8	13,5	5,29	0,23	53,2
60 × 10	60/10	1110	18,5/ 41,5	34,9	18,9	8,41	0,23	85,2
65 × 8	65/ 8	985	18,9/ 46,1	37,5	19,8	8,13	0,25	75,9
70 × 7	70/ 7	940	19,7/ 50,3	42,4	21,5	8,43	0,27	72,4
70 × 9	70/ 9	1190	20,5/ 49,5	52,6	25,7	10,6	0,27	91,6
70 × 11	70/11	1430	21,3/ 48,7	61,8	29,0	12,7	0,27	110,1
75 × 8	75/ 8	1150	21,3/ 53,7	58,9	27,7	11,0	0,29	88,6
80 × 8	80/ 8	1230	22,6/ 57,4	72,3	32,0	12,6	0,31	94,7
80 × 10	80/10	1510	23,4/ 56,6	87,5	37,4	15,5	0,31	116,7
80 × 12	80/12	1790	24,1/ 55,9	102	42,3	18,2	0,31	138,3
90 × 9	90/ 9	1550	25,4/ 64,6	116	45,7	18,0	0,35	119,4
90 × 11	90/11	1870	26,2/ 63,8	138	52,7	21,6	0,36	144,0
100 × 10	100/10	1920	28,2/ 71,8	177	62,8	24,7	0,39	147,9
100 × 14	100/14	2620	29,8/ 70,2	235	78,9	33,5	0,39	201,8
110 × 12	110/12	2510	31,5/ 78,5	280	88,9	35,7	0,43	193,3
120 × 13	120/13	2970	34,4/ 85,6	394	115	46,0	0,47	228,7
130 × 12	130/12	3000	36,4/ 93,6	472	130	50,4	0,51	231,0
130 × 16	130/16	3930	38,0/ 92	605	159	65,8	0,51	302,6
140 × 13	140/13	3500	39,2/100,8	638	163	63,3	0,55	269,5
140 × 15	140/15	4000	40,0/100,0	723	181	72,3	0,55	308,0
150 × 12	150/12	3480	41,2/108,8	737	179	67,7	0,59	268,0
150 × 16	150/16	4570	42,9/107,1	949	221	88,7	0,59	351,9
150 × 20	150/20	5630	44,4/105,6	1150	259	109	0,59	433,6
160 × 15	160/15	4610	44,9/115,1	1100	245	95,6	0,63	355,0
160 × 19	160/19	5750	46,5/113,5	1350	290	119	0,63	442,8
180 × 18	180/18	6190	51,0/129,0	1870	367	145	0,71	476,7
180 × 22	180/22	7470	52,6/127,4	2210	420	174	0,71	575,3
200 × 16	200/16	6180	55,2/144,8	2340	424	162	0,79	475,9
200 × 20	200/20	7640	56,8/143,2	2850	502	199	0,79	588,3
200 × 24	200/24	9060	58,4/141,6	3330	570	235	0,79	697,7
200 × 28	200/28	10500	59,9/140,1	3780	631	270	0,79	808,6

1) Die Zahlenwerte geben zugleich den Profilumfang U in m an.

Festigkeitslehre

Warmgewalzter ungleichschenkliger rundkantiger Winkelstahl nach EN 10056-1

9.11 Warmgewalzter ungleichschenkliger rundkantiger Winkelstahl nach EN 10056-1



Beispiel für die Bezeichnung eines ungleichschenkligen Winkelstahls und für das Auswerten der Tabelle:

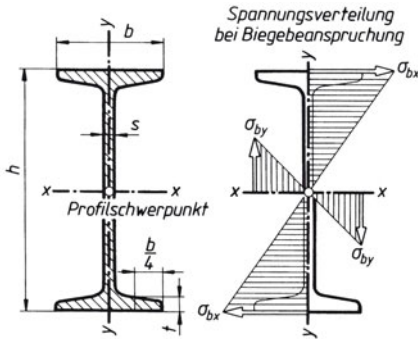
L EN 10056-1 – 30 × 20 × 4

- Schenkel breite $a = 30 \text{ mm}, b = 20 \text{ mm}$
- Schenkeldicke $s = 4 \text{ mm}$
- Flächenmoment 2. Grades $I_x = 1,59 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
- Widerstandsmoment $W_{x1} = 1,54 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
- Widerstandsmoment $W_{x2} = 0,81 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
- Oberfläche je Meter Länge $A'_0 = 0,097 \text{ m}^2/\text{m}$
- Profilumfang $U = 0,097 \text{ m}$
- Gewichtskraft je Meter Länge $F'_G = 14,2 \text{ N/m}$
- Trägheitsradius $i_x = \sqrt{I_x/A} = 9,27 \text{ mm}$

Kurzzeichen	a mm	b mm	c mm	Querschnitt A mm ²	$\frac{e_{x1}}{e_{y1}}$ mm	I_x $\cdot 10^4 \text{ mm}^4$	W_{x1} $\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	W_{x2} $\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	I_y $\cdot 10^4 \text{ mm}^4$	W_{y1} $\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	W_{y2} $\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	Oberfläche	Gewichtskraft
												je Meter Länge A'_0 m ² /m ¹)	je Meter Länge F'_G N/m
30 × 20 × 4	30	20	4	185	10,3 / 5,4	1,59	1,54	0,81	0,55	1,02	0,38	0,097	14,2
40 × 20 × 4	40	20	4	225	14,7 / 4,8	3,59	2,44	1,42	0,60	1,25	0,39	0,117	17,4
45 × 30 × 5	45	30	5	353	15,2 / 7,8	6,99	4,60	2,35	2,47	3,17	1,11	0,146	27,2
50 × 40 × 5	50	40	5	427	15,6 / 10,7	10,4	6,67	3,02	5,89	5,50	2,01	0,177	32,9
60 × 30 × 7	60	30	7	585	22,4 / 7,6	20,7	9,24	5,50	3,41	4,49	1,52	0,175	45,0
60 × 40 × 6	60	40	6	568	20,0 / 10,1	20,1	10,1	5,03	7,12	7,05	2,38	0,195	43,7
65 × 50 × 5	65	50	5	554	19,9 / 12,5	23,1	11,6	5,11	11,9	9,52	3,18	0,224	42,7
65 × 50 × 9	65	50	9	958	21,5 / 14,1	38,2	17,8	8,77	19,4	13,8	5,39	0,224	73,7
75 × 50 × 7	75	50	7	830	24,8 / 12,5	46,4	18,7	9,24	16,5	13,2	4,39	0,244	63,8
75 × 55 × 9	75	55	9	1090	24,7 / 14,8	59,4	24,0	11,8	26,8	18,1	6,66	0,254	84,2
80 × 40 × 6	80	40	6	689	28,5 / 8,8	44,9	15,8	8,73	7,59	8,63	2,44	0,234	53,1
80 × 40 × 8	80	40	8	901	29,4 / 9,5	57,6	19,6	11,4	9,68	10,2	3,18	0,234	69,3
80 × 65 × 8	80	65	8	1100	24,7 / 17,3	68,1	27,6	12,3	40,1	23,2	8,41	0,283	84,9
90 × 60 × 6	90	60	6	869	28,9 / 14,1	71,7	24,8	11,7	25,8	18,3	5,61	0,294	66,9
90 × 60 × 8	90	60	8	1140	29,7 / 14,9	92,5	31,1	15,4	33,0	22,0	7,31	0,294	87,9
100 × 50 × 6	100	50	6	873	33,2 / 10,4	87,7	25,1	13,8	15,3	14,7	3,86	0,292	67,2
100 × 50 × 8	100	50	8	1150	35,9 / 11,3	116	32,3	18,0	19,5	17,3	5,04	0,292	88,2
100 × 50 × 10	100	50	10	1410	36,7 / 12,0	141	38,4	22,2	23,4	19,5	6,17	0,292	108,9
100 × 65 × 9	100	65	9	1420	33,2 / 15,9	141	42,5	21,0	46,7	29,4	9,52	0,321	108,9
100 × 75 × 9	100	75	9	1510	31,5 / 19,1	148	47,0	21,5	71,0	37,0	12,7	0,341	115,7
120 × 80 × 8	120	80	8	1550	38,3 / 18,7	226	59,0	27,6	80,8	43,2	13,2	0,391	119,6
120 × 80 × 10	120	80	10	1910	39,2 / 19,5	276	70,4	34,1	98,1	50,3	16,2	0,391	147,1
120 × 80 × 12	120	80	12	2270	40,0 / 20,3	323	80,8	40,4	114	56,0	19,1	0,391	174,6
130 × 65 × 10	130	65	10	1860	46,5 / 14,5	321	69,0	38,4	54,2	37,4	10,7	0,381	143,2
130 × 75 × 10	130	75	10	1960	44,5 / 17,3	337	75,7	39,4	82,9	47,9	14,4	0,401	151,0
130 × 75 × 12	130	75	12	2330	45,3 / 18,1	395	87,2	46,6	96,5	53,3	17,0	0,401	179,5
130 × 90 × 10	130	90	10	2120	41,5 / 21,8	358	86,3	40,5	141	65,0	20,6	0,430	162,8
130 × 90 × 12	130	90	12	2510	42,4 / 22,6	420	99,1	48,0	165	73,0	24,4	0,430	193,2
150 × 75 × 9	150	75	9	1950	52,8 / 15,7	455	86,2	46,8	78,3	49,9	13,2	0,441	150,0
150 × 75 × 11	150	75	11	2360	53,7 / 16,5	545	101	56,6	93,0	56,0	15,9	0,441	182,4
150 × 90 × 10	150	90	10	2320	49,9 / 20,3	532	107	53,1	145	71,0	20,9	0,469	178,5
150 × 90 × 12	150	90	12	2750	50,8 / 21,1	626	123	63,1	170	81,0	24,7	0,469	211,8
150 × 100 × 10	150	100	10	2420	48,0 / 23,4	552	115	54,1	198	85,0	25,8	0,489	186,3
150 × 100 × 12	150	100	12	2870	48,9 / 24,2	650	133	64,2	232	96,0	30,6	0,489	221,6
150 × 100 × 14	150	100	14	3320	49,7 / 25,0	744	150	74,1	264	106	35,2	0,489	255,9
160 × 80 × 12	160	80	12	2750	57,2 / 17,7	720	126	70,0	122	69,0	19,6	0,469	211,8
200 × 100 × 10	200	100	10	2920	69,3 / 20,1	1220	176	93,2	210	104	26,3	0,587	225,6
200 × 100 × 14	200	100	14	4030	71,2 / 21,8	1650	232	128	282	129	36,1	0,587	309,9
250 × 90 × 10	250	90	10	3320	94,5 / 15,6	2170	230	140	161	103	21,7	0,667	255,9
250 × 90 × 14	250	90	14	4590	96,5 / 17,3	2960	307	192	216	125	29,7	0,667	353,0

1) Die Zahlenwerte geben zugleich den Profilumfang U in m an.

9.12 Warmgewalzte schmale I-Träger nach DIN 1025-1 (Auszug)



Beispiel für die Bezeichnung eines schmalen I-Trägers mit geneigten inneren Flanschflächen und für das Auswerten der Tabelle:

I-Profil DIN 1025 – S235JR – I 80

Höhe	$h = 80 \text{ mm}$
Breite	$b = 42 \text{ mm}$
Flächenmoment 2. Grades	$I_x = 77,8 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
Widerstandsmoment	$W_x = 19,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
Oberfläche je Meter Länge	$A'_0 = 0,304 \text{ m}^2/\text{m}$
Profilumfang	$U = 0,304 \text{ m}$
Trägheitsradius	$i_x = \sqrt{I_x/A} = 32 \text{ mm}$

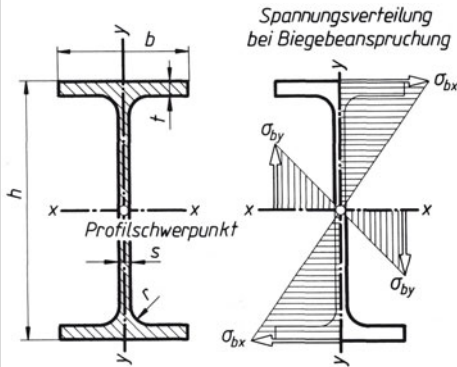
Kurzzeichen	h	b	s	t	Querschnitt	I_x	W_x	I_y	W_y	Oberfläche je Meter Länge	Gewichtskraft je Meter Länge
I	mm	mm	mm	mm	A mm ²	$\cdot 10^4 \text{ mm}^4$	$\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	$\cdot 10^4 \text{ mm}^4$	$\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	A'_0 m ² /m ¹⁾	F_G N/m
80	80	42	3,9	5,9	758	77,8	19,5	6,29	3,00	0,304	58,4
100	100	50	4,5	6,8	1060	171	34,2	12,2	4,88	0,370	81,6
120	120	58	5,1	7,7	1420	328	54,7	21,5	7,41	0,439	110
140	140	66	5,7	8,6	1830	573	81,9	35,2	10,7	0,502	141
160	160	74	6,3	9,5	2280	935	117	54,7	14,8	0,575	176
180	180	82	6,9	10,4	2790	1450	161	81,3	19,8	0,640	215
200	200	90	7,5	11,3	3350	2140	214	117	26,0	0,709	258
220	220	98	8,1	12,2	3960	3060	278	162	33,1	0,775	305
240	240	106	8,7	13,1	4610	4250	354	221	41,7	0,844	355
260	260	113	9,4	14,1	5340	5740	442	288	51,0	0,906	411
280	280	119	10,1	15,2	6110	7590	542	364	61,2	0,966	471
300	300	125	10,8	16,2	6910	9800	653	451	72,2	1,03	532
320	320	131	11,5	17,3	7780	12510	782	555	84,7	1,09	599
340	340	137	12,2	18,3	8680	15700	923	674	98,4	1,15	668
360	360	143	13,0	19,5	9710	19610	1090	818	114	1,21	746
380	380	149	13,7	20,5	10700	24010	1260	975	131	1,27	824
400	400	155	14,4	21,6	11800	29210	1460	1160	149	1,33	908
425	425	163	15,3	23,0	13200	36970	1740	1440	176	1,41	1020
450	450	170	16,2	24,3	14700	45850	2040	1730	203	1,48	1128
475	475	178	17,1	25,6	16300	56480	2380	2090	235	1,55	1256
500	500	185	18,0	27,0	18000	68740	2750	2480	268	1,63	1383
550	550	200	19,0	30,0	21300	99180	3610	3490	349	1,80	1638
600	600	215	21,6	32,4	25400	139000	4630	4670	434	1,92	1952

1) Die Zahlenwerte geben zugleich den Profilumfang U in m an.

Festigkeitslehre

Warmgewalzte I -Träger, I PE-Reihe

9.13 Warmgewalzte I -Träger, I PE-Reihe



Beispiel für die Bezeichnung eines mittelbreiten I-Trägers mit parallelen Flanschflächen und für das Ablesen von Flächenmomenten I und Widerstandsmomenten W :

IPE 80 DIN 1025

Höhe	$h = 80 \text{ mm}$
Breite	$b = 46 \text{ mm}$
Flächenmoment	$I_x = 80,1 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
Widerstandsmoment	$W_x = 20,0 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
Oberfläche je Meter Länge	$A'_0 = 0,328 \text{ m}^2/\text{m}$
Profilumfang	$U = 0,328 \text{ m}$
Trägheitsradius	$I_x = \sqrt{I_x/A} = 32,4 \text{ mm}$

Kurzzeichen	Querschnitt						Flächenmomente				Oberfläche je Meter Länge	Gewichtskraft je Meter Länge
	b mm	t mm	h mm	s mm	r mm	A mm ²	I_x $\cdot 10^4 \text{ mm}^4$	W_x $\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	I_y $\cdot 10^4 \text{ mm}^4$	W_y $\cdot 10^3 \text{ mm}^3$	A'_0 m ² /m ¹)	F'_G N/m
IPE												
80	46	5,2	80	3,8	5	764	80,1	20,0	8,49	3,69	0,328	59
100	55	5,7	100	4,1	7	1030	171	34,2	15,9	5,79	0,400	79
120	64	6,3	120	4,4	7	1320	318	53,0	27,7	8,65	0,475	102
140	73	6,9	140	4,7	7	1640	541	77,3	44,9	12,3	0,551	126
160	82	7,4	160	5,0	9	2010	869	109	68,3	16,7	0,623	155
180	91	8,0	180	5,3	9	2390	1320	146	101	22,2	0,698	184
200	100	8,5	200	5,6	12	2850	1940	194	142	28,5	0,768	220
220	110	9,2	220	5,9	12	3340	2770	252	205	37,3	0,848	257
240	120	9,8	240	6,2	15	3910	3890	324	284	47,3	0,922	301
270	135	10,2	270	6,6	15	4590	5790	429	420	62,2	1,041	353
300	150	10,7	300	7,1	15	5380	8360	557	604	80,5	1,155	414
330	160	11,5	330	7,5	18	6260	11770	713	788	98,5	1,254	482
360	170	12,7	360	8,0	18	7270	16270	904	1040	123	1,348	560
400	180	13,5	400	8,6	21	8450	23130	1160	1320	146	1,467	651
450	190	14,6	450	9,4	21	9880	33740	1500	1680	176	1,605	761
500	200	16,0	500	10,2	21	11600	48200	1930	2140	214	1,738	893
550	210	17,2	550	11,1	24	13400	67120	2440	2670	254	1,877	1032
600	220	19,0	600	12,0	24	15600	92080	3070	3390	308	2,014	1200

1) Die Zahlenwerte geben zugleich den Profilumfang U in m an.

9.14 Knickung im Maschinenbau

1. Lösungsweg

Gegeben: Querschnittsabmessungen und damit axiales Flächenmoment I , Stablänge l , Belastungsfall





Gesucht: Zulässige Druckkraft F oder vorhandene Knicksicherheit ν

Schlankheitsgrad λ I_{\min} kleinstes Flächenmoment 2. Grades des Querschnittes in mm^4 (9.8)
 $\lambda = \frac{s}{i}$ s freie Knicklänge in mm
 i Trägheitsradius in mm (9.8)

Trägheitsradius i_{\min} $i = \frac{d}{4}$ für Kreisquerschnitt
 $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ A Querschnitt

Vergleich des Schlankheitsgrades λ mit Grenzschlankheitsgrad λ_0 nach 9.15

Beachte: Meistens kann $s = l$ gesetzt werden (Fall 2)

<i>Fall 1</i> $F_K = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{4 \cdot l^2}$	<i>Fall 2: Grundfall</i> $F_K = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{l^2}$	<i>Fall 3</i> $F_K = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2 \cdot 2}{l^2}$	<i>Fall 4</i> $F_K = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2 \cdot 4}{l^2}$
			

bei $\lambda > \lambda_0$ weiterrechnen nach Euler:

Knickkraft F_K $F_K = \frac{E I_{\min} \pi^2}{s^2}$ oder $\sigma_K = \frac{E \pi^2}{\lambda^2}$
 nach Euler und Knickspannung σ_K

zulässige Druckkraft F oder Knicksicherheit ν_{vorh}

$$F = \frac{F_K}{\nu} \quad \text{oder} \quad \nu_{\text{vorh}} = \frac{F_K}{F}$$

σ_K, σ_d, E	F_K, F	λ, ν	s, i	I	A
$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	N	1	mm	mm^4	mm^2

bei $\lambda < \lambda_0$ weiterrechnen nach Tetmajer (9.15):

Knickspannung σ_K mit Tetmajer-Gleichung aus 9.15 berechnen.

vorhandene Druckspannung σ_d oder Knicksicherheit ν $\sigma_d = \frac{F}{A}$ oder $\sigma_d = \frac{\sigma_K}{\nu}$ oder $\nu = \frac{\sigma_K}{\sigma_d}$

2. Lösungsweg

Gegeben: Druckkraft F , Knicksicherheit ν , Stablänge l , Belastungsfall

Gesucht: Erforderlicher Durchmesser d

Knickkraft F_K $F_K = F \nu$

erforderliches Flächenmoment I_{\min}

$$I_{\min} = \frac{F_K s^2}{E \pi^2}$$

$$I = \frac{d^4}{20} \quad \text{bei Kreisquerschnitt}$$

Festigkeitslehre

Grenzschlankheitsgrad λ_0 für Euler'sche Knickung und Tetmajer-Gleichungen

erforderlicher Durchmesser d bei Kreisquerschnitt und Trägheitsradius i

$$d_{\text{erf}} = \sqrt[4]{20 I_{\text{min}}}$$

$$i = \sqrt{\frac{I_{\text{min}}}{A}} = \frac{d}{4}$$

Schlankheitsgrad λ

$$\lambda = \frac{s}{i}$$

Vergleich des Schlankheitsgrades λ mit Grenzschlankheit λ_0 nach 9.15.

Ist $\lambda > \lambda_0$ war die Annahme richtig, d. h. gefundener Durchmesser d kann ausgeführt werden.

Bei $\lambda < \lambda_0$ muss mit angenommenem Durchmesser d nach Tetmajer weitergerechnet werden; zweckmäßig wird d größer d_{erf} angenommen, dann der Schlankheitsgrad $\lambda = 4 s/d$ (bei Kreisquerschnitt) *neu* berechnet, mit Tetmajer-Gleichung (9.15) die Knickspannung σ_K bestimmt, ebenso die vorhandene Druckspannung $\sigma_d = F/A$. Danach wird überprüft, ob

Knicksicherheit ν

$$\nu_{\text{vorh}} = \frac{\sigma_K}{\sigma_d} \geq \nu_{\text{erf}} \text{ ist.}$$

Ist $\nu_{\text{vorh}} < \nu_{\text{erf}}$, muss mit größerem d die Rechnung wiederholt werden.

9.15 Grenzschlankheitsgrad λ_0 für Euler'sche Knickung und Tetmajer-Gleichungen

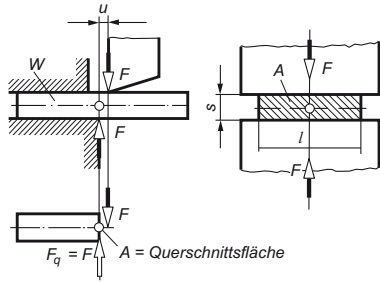
Werkstoff	Elastizitätsmodul E in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Grenzschlankheitsgrad λ_0	Tetmajer-Gleichung für Knickspannung σ_K in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
Nadelholz	10 000	100	$\sigma_K = 29,3 - 0,194 \cdot \lambda$
Gusseisen	100 000	80	$\sigma_K = 776 - 12 \cdot \lambda + 0,053 \cdot \lambda^2$
S235JR	210 000	105	$\sigma_K = 310 - 1,14 \cdot \lambda$
E295 und E355	210 000	89	$\sigma_K = 335 - 0,62 \cdot \lambda$
Vergütungsstahl z. B. 16NiCr4	210 000	86	$\sigma_K = 470 - 2,3 \cdot \lambda$

Beachte: Die Eulergleichung gilt nur, solange der errechnete Schlankheitsgrad λ gleich oder *größer* ist als der hier in der Tabelle angegebene Grenzschlankheitsgrad λ_0 .

Die Tetmajer-Gleichungen sind Zahlenwertgleichungen mit σ_K in N/mm^2 .

9.16 Abscheren und Torsion

Praktisches Beispiel für Abscherbeanspruchung ist das Scherschneiden. Die äußeren Kräfte F bilden ein Kräftepaar mit dem kleinen Wirkabstand u , dem so genannten Schneidspalt. Das entsprechend kleine Kraftmoment $M = Fu$ wird vernachlässigt. Die in der Schnittfläche auftretende Gleichgewichtskraft $F_q = F$ ist eine Tangentialkraft, die auftretende Tangentialspannung ist die Schubspannung τ . Zur Kennzeichnung der Beanspruchung nennt man sie Abscherspannung τ_a .



vorhandene Abscherspannung τ_a $\tau_{a\text{vorh}} = \frac{F}{A} \leq \tau_{a\text{zul}}$
(Abscher-Hauptgleichung) (Spannungsnachweis)

erforderlicher Querschnitt A $A_{\text{erf}} = \frac{F}{\tau_{a\text{zul}}}$
(Querschnittsnachweis)

zulässige Belastung F_{max} $F_{\text{max}} = A \tau_{a\text{zul}}$
(Belastungsnachweis)

τ_a	F	A
N/mm ²	N	mm ²

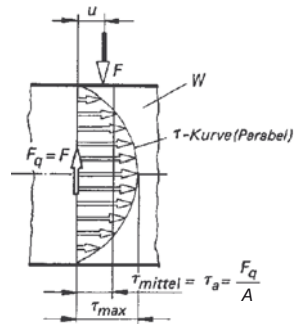
Diese Gleichungen gelten nur unter der Annahme einer gleichmäßigen Schubspannungsverteilung über der Querschnittsfläche A .

Abscherfestigkeit τ_{aB} :
 $\tau_{aB} = 0,85 \cdot R_m$ (für Flussstahl)
 $\tau_{aB} = 1,1 \cdot R_m$ (für Gusseisen)

Untersuchungen am Rechteckquerschnitt ergeben eine parabolische Verteilung der Schubspannungen mit $\tau = 0$ in der Randfaser und $\tau = \tau_{\text{max}}$ in der mittleren Faserschicht.

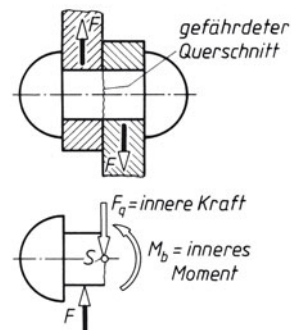
Wird mit dem Mittelwert $\tau_{\text{mittel}} = \tau_a = F/A$ gerechnet, ergeben sich für verschiedene Querschnittsformen die folgenden Maximalwerte für die auftretende Schubspannung:

$\tau_{\text{max}} = (3/2) \cdot \tau_a$ für den Rechteckquerschnitt,
 $\tau_{\text{max}} = (4/3) \cdot \tau_a$ für den Kreisquerschnitt,
 $\tau_{\text{max}} = \text{ca. } 2 \cdot \tau_a$ für den Rohrquerschnitt.



Niete und Bolzen werden mit der Abscher-Hauptgleichung $\tau_{a\text{vorh}} = F/A$ berechnet, obwohl keine gleichmäßige Spannungsverteilung vorliegt und der gefährdete Querschnitt neben der Querkraft $F_q = F$ noch ein Biegemoment M_b zu übertragen hat. In warm eingezogenen Nieten tritt gar keine Schubspannung auf, sie werden durch das Schrumpfen in Längsrichtung auf Zug beansprucht.

Die zulässigen Abscherspannungen für Nietverbindungen im Stahlhoch- und Kranbau sowie im Kesselbau sind vorgeschrieben.



Festigkeitslehre

Abscheren und Torsion

vorhandene
Torsionsspannung τ_t

$$\tau_{t\text{vorh}} = \frac{M_T}{W_p} \leq \tau_{t\text{zul}}$$

(Spannungsnachweis)

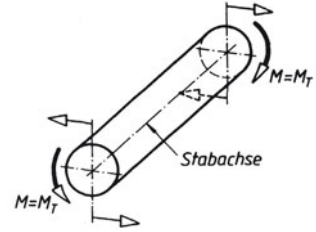
τ_t	M_T	W_p
$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Nmm	mm^3

W_p polares Widerstandsmoment (9.20)

erforderliches polares
Widerstandsmoment W_p

$$W_{p\text{perf}} = \frac{M_T}{\tau_{t\text{zul}}}$$

(Querschnittsnachweis)



zulässiges Torsions-
moment $M_{T\text{max}}$

$$M_{T\text{max}} = W_p \tau_{t\text{zul}}$$

(Belastungsnachweis)

erforderliches polares
Widerstandsmoment (Zahl-
enwertgleichung) W_p

$$M_T = 9,55 \cdot 10^6 \frac{P}{n}$$

(Zahlenwertgleichung)

M_T	P	n
Nmm	kW	min^{-1}

Verdrehwinkel φ in Grad ($^\circ$)

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{\tau_t l}{G r}$$

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_T l}{W_p r G}$$

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_T l}{I_p G}$$

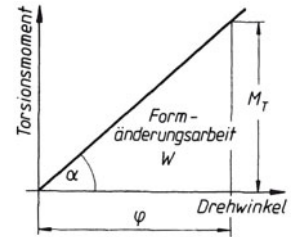
G Schubmodul in N/mm^2 nach 9.5
 l Verdrehlänge in mm
 r Wellenradius in mm
 M_T Torsionsmoment in Nmm
 W_p polares Widerstandsmoment
 in mm^3
 I_p polares Flächenmoment in mm^4
 nach 9.20

Formänderungsarbeit W

$$W = M_T \frac{\varphi}{2} = \frac{\tau_t^2 V}{4G} = \frac{R}{2} \varphi^2$$

$$R = \frac{M_T}{\varphi} \triangleq \tan \alpha$$

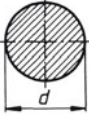
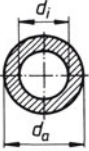
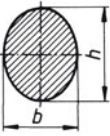
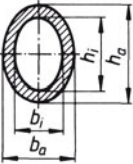
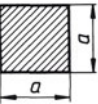

V Volumen in mm^3
 R Federrate in N/mm
 φ Drehwinkel in rad
 G Schubmodul in N/mm^2



Festigkeitslehre

Widerstandsmoment W_p (W_t) und Flächenmoment I_p (Drillungswiderstand I_t)

9.17 Widerstandsmoment W_p (W_t) und Flächenmoment I_p (Drillungswiderstand I_t)

Form des Querschnittes	Widerstandsmoment W_p (W_t)	Flächenmoment I_p Drillungswiderstand I_t	Bemerkungen																											
	$W_t = W_p = \frac{\pi}{16} d^3 \approx \frac{d^3}{5}$ $\approx 0,2 d^3$	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} d^4 \approx \frac{d^4}{10}$ $\approx 0,1 d^4$	τ_{\max} am Umfang																											
	$W_t = W_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}$	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} (d_a^4 - d_i^4)$	τ_{\max} am Umfang																											
	$W_t = \frac{\pi}{16} n b^3$ $\frac{h}{b} = n > 1$	$I_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{n^3 b^4}{n^2 + 1}$	τ_{\max} an den Endpunkten der kleinen Achse																											
	$\frac{h_a}{b_a} = \frac{h_i}{b_i} = n > 1 \quad \frac{h_i}{h_a} = \frac{b_i}{b_a} = \alpha < 1$ $I_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{n^3}{n^2 + 1} \cdot b_a^4 (1 - \alpha^4)$ $W_t = \frac{\pi}{16} n b_a^3 (1 - \alpha^4)$		τ_{\max} an den Endpunkten der kleinen Achse																											
	$W_t = 0,208 a^3$	$I_t = 0,141 a^4$	τ_{\max} in der Mitte der Seiten																											
	$\frac{h}{b} = n > 1$ $W_t = c_1 b^3$	$I_t = c_2 b^4$	τ_{\max} in der Mitte der langen Seiten																											
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border: none;">n</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1,5</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">3</td> <td style="border: none;">4</td> <td style="border: none;">6</td> <td style="border: none;">8</td> <td style="border: none;">10</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">c_1</td> <td>0,208</td> <td>0,346</td> <td>0,493</td> <td>0,801</td> <td>1,150</td> <td>1,789</td> <td>2,456</td> <td>3,123</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">c_2</td> <td>0,1404</td> <td>0,2936</td> <td>0,4572</td> <td>0,7899</td> <td>1,1232</td> <td>1,789</td> <td>2,456</td> <td>3,123</td> </tr> </table>	n	1	1,5	2	3	4	6	8	10	c_1	0,208	0,346	0,493	0,801	1,150	1,789	2,456	3,123	c_2	0,1404	0,2936	0,4572	0,7899	1,1232	1,789	2,456	3,123		
n	1	1,5	2	3	4	6	8	10																						
c_1	0,208	0,346	0,493	0,801	1,150	1,789	2,456	3,123																						
c_2	0,1404	0,2936	0,4572	0,7899	1,1232	1,789	2,456	3,123																						

Festigkeitslehre

Festigkeitswerte

9.18 Festigkeitswerte für Walzstahl (Bau- und Feinkornbaustahl)

Werkstoff	Bezeichnung	Erzeugnisdicke t mm	Streckgrenze R_e N/mm ²	Zugfestigkeit R_m N/mm ²
Baustahl ¹⁾	S235JR	$t \leq 40$	240	360
	S235JRG1 S235JRG2 S235JO	$40 < t \leq 80$	215	
	E295	$t \leq 40$	360	
	$40 < t \leq 80$	325		
Feinkornbaustahl ¹⁾	E355	$t \leq 40$	360	700
		$40 < t \leq 80$	325	

Hinweis: Weitere Festigkeitswerte in DIN 18 800 Teil 1, Tabelle 1. Der Elastizitätsmodul E beträgt für alle Baustähle $E = 210\,000\text{ N/mm}^2$.

¹⁾ Bezeichnungen der Baustähle siehe DIN EN 10025.

9.19 Festigkeitswerte in N/mm² für verschiedene Stahlsorten¹⁾

Werkstoff	Elastizitäts- modul E	R_m	R_e $R_{p\,0,2}$	$\sigma_{zd\text{ Sch}}$	$\sigma_{zd\text{ W}}$	$\sigma_{b\text{ Sch}}^{5)}$	$\sigma_{b\text{ W}}$	$\bar{\epsilon}_{t\text{ Sch}}^{6)}$	$\bar{\epsilon}_{t\text{ W}}$	Schub- modul G
S235JR	210 000	360	235	158	160	270	180	115	105	80 000
S275JO	210 000	430	275	185	195	320	215	140	125	80 000
E295	210 000	490	295	205	220	370	245	160	145	80 000
S355JO	210 000	510	355	215	230	380	255	165	150	80 000
E335	210 000	590	335	240	265	435	290	200	170	80 000
E360	210 000	690	360	270	310	500	340	220	200	80 000
50CrMo4 ²⁾	210 000	1100	900	385	495	785	525	350	315	80 000
20MnCr5 ³⁾	210 000	1200	850	365	480	765	510	335	305	80 000
34CrAlNi7 ⁴⁾	210 000	900	680	335	405	650	435	300	260	80 000

¹⁾ Richtwerte für $d_B < 16\text{ mm}$

²⁾ Vergütungsstahl

³⁾ Einsatzstahl

⁴⁾ Nitrierstahl

⁵⁾ berechnet mit $1,5 \cdot \sigma_{bW}$

⁶⁾ berechnet mit $1,1 \cdot \bar{\epsilon}_{tW}$

9.20 Festigkeitswerte in N/mm² für verschiedene Gusseisen-Sorten¹⁾

Werkstoff	Elastizitäts- modul E	R_m	R_e $R_{p\,0,2}$	σ_{dB}	σ_{bB}	$\sigma_{zd\text{ W}}$	$\sigma_{b\text{ W}}$	$\bar{\epsilon}_{t\text{ W}}$	Schub- modul G
GJL-150	82 000	150	90	600	250	40	70	60	35 000
GJL-200	100 000	200	130	720	290	50	90	75	40 000
GJL-250	110 000	250	165	840	340	60	120	100	43 000
GJL-300	120 000	300	195	960	390	75	140	120	49 000
GJL-350	130 000	350	228	1 080	490	85	145	125	52 000
GJMW-400-5	175 000	400	220	1 000	800	120	140	115	67 000
GJMB-350-10	175 000	350	200	1 200	700	1 000	120	100	67 000

¹⁾ Richtwerte für 15 bis 30 mm Wanddicke; für 8 mm bis 15 mm 10 % höher, für > 30 mm 10 % niedriger, Dauerfestigkeitswerte im bearbeiteten Zustand; für Gusshaut 20 % Abzug.

9.21 Zusammengesetzte Beanspruchung bei gleichartigen Spannungen

Zug und Biegung

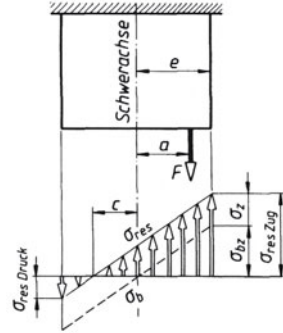
resultierende Zugspannung $\sigma_{res\ Zug}$ und resultierende Druckspannung $\sigma_{res\ Druck}$

$$\sigma_{res\ Zug} = \sigma_z + \sigma_{bz} \quad c = \frac{i^2}{a} = \frac{I}{Aa}$$

$$\sigma_{res\ Zug} = \frac{F}{A} + \frac{Fae}{I} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{res\ Druck} = \sigma_{bz} - \sigma_z$$

$$\sigma_{res\ Druck} = \frac{Fae}{I} - \frac{F}{A} \leq \sigma_{dul}$$



Druck und Biegung

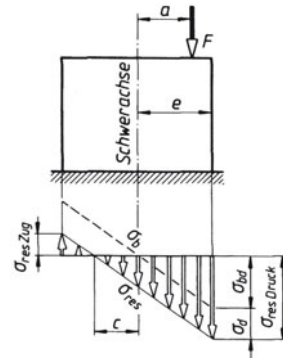
resultierende Druckspannung $\sigma_{res\ Druck}$ und resultierende Zugspannung $\sigma_{res\ Zug}$

$$\sigma_{res\ Druck} = \sigma_d + \sigma_{bd} \quad c = \frac{i^2}{a} = \frac{I}{Aa}$$

$$\sigma_{res\ Druck} = \frac{F}{A} + \frac{Fae}{I} \leq \sigma_{dul}$$

$$\sigma_{res\ Zug} = \sigma_{bd} - \sigma_d$$

$$\sigma_{res\ Zug} = \frac{Fae}{I} - \frac{F}{A} \leq \sigma_{zul}$$

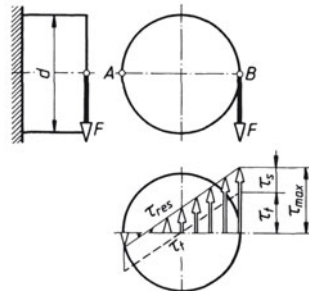


Torsion und Abschern

maximale Schubspannung τ_{max} in den Umfangspunkten B

$$\tau_{max} = \tau_s + \tau_t = \frac{16F}{3\pi d^2} + \frac{8F}{\pi d^2}$$

$$\tau_{max} = 4,24 \frac{F}{d^2}$$



Festigkeitslehre

Zusammengesetzte Beanspruchung bei ungleichartigen Spannungen

9.22 Zusammengesetzte Beanspruchung bei ungleichartigen Spannungen

Gleichzeitiges Auftreten von Normal- und Schubspannungen ergibt mehrachsigen Spannungszustand, so dass algebraische Addition (wie bei Zug/Druck und Biegung oder Torsion und Abscheren) nicht möglich ist. Es wird die Vergleichsspannung σ_v eingeführt, die unmittelbar mit dem Festigkeitskennwert des Werkstoffs bei einachsigem Spannungszustand verglichen wird und nach einer der aufgestellten Festigkeitshypothesen ermittelt werden kann.

Bei Biegung und Torsion z. B. besteht das innere Kräftesystem aus dem Biegemoment $M_b = Fx$, dem Torsionsmoment $M_T = Fr$ und der Querkraft $F_q = F$. Größte Normalspannung tritt in den Punkten A, B auf, größte Torsionsschubspannung am Kreisumfang. Querkraft-Schubspannung kann bei langen Stäben vernachlässigt werden.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_b}{W} = \frac{32Fx}{\pi d^3} = \sigma \quad \text{und} \quad \tau_{\max} = \frac{M_T}{W_p} = \frac{16Fr}{\pi d^3} = \tau$$

Maximalwerte σ und τ zur Bestimmung der Vergleichsspannung σ_v in Wellen mit Kreisquerschnitt

Dehnungshypothese (C. Bach)

$$\sigma_v = 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}$$

Diese Gleichungen gelten nur, wenn σ und τ durch gleichen Belastungsfall entstehen (z. B. beide durch wechselnde Belastung), sonst ist mit dem „Anstrengungsverhältnis α_0 “ zu rechnen.

Schubspannungshypothese (Mohr)

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}$$

Hypothese der größten Gestaltänderungsenergie

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2}$$

Anstrengungsverhältnis α_0

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{zul}}{\varphi \tau_{zul}}$$

φ ist für jede Hypothese verschieden, siehe folgende α_0 -Werte

Dehnungshypothese

$$\sigma_v = 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{zul}}{1,3 \tau_{zul}}$$

Schubspannungshypothese

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{zul}}{2 \tau_{zul}}$$

Hypothese der größten Gestaltänderungsenergie

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3(\alpha_0 \tau)^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{zul}}{1,73 \tau_{zul}}$$

Zug/Druck und Torsion

Normalspannung σ

$$\sigma = \pm \frac{F}{A}$$

Beide Spannungen zur Vergleichsspannung σ_v zusammensetzen

Schubspannung τ

$$\tau = \frac{M_T}{W_p}$$

Zug/Druck und Schub

Normalspannung σ

$$\sigma = \pm \frac{F}{A}$$

Beide Spannungen zur Vergleichs-
spannung σ_v zusammensetzen

Schubspannung τ

$$\tau = \frac{F_q}{A}$$

Biegung und Torsion

Normalspannung σ

$$\sigma = \frac{M_b}{W}$$

Beide Spannungen zur Vergleichs-
spannung σ_v zusammensetzen

Schubspannung τ

$$\tau = \frac{M_T}{W_p}$$

Vergleichsmomente M_v
und d_{erf} für Wellen mit
Kreisquerschnitt

$$M_v = \sqrt{M_b^2 + 0,75(\alpha_0 M_T)^2}$$

$\alpha_0 \approx 1,0$ – wenn σ_b und τ_t im
gleichen Belastungsfall

$$d_{\text{erf}} = 3 \sqrt{\frac{32 M_v}{\pi \sigma_{\text{bzul}}}}$$

$\alpha_0 \approx 0,7$ – wenn σ_b wechselnd (III)
und τ_t schwellend (II)
oder ruhend (I)

(Hypothese der größten
Gestaltänderungsenergie)

**9.23 Beanspruchung
durch Fliehkraft**

umlaufender Ring
Zugspannung in
Umfangsrichtung σ_t
(Tangentialspannung)

$$\sigma_t = r \omega^2 r_m^2$$

σ_t	ρ	ω	r	E	μ
$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{1}{\text{s}}$	m	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	1

Vergrößerung des
Radius Δr_m

$$\Delta r_m = \frac{r \omega^2 r_m^3}{E}$$



$$r_m = \frac{r_a + r_i}{2}$$

- ρ Dichte des Werkstoffs
- ω Winkelgeschwindigkeit
- E E-Modul (9.5)
- r_m mittlerer Radius
- s Dicke $\ll r_m$
- μ Poissonzahl (9.1)

**Umlaufende zylindrische Scheibe gleicher Dicke, Einheiten siehe
umlaufender Ring**

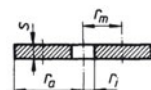
Tangentialspannung σ_t

$$\sigma_t = r \omega^2 r_a^2 \frac{3 + \mu}{8} \left[1 + \frac{r_i^2}{r_a^2} + \frac{r_i^2}{r_m^2} - \frac{(1 + 3\mu)r_m^2}{(3 + \mu)r_a^2} \right]$$

μ Poissonzahl (9.1)

Radialspannung σ_r

$$\sigma_r = r \omega^2 r_a^2 \frac{3 + \mu}{8} \left[1 + \frac{r_i^2}{r_a^2} - \frac{r_i^2}{r_m^2} - \frac{r_m^2}{r_a^2} \right]$$



Festigkeitslehre

Flächenpressung, Lochleibungsdruck, Hertz'sche Pressung

Umlaufender Hohlzylinder, Einheiten siehe umlaufender Ring

Tangentialspannung σ_t

$$\sigma_t = r \omega^2 r_m \frac{3 - 2\mu}{8(1 - \mu)} \left[1 + \frac{r_i^2}{r_a^2} + \frac{r_i^2}{r_m^2} - \frac{(1 + 2\mu)r_m^2}{(3 - 2\mu)r_a^2} \right]$$

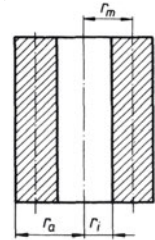
Radialspannung σ_r

$$\sigma_r = r \omega^2 r_a^2 \frac{3 - 2\mu}{8(1 - \mu)} \left[1 + \frac{r_i^2}{r_a^2} - \frac{r_i^2}{r_m^2} - \frac{r_m^2}{r_a^2} \right]$$

Axialspannung σ_x

$$\sigma_x = r \omega^2 r_a^2 \frac{2\mu}{8(1 - \mu)} \left[1 + \frac{r_i^2}{r_a^2} - 2 \frac{r_m^2}{r_a^2} \right]$$

μ Poissonzahl (9.1)

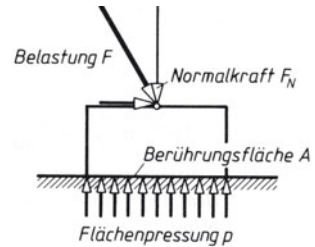


9.24 Flächenpressung, Lochleibungsdruck, Hertz'sche Pressung

Einheiten: Kraft F in N; Flächenpressung p in N/mm²
(Längen und Durchmesser in mm)

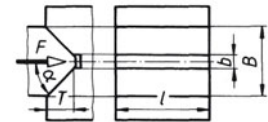
Flächenpressung p
ebener Flächen

$$p = \frac{\text{Normalkraft } F_N}{\text{Berührungsfläche } A}$$



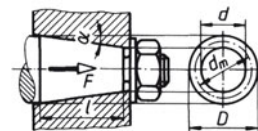
Flächenpressung p
der Prismenführung

$$p = \frac{F}{(B - b)l} = \frac{F}{2l \tan \alpha}$$



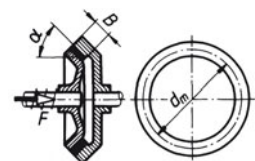
Flächenpressung p
im Kegelzapfen

$$p = \frac{4F}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{F}{\pi l d_m \tan \alpha}$$



Flächenpressung p
in Kegelkupplung

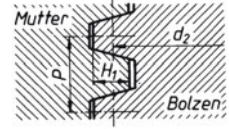
$$p = \frac{F}{\pi d_m B \sin \alpha}$$



Flächenpressung p
im Gewinde

$$p = \frac{FP}{\pi d_2 H_1 m}$$

m Mutterhöhe
 P Steigung eines Ganges



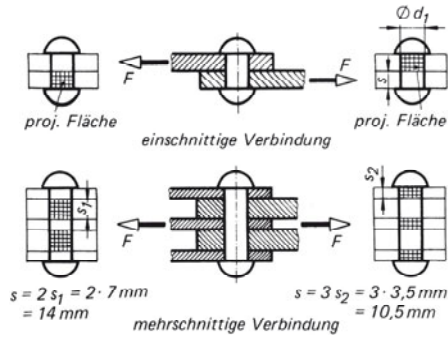
Flächenpressung p
im Gleitlager

$$p = \frac{F}{dl}$$

F Radialkraft
 d Lagerdurchmesser
 l Lagerlänge

Lochleibungsdruck $\sigma_l =$
Flächenpressung am
Nietschaft

$$\sigma_l = \frac{F_1}{d_1 s}$$



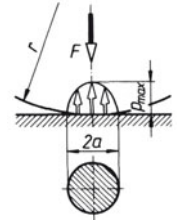
F_1 Kraft, die ein Niet zu übertragen hat; d_1 Lochdurchmesser = Durchmesser des geschlagenen Nietes; s kleinste Summe aller Blechdicken in einer Kraft-richtung.

Pressung p_{max}
Kugel gegen Ebene

$$p_{max} = \frac{1,5F}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{1,5FE^2}{r^2(1-\mu^2)}}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{1,5(1-\mu^2)Fr}{E}} = 1,11 \sqrt[3]{\frac{Fr}{E}}$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{2,25(1-\mu^2)^2 F^2}{rE^2}} = 1,23 \sqrt[3]{\frac{F^2}{rE^2}}$$



μ Poisson-Zahl (9.1); $E = 2 E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ bei unterschiedlichen Werkstoffen (9.5)

δ gesamte Annäherung beider Körper

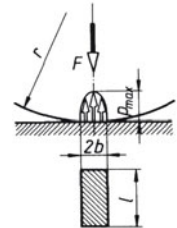
Pressung p_{max}
Kugel gegen Kugel

Gleichungen wie Kugel gegen Ebene, mit $1/r = (1/r_1) + (1/r_2)$. Für Hohlkugel ist $1/r_2$ negativ einzusetzen

Pressung p_{max}
Walze gegen Ebene

$$p_{max} = \frac{2F}{\pi b l} = \sqrt{\frac{FE}{2\pi l r (1-\mu^2)}}$$

$$b = \sqrt{\frac{8Fr(1-\mu^2)}{\pi E l}} = 1,52 \sqrt{\frac{Fr}{E l}}$$



Festigkeitslehre

Hohlzylinder unter Druck

Pressung p_{max}
Walze gegen Walze
(parallele Achsen)

Gleichungen wie Walze gegen Ebene, mit $1/r = (1/r_1) + (1/r_2)$.
Für Hohlzylinder ist $1/r_2$ negativ einzusetzen.

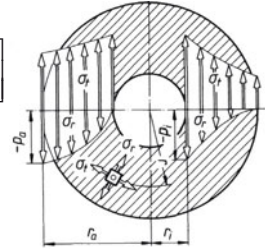
9.25 Hohlzylinder unter Druck

Radialspannung σ_r
im Abstand r

$$\sigma_r = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left[p_i \left(1 - \frac{r_a^2}{r^2} \right) + p_a \frac{r_a^2}{r_i^2} \left(-1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) \right]$$

Tangentialspannung σ_t
im Abstand r

$$\sigma_t = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left[p_i \left(1 + \frac{r_a^2}{r^2} \right) - p_a \frac{r_a^2}{r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) \right]$$



p_i Innenpressung, p_a Außenpressung

Spannung am Innenrand

$$\sigma_r = -p_i \qquad \sigma_t = \frac{p_i(r_a^2 + r_i^2) - 2p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

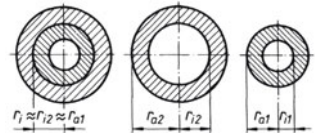
Spannung am Außenrand

$$\sigma_r = -p_a \qquad \sigma_t = \frac{2p_i r_i^2 - p_a(r_a^2 + r_i^2)}{r_a^2 - r_i^2}$$

Schrumpfmaß für
Pressverbindung

$$\frac{r_{a1} - r_{i2}}{r_i} = p \frac{1}{E} \left(\frac{r_i^2 + r_{a2}^2}{r_{a2}^2 - r_i^2} + \frac{r_i^2 + r_{i1}^2}{r_i^2 - r_{i1}^2} \right)$$

p erforderliche Pressung



10.1 Toleranzen und Passungen

Normen (Auswahl)¹⁾

DIN 323 Normzahlen und Normzahlreihen; Hauptwerte, Genauwerte, Rundwerte
 DIN 4760 Oberflächenabweichungen; Begriffe, Ordnungssystem
 DIN 4766 Herstellverfahren und Rauheit von Oberflächen, Richtlinien für Konstruktion und Fertigung
 DIN 5425 Toleranzen für den Einbau von Wälzlagern
 DIN 7150 ISO-Toleranzen und ISO-Passungen
 DIN 7154 ISO-Passungen für Einheitsbohrung
 DIN 7155 ISO-Passungen für Einheitswelle
 DIN 7157 Passungsauswahl; Toleranzfelder, Abmaße, Passtoleranzen
 DIN EN ISO 1302 Angabe der Oberflächenbeschaffenheit in der technischen Produktdokumentation
 DIN ISO 286 ISO-System für Grenzmaße und Passungen; Ersatz für DIN 7150, T1, DIN 7151, DIN 7152, DIN 7182
 DIN ISO 965 Toleranzen, Metrisches ISO-Gewinde, Grenzmaße
 DIN ISO 1101 Technische Zeichnung; Form- und Lagetolerierung; Symbole, Zeichnungseintragungen
 DIN ISO 2768 Allgemeintoleranzen

10.1.1 Normzahlen

Stufung der vier Grundreihen

Reihe	Stufensprung	Rechenwert	Genauwert	Mantisse
R 5	$q_5 = \sqrt[5]{10}$	1,58	1,5849 ...	200
R 10	$q_{10} = \sqrt[10]{10}$	1,26	1,2589 ...	100
R 20	$q_{20} = \sqrt[20]{10}$	1,12	1,1220 ...	050
R 40	$q_{40} = \sqrt[40]{10}$	1,06	1,0593 ...	025

Die Normzahlen in DIN 323 sind nach dezimal-geometrischen Reihen gestuft. Werte der „niederen Reihe“ sind denen der „höheren“ vorzuziehen.

Normzahlen

Reihe R 5	1,00	1,60	2,50	4,00	6,30	10,00						
Reihe R 10	1,00	1,25	1,60	2,00	2,50	3,15	4,00	5,00	6,30	8,00	10,00	
Reihe R 20	1,00	1,12	1,25	1,40	1,60	1,80	2,00	2,24	2,50	2,80	3,15	3,55
Reihe R40	1,00	1,06	1,12	1,18	1,25	1,32	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90
	2,00	2,12	2,24	2,36	2,50	2,65	2,80	3,00	3,15	3,35	3,55	3,75
	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00	5,30	5,60	6,00	6,30	6,70	7,10	7,50
	8,00	8,50	9,00	9,50	10,00							

Die Wurzelexponenten 5, 10, 20, 40 geben die Anzahl der Glieder im Dezimalbereich an (R5 hat 5 Glieder: 1, 1,6 2,5 4 6,3. Für Dezimalbereiche unter 1 und über 10 wird das Komma jeweils um eine oder mehrere Stellen nach links oder rechts verschoben. Die Zahlen sind gerundete Werte.

¹⁾ Ausführlich im Internet unter www.beuth.de

Maschinenelemente

Toleranzen und Passungen

10.1.2 Grundbegriffe zu Toleranzen und Passungen

Toleranzeinheit i

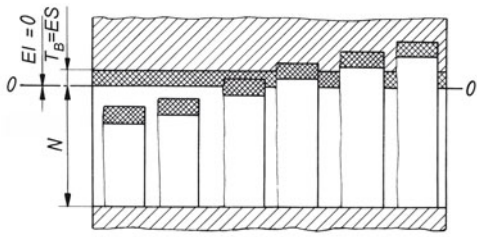
$$i = 0,45 \sqrt[3]{D} + 0,001 D$$

$$D = \sqrt{D_1 D_2}$$

i	D
μm	mm

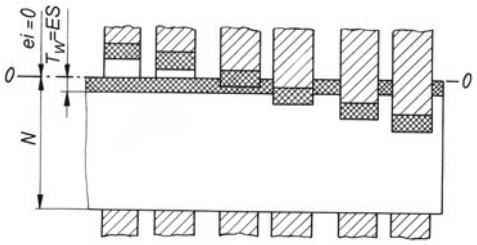
D geometrisches Mittel des Nennmaßbereichs nach Tabelle „Grundtoleranzen“

Passungssystem Einheitsbohrung (EB)
Kennzeichen: Die Bohrung hat das obere Abmaß Null ($EI = 0$).



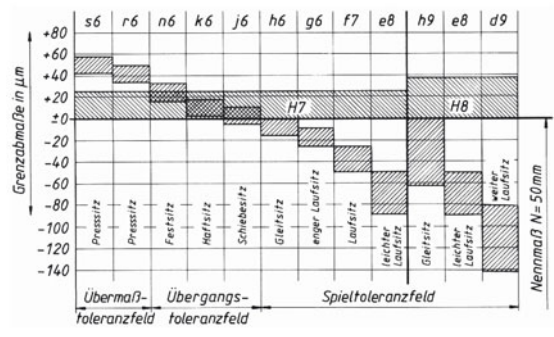
Alle Bohrungsmaße haben das Grundabmaß H . Erforderliche Passungen ergeben sich durch verschiedene Toleranzfeldlagen der Wellen und der oberen Abmaße (ES) der Bohrungen.

Passungssystem Einheitswelle (EW)
Kennzeichen: Die Welle hat das obere Abmaß Null ($EI = 0$).



Alle Wellenmaße haben das Grundabmaß h . Erforderliche Passungen ergeben sich durch verschiedene Toleranzfeldlagen der Bohrungen und der unteren Abmaße (ei) der Wellen.

Passungsauswahl (Toleranzfeldauswahl) im System EB für Nennmaß 50 mm

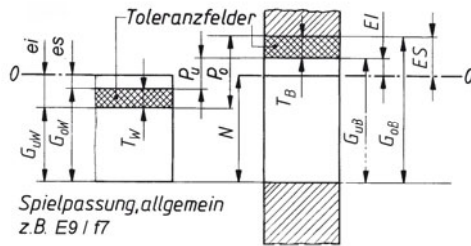


Bezeichnungen

N Nennmaß, G_o Höchstmaß, G_u Mindestmaß, I Istmaß, ES , es oberes Grenzabmaß, EI , ei unteres Grenzabmaß, T Maßtoleranz, P_s Spiel, P_u Übermaß.

E , e , ES , EI , ei sind die französischen Bezeichnungen mit der Bedeutung: E (Abstand, *écart*), ES (oberer Abstand, *écart supérieur*), EI (unterer Abstand, *écart inférieur*). Große Buchstaben für Bohrungen (Innenmaße), kleine für Wellen (Außenmaße).

Darstellung der wichtigsten Passungsgrundbegriffe an Welle und Bohrung



Abmaße, Grenzmaße, Toleranzen

	Bohrung	Welle
Nennmaß	N	N
oberes Grenzabmaß	$ES = G_{oB} - N$	$es = G_{oW} - N$
unteres Grenzabmaß	$EI = G_{uB} - N$	$ei = G_{uW} - N$
Höchstmaß G_o	$G_{oB} = N + ES$	$G_{oW} = N + es$
Mindestmaß G_u	$G_{uB} = N + EI$	$G_{uW} = N + ei$
Toleranz T	$T_B = ES - EI$ $T_B = G_{oB} - G_{uB}$	$T_W = es - ei$ $T_W = G_{oW} - G_{uW}$

Passungsarten

Spielpassung

$$P_{SM} = G_{uB} - G_{oW}$$

$$P_{SH} = G_{oB} - G_{uW}$$

Übergangspassung

$$P_{SH} = G_{oB} - G_{uW}$$

$$P_{UH} = G_{uB} - G_{oW}$$

Übermaßpassung

$$P_{UH} = G_{uB} - G_{oW}$$

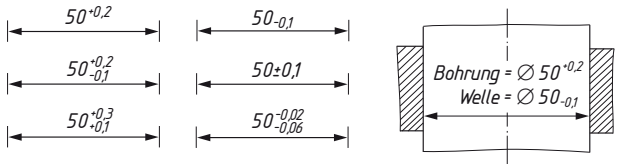
$$P_{UM} = G_{oB} - G_{uW}$$

Maschinenelemente

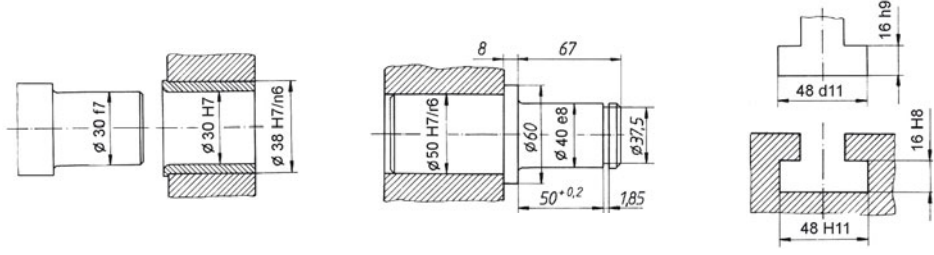
Toleranzen und Passungen

10.1.3 Eintragung von Toleranzen in Zeichnungen

Eintragung von Grenzabmaßen



Eintragung von Toleranzklassen



10.1.4 Grundtoleranzen der Nennmaßbereiche in µm

Qualität	ISO Toleranz	Nennmaßbereich in mm														Toleranzen in <i>i</i>
		über 1	über 3	über 6	über 10	über 19	über 30	über 50	über 80	über 120	über 180	über 250	über 315	über 400		
		bis 3	bis 6	bis 10	bis 18	bis 30	bis 50	bis 80	bis 120	bis 180	bis 250	bis 315	bis 400	bis 500		
01	IT 01	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,6	0,8	1	1,2	2	2,5	3	4		
0	IT 0	0,5	0,6	0,6	0,8	1	1	1,2	1,5	2	3	4	5	6		
1	IT 1	0,8	1	1	1,2	1,5	1,5	2	2,5	3,5	4,5	6	7	8		
2	IT 2	1,2	1,5	1,5	2	2,5	2,5	3	4	5	7	8	9	10	-	
3	IT 3	2	0,5	2,5	3	4	4	5	6	8	10	12	13	15	-	
4	IT 4	3	4	4	5	6	7	8	10	12	14	16	18	20	-	
5	IT 5	4	5	6	8	9	11	13	15	18	20	23	25	27	≈ 7	
6	IT 6	6	8	9	11	13	16	19	22	25	29	32	36	40	10	
7	IT 7	10	12	15	18	21	25	30	35	40	46	52	57	63	16	
8	IT 8	14	18	22	27	33	39	46	54	63	72	81	89	97	25	
9	IT 9	25	30	36	43	52	62	74	87	100	115	130	140	155	40	
10	IT 10	40	48	58	70	84	100	120	140	160	185	210	230	250	64	
11	IT 11	60	75	90	110	130	160	190	220	250	290	320	360	400	100	
12	IT 12	90	120	150	180	210	250	300	350	400	460	520	570	630	160	
13	IT 13	140	180	220	270	330	390	460	540	630	720	810	890	970	250	
14	IT 14	250	300	360	430	520	620	740	870	1 000	1 150	1 300	1 400	1 550	400	
15	IT 15	400	480	580	700	840	1 000	1 200	1 400	1 600	1 850	2 100	2 300	2 500	640	
16	IT 16	600	750	900	1 100	1 300	1 600	1 900	2 200	2 500	2 900	3 200	3 600	4 000	1 000	
17	IT 17	-	-	1 500	1 800	2 100	2 500	3 000	3 500	4 000	4 600	5 200	5 700	6 300	1 600	
18	IT 18	-	-	-	2 700	3 300	3 900	4 600	5 400	6 300	7 200	8 100	8 900	9 700	2 500	

10.1.5 Allgemeintoleranzen für Längenmaße nach DIN ISO 2768-1

Toleranzklassen	Grenzabmaße in mm für Nennmaßbereiche							
	0,5 bis 3	über 3 bis 6	über 6 bis 30	über 30 bis 120	über 120 bis 400	über 400 bis 1000	über 1000 bis 2000	über 2000 bis 4000
f fein	± 0,05	± 0,05	± 0,1	± 0,15	± 0,2	± 0,3	± 0,5	–
m mittel	± 0,1	± 0,1	± 0,2	± 0,3	± 0,5	± 0,8	± 1,2	± 2
c grob	± 0,2	± 0,3	± 0,5	± 0,8	± 1,2	± 2	± 3	± 4
v sehr grob	–	± 0,5	± 1	± 1,5	± 2,5	± 4	± 6	± 8

10.1.6 Allgemeintoleranzen für Winkelmaße nach DIN ISO 2768-1

Toleranzklassen	Grenzabmaße in Grad und Minuten für Nennmaßbereiche in mm (kürzere Schenkel)				
	bis 10	über 10 bis 50	über 50 bis 120	über 120 bis 400	über 400
f fein	± 1°	± 0° 30'	± 0° 20'	± 0° 10'	± 0° 5'
m mittel	± 1°	± 0° 30'	± 0° 20'	± 0° 10'	± 0° 5'
c grob	± 1° 30'	± 1°	± 0° 30'	± 0° 15'	± 0° 10'
v sehr grob	± 3°	± 2°	± 1°	± 0° 30'	± 0° 20'

10.1.7 Allgemeintoleranzen für Fasen und Rundungshalbmesser nach DIN ISO 2768-1

Toleranzklassen	Grenzabmaße in mm für Nennmaßbereiche		
	0,5 bis 3	über 3 bis 6	über 6
f fein	± 0,2	± 0,5	± 1
m mittel			
c grob	± 0,4	± 1	± 2
v sehr grob			

10.1.8 Allgemeintoleranzen für Form und Lage nach DIN ISO 2768-2

Toleranzklassen	Toleranzen in mm für												
	Geradheit / Ebenheit					Rechtwinkligkeit				Symmetrie			
	bis 10	über 10 bis 30	über 30 bis 100	über 100 bis 300	über 300 bis 1000	bis 100	über 100 bis 300	über 300 bis 1000	über 1000 bis 3000	bis 100	über 100 bis 300	über 300 bis 1000	über 1000 bis 3000
H	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,2	0,3	0,4	0,5	0,5			
K	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,4	0,6	0,8	1	0,6		0,8	1
L	0,1	0,2	0,4	0,8	1,2	0,6	1	1,5	2	0,6	1	1,5	2

Maschinenelemente


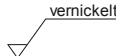
Toleranzen und Passungen

10.1.9 Symbole für Form- und Lagetoleranzen nach DIN ISO 1101

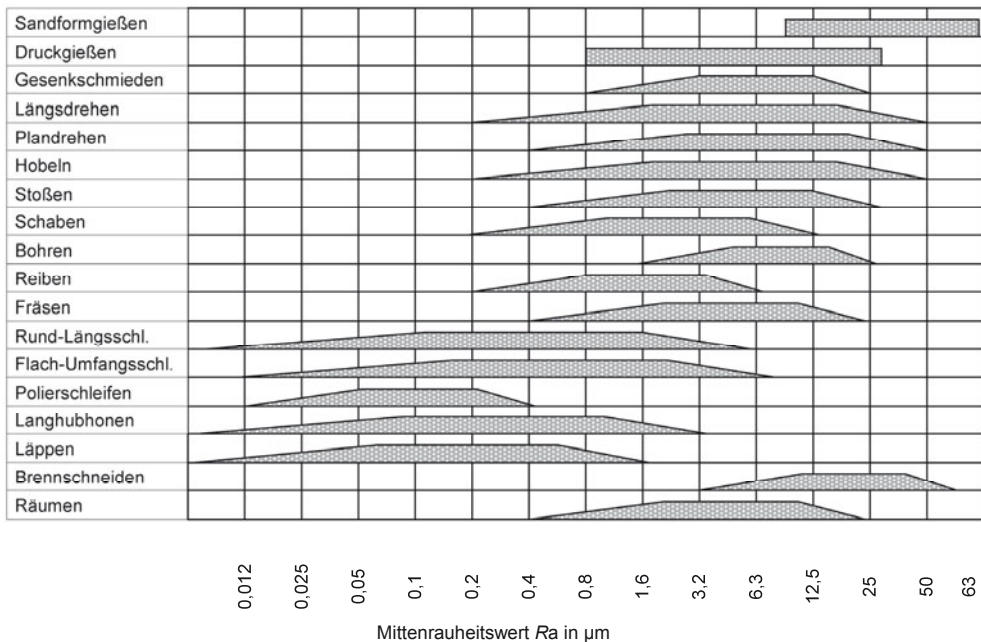
Formtoleranzen					
Eigenschaft	Symbol	Toleranz	Abweichung	Definition	Beispiel
Geradheit		t_G	f_G	Die tolerierte Achse eines zylindrischen Bauteils muss innerhalb eines Zylinders vom Durchmesser $t_G = 0,02$ mm liegen.	
Ebenheit		t_E	f_E	Die tolerierte Fläche muss zwischen zwei parallelen Ebenen vom Abstand $t_E = 0,09$ mm liegen.	
Rundheit		t_K	f_K	Die Umfangslinie jedes Querschnittes muss in einem Kreisring mit der Breite $f_K = 0,05$ mm liegen	
Zylindrizität		t_Z	f_Z	Die tolerierte Fläche muss zwischen zwei koaxialen Zylindern mit dem radialen Abstand $t_Z = 0,5$ mm liegen.	
Linienprofil		t_{LP}	f_{LP}	Die tolerierte Fläche muss zwischen zwei Hülllinien mit dem Abstand $f_{LP} = 0,1$ mm liegen	
Flächenprofil		t_{FP}	f_{FP}	Die tolerierte Fläche muss zwischen zwei kugelförmigen Hüllflächen mit dem Abstand $f_{FP} = 0,17$ mm liegen.	

Lagetoleranzen					
Eigenschaft	Symbol	Toleranz	Abweichung	Definition	Beispiel
Parallelität		t_P	f_P	Die tolerierte Fläche muss zwischen zwei zur Bezugsfläche parallelen Ebenen vom Abstand $t_P = 0,05$ mm liegen.	
Rechtwinkligkeit		t_R	f_R	Die tolerierte Fläche muss zwischen zwei parallelen und zur Bezugsfläche A rechtwinkligen Ebenen vom Abstand $t_R = 0,2$ mm liegen.	
Neigung		t_N	f_N	Die tolerierte Fläche muss zwischen zwei parallelen und zur Bezugsfläche A im geometrisch idealen Winkelgeneigten Ebenen vom Abstand $f_N = 0,4$ mm liegen.	
Position		t_{PS}	f_{PS}	Die tolerierte Achse einer Bohrung muss innerhalb eines Zylinders vom Durchmesser $t_{PS} = 0,05$ mm liegen, dessen Achsen sich am geometrisch idealen Ort befinden.	
Koaxialität, Achsabweichung		t_{KO}	f_{KO}	Die Achse des großen Durchmessers muss in einem zur Bezugsfläche A koaxialen Zylinder vom Durchmesser $f_{KO} = 0,02$ mm liegen.	
Symmetrie		t_S	f_S	Die Mittelachse z. B. einer Nut muss zwischen zwei parallelen Ebenen vom Abstand $t_S = 0,5$ mm liegen, die symmetrisch zur Mittelebene der Bezugsfläche A angeordnet sind.	
Rundlauf, Planlauf		t_L	f_L	Bei Drehung um die Bezugsachse darf die Rundlaufabweichung in jeder rechtwinkligen Messebene $f_L = 0,08$ mm nicht überschreiten. Diese Toleranz ist die Summe aus Rundheits- und Koaxialitätstoleranz.	
Gesamtlauf		t_{LG}	f_{LG}	Bei mehrmaliger Drehung um die Bezugsachse und axialer Verschiebung zwischen Werkstück und Messgerät müssen alle Messpunkte innerhalb der Gesamtrundlauf-toleranz von $f_{LG} = 0,25$ mm liegen.	

10.1.10 Kennzeichnung der Oberflächenbeschaffenheit nach DIN EN ISO 1302

Symbol	Definition	Symbol	Definition									
✓	Grundsymbol ; Angabe der Oberflächenbeschaffenheit.	e ✓	Bearbeitungszugabe									
✓	spanend bearbeitete Oberfläche	a ✓	höchstzulässiger Rauheitswert R_a in μm									
✓ _⊥	spanende Bearbeitung nicht zugelassen oder Zustand des vorangegangenen Arbeitsganges belassen	✓ _⊥	Rillenrichtung rechtwinklig zur Projektionsebene									
a ₁ a ₂ ✓	Größt- und Kleinstwert Rauheit a_1 und a_2		a Rauheitswert R_a oder Rauheitsklassen N									
	Verfahren der Herstellung oder Oberflächenbehandlung		b Oberflächenbehandlung oder Fertigungsverfahren									
			c Bezugsstrecke									
			d Rillenrichtung									
			e Bearbeitungszugabe									
Rauheitsklasse N	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5	N 6	N 7	N 8	N 9	N 10	N 11	N 12
Rauheitswert R_a in μm	0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2	6,3	12,5	25	50

10.1.11 Mittenrauheitswerte R_a in μm



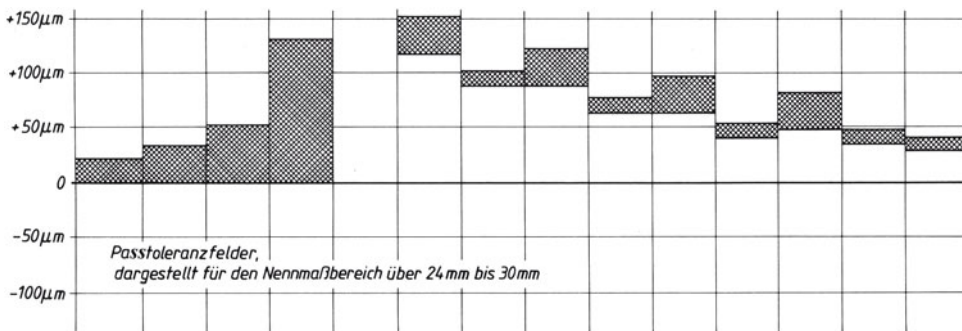
Maschinenelemente

Toleranzen und Passungen

10.1.12 Verwendungsbeispiele für Passungen

Passungsbezeichnung	Kennzeichnung, Verwendungsbeispiele, sonstige Hinweise
H 8 / x 8 H 7 / s 6 H 7 / r 6	Übermaß- und Übergangstoleranzfelder Teile unter großem Druck mit Presse oder durch Erwärmen/Kühlen ffügbar (Presssitz); Bronzkränze auf Zahnradkörpern, Lagerbuchsen in Gehäusen, Radnaben, Hebelnaben, Kupplungen auf Wellenenden; zusätzliche Sicherung gegen Verdrehen nicht erforderlich.
H 7 / n 6	Teile unter Druck mit Presse ffügbar (Festsitz); Radkränze auf Radkörpern, Lagerbuchsen in Gehäusen und Radnaben, Laufräder auf Achsen, Anker auf Motorwellen, Kupplungen und Wellenenden; gegen Verdrehen sichern.
H 7 / k 6	Teile leicht mit Handhammer ffügbar (Haftsitz); Zahnräder, Riemenscheiben, Kupplungen, Handräder, Bremsscheiben auf Wellen; gegen Verdrehen zusätzlich sichern.
H 7 / j 6	Teile mit Holzhammer oder von Hand ffügbar (Schiebesitz); für leicht ein- und auszubauende Zahnräder, Riemenscheiben, Handräder, Buchsen; gegen Verdrehen zusätzlich sichern.
	Spieltoleranzfelder
H 7 / h 6 H 8 / h 9	Teile von Hand noch verschiebbar (Gleitsitz); für gleitende Teile und Führungen, Zentrierflansche, Wechselräder, Stellringe, Distanzhülsen.
H 7 / g 6 G 7 / h 6	Teile ohne merkliches Spiel verschiebbar (Enger Laufsitz); Wechselräder, verschiebbare Räder und Kupplungen.
H 7 / f 7	Teile mit merklichem Spiel beweglich (Laufsitz); Gleitlager allgemein, Hauptlager an Werkzeugmaschinen, Gleitbuchsen auf Wellen.
H 7 / e 8 H 8 / e 8 E 9 / h 9	Teile mit reichlichem Spiel (Leichter Laufsitz); mehrfach gelagerte Welle (Gleitlager), Gleitlager allgemein, Hauptlager für Kurbelwellen, Kolben in Zylindern, Pumpenlager, Hebellagerungen.
H 8 / d 9 F 8 / h 9 D 10 / h 9 D 10 / h 11	Laufsitz: Teile mit sehr reichlichem Spiel (Weiter Laufsitz); Transmissionslager, Lager für Landmaschinen, Stopfbuchsenteile, Leerlauf Scheiben.

10.1.13 Ausgewählte Passtoleranzfelder und Grenzabmaße (in μm) für das System Einheitsbohrung (H)

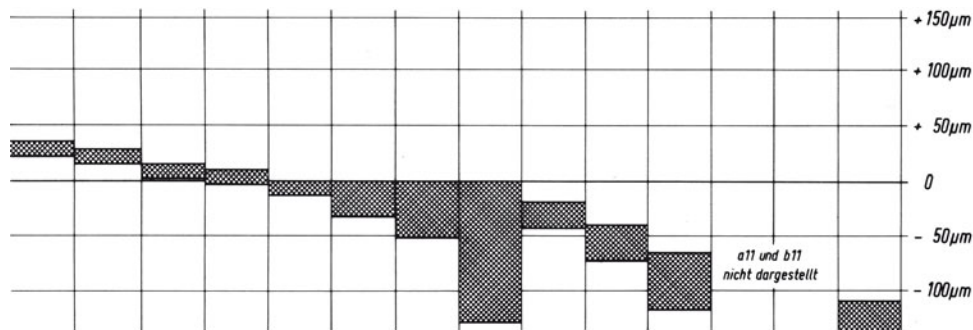


Nennmaßbereich mm	H 7	H 8	H 9	H 11	za 6	za 8	z 6	z 8	x 6	x 8	$\frac{u 6^1}{t 6}$	u 8	s 6	r 6
über 1 bis 3	+10 0	+14 0	+25 0	+60 0	+38 +32	–	+32 +26	+40 +26	+26 +20	+34 +20	+24 +18	–	+20 +14	+16 +10
über 3 bis 6	+12 0	+18 0	+30 0	+75 0	+50 +42	–	+43 +35	+53 +35	+36 +28	+46 +28	+31 +23	–	+27 +19	+23 +15
über 6 bis 10	+15 0	+22 0	+36 0	+90 0	+61 +52	+74 +52	+51 +42	+64 +42	+43 +34	+56 +34	+37 +28	–	+32 +23	+28 +19
über 10 bis 14	+18 0	+27 0	+43 0	+110 0	+75 +64	+91 +64	+61 +50	+77 +50	+51 +40	+67 +40	+51 +40	–	+39 +28	+34 +23
über 14 bis 18					+88 +77	+104 +77	+71 +60	+87 +60	+56 +45	+72 +45	+33			
über 18 bis 24	+21 0	+33 0	+52 0	+130 0	–	+131 +98	+86 +73	+106 +73	+67 +54	+87 +41	+54 +41	–	+48 +35	+41 +28
über 24 bis 30						+151 +118	+101 +88	+121 +77	+97 +64	+97 +41	+54 +48	+81 +48		
über 30 bis 40	+25 0	+39 0	+62 0	+160 0	–	+187 +148	+128 +112	+151 +112	+96 +80	+119 +80	+64 +48	+99 +60	+59 +43	+50 +34
über 40 bis 50						+219 +180	–	+175 +136	+113 +97	+136 +97	+70 +54	+109 +70	+43	
über 50 bis 65	+30 0	+46 0	+74 0	+190 0	–	+272 +226	–	+218 +172	+141 +122	+168 +122	+85 +66	+133 +87	+72 +53	+60 +41
über 65 bis 80						+320 +274	–	+256 +210	+165 +146	+192 +146	+94 +75	+148 +102	+78 +59	+62 +43
über 80 bis 100	+35 0	+54 0	+87 0	+220 0	–	+389 +335	–	+312 +258	+200 +178	+232 +178	+113 +91	+178 +124	+93 +71	+73 +51
über 100 bis 120						–	–	+364 +310	+232 +210	+264 +210	+126 +104	+198 +144	+101 +79	+76 +54
über 120 bis 140								+428 +365	+273 +248	+311 +248	+147 +122	+233 +170	+117 +92	+88 +63
über 140 bis 160	+40 0	+63 0	+100 0	+250 0	–	–	–	+478 +415	+305 +280	+343 +280	+159 +134	+253 +190	+125 +100	+90 +65
über 160 bis 180								–	+335 +310	+373 +310	+171 +146	+273 +210	+133 +108	+93 +68
über 180 bis 200									+379 +350	+422 +350	+195 +166	+308 +236	+151 +122	+106 +77
über 200 bis 225	+46 0	+72 0	+115 0	+290 0	–	–	–		+414 +385	+457 +385	–	+330 +258	+159 +130	+109 +80
über 225 bis 250									+454 +425	+497 +425	–	+356 +284	+169 +140	+113 +84
über 250 bis 280	+52 0	+81 0	>130 0	+320 0	–	–	–		+507 +475	+556 +475	–	+396 +315	+190 +158	+126 +94
über 280 bis 315									+557 +525	+606 +525	–	+431 +350	+202 +170	+130 +98
über 315 bis 355	+57 0	+89 0	+140 0	+360 0	–	–	–		+626 +590	+679 +590	–	+479 +390	+226 +190	+144 +108
über 355 bis 400									+696 +660	–	–	+524 +435	+244 +208	+150 +114

1) u 6 bei Nennmaß bis 24 mm, t 6 darüber

Maschinenelemente Toleranzen und Passungen

Fortsetzung 10.1.13



p 6	n 6	k 6	j 6	h 6	h 8	h 9	h 11	f 7	e 8	d 9	a 11	b 11	c 11	Nennmaß bereich mm
+12 + 6	+10 + 4	+ 6 0	+ 4 - 2	0 - 6	0 -14	0 - 25	0 - 60	- 6 - 16	- 14 - 28	- 20 - 45	- 270 - 330	- 140 - 200	- 60 - 120	über 1 bis 3
+20 +12	+16 + 8	+ 9 + 1	+ 6 - 2	0 - 8	0 -18	0 - 30	0 - 75	- 10 - 22	- 20 - 38	- 30 - 60	- 270 - 345	- 140 - 215	- 70 - 145	über 3 bis 6
+24 +15	+19 +10	+10 + 1	+ 7 - 2	0 - 9	0 -22	0 - 36	0 - 90	- 13 - 28	- 25 - 47	- 40 - 76	- 280 - 370	- 150 - 240	- 80 - 170	über 6 bis 10
+29 +18	+23 +12	+12 + 1	+ 8 - 3	0 -11	0 -27	0 - 43	0 -110	- 16 - 34	- 32 - 59	- 50 - 93	- 290 - 400	- 150 - 260	- 95 - 205	über 10 bis 14 über 14 bis 18
+35 +22	+28 +15	+15 + 2	+ 9 - 4	0 -13	0 -33	0 - 52	0 -130	- 20 - 41	- 40 - 73	- 65 -117	- 300 - 430	- 160 - 290	- 110 - 240	über 18 bis 24 über 24 bis 30
+42 +26	+33 +17	+18 + 2	+11 - 5	0 -16	0 -39	0 - 62	0 -160	- 25 - 50	- 50 - 89	- 80 -142	- 310 - 470	- 170 - 330	- 120 - 280	über 30 bis 40
											- 320	- 180	- 130	über 40 bis 50
											- 480	- 340	- 290	
											- 340	- 190	- 140	über 50 bis 65
											- 530	- 380	- 330	
											- 360	- 200	- 150	über 65 bis 80
											- 550	- 390	- 340	
											- 380	- 220	- 170	über 80 bis 100
											- 600	- 440	- 390	
											- 410	- 240	- 180	über 100 bis 120
											- 630	- 460	- 400	
											- 460	- 260	- 200	über 120 bis 140
											- 710	- 510	- 450	
											- 520	- 280	- 210	über 140 bis 160
											- 770	- 530	- 460	
											- 580	- 310	- 230	über 160 bis 180
											- 830	- 560	- 480	
											- 660	- 340	- 240	über 180 bis 200
											- 950	- 630	- 530	
											- 740	- 380	- 260	über 200 bis 225
											- 1030	- 670	- 550	
											- 820	- 420	- 280	über 225 bis 250
											- 1110	- 710	- 570	
											- 920	- 480	- 300	über 250 bis 280
											- 1240	- 800	- 620	
											- 1050	- 540	- 330	über 280 bis 315
											- 1370	- 860	- 650	
											- 1200	- 600	- 360	über 315 bis 355
											- 1560	- 900	- 720	
											- 1350	- 680	- 400	über 355 bis 400
											- 1710	- 1040	- 760	

10.1.14 Passungsauswahl, empfohlene Passtoleranzen, Spiel-, Übergangs- und Übermaßtoleranzfelder in µm nach DIN ISO 286

Passung Nennmaß- bereich mm	H8/x8 u 8 1)	H 7 s 6	H 7 r 6	H 7 n 6	H 7 k 6	H 7 j 6	H 7 h 6	H 8 h 9	H 11 h 9	H 11 h 11	G7 H7 h 6 g 6
über 1 bis 3	- 6	- 4	- 0	+ 6	-	+12	+16	+ 39	+ 85	+ 120	+ 18
	- 34	- 20	- 16	-10		- 4	0	0	0	0	+ 2
über 3 bis 6	- 10	- 7	- 3	+ 4	-	+13	+20	+ 48	+ 105	+ 150	+ 24
	- 46	- 27	- 23	-16		- 7	0	0	0	0	+ 4
über 6 bis 10	- 12	- 8	- 4	+ 5	+14	+17	+24	+ 58	+ 126	+ 180	+ 29
	- 56	- 32	- 28	-19	-10	- 7	0	0	0	0	+ 5
über 10 bis 14	- 13	- 10	- 5	+ 6	+17	+21	+29	+ 70	+ 153	+ 220	+ 35
	- 67	- 39	- 34	-23	-12	- 8	0	0	0	0	+ 6
über 14 bis 18	- 18										
	- 72										
über 18 bis 24	- 21	- 14	- 7	+ 6	+19	+25	+34	+ 85	+ 182	+ 260	+ 41
	- 87	- 48	- 41	-28	-15	- 9	0	0	0	0	+ 7
über 24 bis 30	- 15										
	- 81										
über 30 bis 40	- 21	- 18	- 9	+ 8	+23	+30	+41	+ 101	+ 222	+ 320	+ 50
	- 99	- 59	- 50	-33	-18	-11	0	0	0	0	+ 9
über 40 bis 50	- 31										
	-109										
über 50 bis 65	- 41	- 23	- 11	+ 10	+28	+37	+49	+ 120	+ 264	+ 380	+ 59
	-133	- 72	- 60	+10	+28	+37	+49	+ 120	+ 264	+ 380	+ 59
über 65 bis 80	- 56	- 29	- 13	-39	-21	-12	0	0	0	0	+ 10
	-148	- 78	- 62								
über 80 bis 100	- 70	- 36	- 16	+ 12	+32	+44	+57	+ 141	+ 307	+ 440	+ 69
	-178	- 93	- 73	+12	+32	+44	+57	+ 141	+ 307	+ 440	+ 69
über 100 bis 120	- 90	- 44	- 19	-45	-25	-13	0	0	0	0	+ 12
	-198	-101	- 76								
über 120 bis 140	-107	- 52	- 23								
	-233	-117	- 88								
über 140 bis 160	-127	- 60	- 25	+ 13	+37	+51	+65	+ 163	+ 350	+ 500	+ 79
	-253	-125	- 90	+13	+37	+51	+65	+ 163	+ 350	+ 500	+ 79
über 160 bis 180	-147	- 68	- 28								
	-273	-133	- 93								
über 180 bis 200	-164	- 76	- 31								
	-308	-151	-106								
über 200 bis 225	-186	- 84	- 34	+ 15	+42	+59	+75	+ 187	+ 405	+ 580	+ 90
	-330	-159	-109	+15	+42	+59	+75	+ 187	+ 405	+ 580	+ 90
über 225 bis 250	-212	- 94	- 38	-60	-33	-16	0	0	0	0	+ 15
	-356	-169	-113								
über 250 bis 280	-234	-106	- 42	+ 18	+48	+68	+84	+ 211	+ 450	+ 640	+ 101
	-396	-190	-126	+18	+48	+68	+84	+ 211	+ 450	+ 640	+ 101
über 280 bis 315	-269	-118	- 46	-66	-36	-16	0	0	0	0	+ 17
	-431	-202	-130								
über 315 bis 355	-301	-133	- 51	+ 20	+53	+75	+93	+ 229	+ 500	+ 720	+ 111
	-479	-226	-144	+20	+53	+75	+93	+ 229	+ 500	+ 720	+ 111
über 355 bis 400	-346	-151	- 57	-73	-40	-18	0	0	0	0	+ 18
	-524	-244	-150								

1) bis Nennmaß 24 mm: x 8; über 24 mm Nennmaß: u 8

Maschinenelemente

Toleranzen und Passungen

Fortsetzung 10.1.14

H 7 f 7	F 8 h 6	H 8 f 7	F 8 h 9	H 8 e 8	E 9 h 9	H 8 d 9	D 10 h 9	H 11 d 9	D 10 h 11	C 11 h 9	C 11 H 11 h 11 c 11	A 11 H 11 h 11 a 11
+ 26 + 6 + 34 + 10 + 43 + 13	+ 28 + 6 + 36 + 10 + 44 + 13	+ 30 + 6 + 40 + 10 + 50 + 13	+ 47 + 6 + 58 + 10 + 71 + 13	+ 42 + 14 + 56 + 20 + 69 + 25	+ 64 + 14 + 80 + 20 + 97 + 25	+ 59 + 20 + 78 + 30 + 98 + 40	+ 85 + 20 + 108 + 30 + 134 + 40	+ 105 + 20 + 135 + 30 + 166 + 40	+ 120 + 20 + 153 + 30 + 188 + 40	+ 145 + 60 + 175 + 70 + 206 + 80	+ 180 + 60 + 220 + 70 + 260 + 80	+ 390 + 270 + 420 + 270 + 460 + 280
+ 52 + 16	+ 54 + 16	+ 61 + 16	+ 86 + 16	+ 86 + 32	+ 118 + 32	+ 120 + 50	+ 163 + 50	+ 203 + 50	+ 230 + 50	+ 248 + 95	+ 315 + 95	+ 510 + 290
+ 62 + 20	+ 66 + 20	+ 74 + 20	+ 105 + 20	+ 106 + 40	+ 144 + 40	+ 150 + 65	+ 201 + 65	+ 247 + 65	+ 279 + 65	+ 292 + 110	+ 370 + 110	+ 560 + 300
+ 75 + 25	+ 80 + 25	+ 89 + 25	+ 126 + 25	+ 128 + 50	+ 174 + 50	+ 181 + 80	+ 242 + 80	+ 302 + 80	+ 340 + 80	+ 342 + 120 + 352 + 130	+ 440 + 120 + 450 + 130	+ 630 + 310 + 640 + 320
+ 90 + 30	+ 95 + 30	+ 106 + 30	+ 150 + 30	+ 152 + 60	+ 208 + 60	+ 220 + 100	+ 294 + 100	+ 364 + 100	+ 410 + 100	+ 404 + 140 + 414 + 150	+ 520 + 140 + 530 + 150	+ 720 + 340 + 740 + 360
+ 106 + 36	+ 112 + 36	+ 125 + 36	+ 177 + 36	+ 180 + 72	+ 246 + 72	+ 261 + 120	+ 347 + 120	+ 427 + 120	+ 480 + 120	+ 477 + 170 + 487 + 180	+ 610 + 170 + 620 + 180	+ 820 + 380 + 850 + 410
+ 123 + 43	+ 131 + 43	+ 146 + 43	+ 206 + 43	+ 211 + 85	+ 285 + 85	+ 308 + 145	+ 405 + 145	+ 495 + 145	+ 555 + 145	+ 550 + 200 + 560 + 210 + 580 + 230	+ 700 + 200 + 710 + 210 + 730 + 230	+ 960 + 460 + 1020 + 520 + 1080 + 580
+ 142 + 50	+ 151 + 50	+ 168 + 50	+ 237 + 50	+ 244 + 100	+ 330 + 100	+ 357 + 170	+ 470 + 170	+ 575 + 170	+ 645 + 170	+ 645 + 240 + 665 + 260 + 685 + 280	+ 820 + 240 + 840 + 260 + 860 + 280	+ 1240 + 660 + 1320 + 740 + 1400 + 820
+ 160 + 56	+ 169 + 56	+ 189 + 56	+ 267 + 56	+ 272 + 110	+ 370 + 110	+ 401 + 190	+ 530 + 190	+ 640 + 190	+ 720 + 190	+ 750 + 300 + 780 + 330	+ 940 + 300 + 970 + 330	+ 1560 + 920 + 1690 + 1050
+ 176 + 62	+ 187 + 62	+ 208 + 62	+ 291 + 62	+ 303 + 123	+ 405 + 125	+ 439 + 210	+ 580 + 210	+ 710 + 210	+ 800 + 210	+ 860 + 360 + 900 + 400	+ 1080 + 360 + 1120 + 400	+ 1920 + 1200 + 2070 + 1350

10.2 Schraubenverbindungen

Normen (Auswahl) und Bezugsliteratur

- DIN 13 Metrisches ISO-Gewinde
- DIN 74 Senkungen
- DIN 78 Gewindeenden, Schraubenüberstände
- DIN 103 Metrisches ISO-Trapezgewinde
- DIN 475 Schlüsselweiten
- VDI-Richtlinie 2230; Systematische Berechnung hoch beanspruchter Schraubenverbindungen, Feb. 2003. Die Richtlinie enthält eine ausführliche Liste wichtiger Bezugsliteratur.

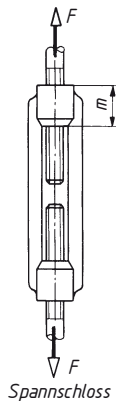
10.2.1 Berechnung axial belasteter Schrauben ohne Vorspannung

Erforderlicher Spannungs-Querschnitt $A_{S\text{erf}}$ und Wahl des Gewindes nach 10.2.13 (Schraubendurchmesser d) und der Festigkeitsklasse nach 10.2.9

$$A_{S\text{erf}} \geq \frac{\alpha_A F}{0,8 \cdot R_{p0,2}}$$

$A_{S\text{erf}}$	F	$R_{p0,2}$	α_A
mm ²	N	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	1

- $A_{S\text{erf}}$ erforderlicher Spannungsquerschnitt
- F gegebene Betriebskraft
- $R_{p0,2}$ 0,2-Dehngrenze nach 10.2.9
- α_A Anziehungsfaktor s. S. 265



Zugspannung σ_z

$$\sigma_z = \frac{F}{A_S}$$

Flächenpressung im Gewinde p

$$p = \frac{F \cdot P}{\pi \cdot d_2 \cdot H_1 \cdot m} \leq p_{\text{zul}} \quad P \text{ Gewindesteigung nach 10.2.13}$$

Erforderliche Mutterhöhe m_{erf}

$$m_{\text{erf}} = \frac{F \cdot P}{\pi \cdot d_2 \cdot H_1 \cdot p_{\text{zul}}} \quad p_{\text{zul}} \text{ nach 10.2.7}$$

Ausschlagspannung σ_a bei schwingender Belastung

$$\sigma_a = \frac{F}{2A_S} \leq \sigma_A \quad \sigma_A \text{ Ausschlagfestigkeit nach 10.2.4}$$

10.2.2 Berechnung unter Last angezogener Schrauben

Erforderlicher Spannungs-Querschnitt und Wahl des Gewindes nach 10.2.13 (Schraubendurchmesser d) und der Festigkeitsklasse nach 10.2.9

$$A_{S\text{erf}} \geq \frac{F}{\nu \cdot R_{p0,2}}$$

$A_{S\text{erf}}$	F	$R_{p0,2}$
mm ²	N	$\frac{N}{\text{mm}^2}$

- $A_{S\text{erf}}$ erforderlicher Spannungsquerschnitt
- F gegebene Spannkraft
- ν Ausnutzungsgrad für die Streckgrenze R_e oder für die 0,2-Dehngrenze $R_{p0,2}$, zweckmäßig wird $\nu = 0,6 \dots 0,8$ gesetzt (Erfahrungswert)
- $R_{p0,2}$ 0,2-Dehngrenze (10.2.9)

Maschinenelemente

Schraubenverbindungen

Zugspannung σ_z

$$\sigma_z = \frac{F}{A_S}$$

Torsionsspannung τ_t

$$\tau_t = \frac{F \cdot d_2}{2 \cdot W_{ps}} \cdot \tan(\alpha + \varrho')$$

d_2 Flankendurchmesser (10.2.13)
 α Gewindesteigungswinkel (10.2.13)
 W_p polares Widerstandsmoment (10.2.13)
 ϱ' Reibungswinkel im Gewinde (10.2.4)

Vergleichsspannung σ_{red}
(reduzierte Spannung)

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_t^2} \leq 0,9 \cdot R_{p0,2}$$

Ausschlagspannung σ_a

$$\sigma_a = \frac{F}{2 \cdot A_S} \leq \sigma_A \quad \sigma_A \text{ Ausschlagfestigkeit nach 10.2.4}$$

10.2.3 Berechnung einer vorgespannten Schraubenverbindung bei axial wirkender Betriebskraft

10.2.3.1 Überschlägige Ermittlung des erforderlichen Gewindes

Überschlägige Ermittlung des erforderlichen Spannungsquerschnitts und Wahl des Gewindes

$$A_{S\text{erf}} \geq \frac{F_A}{\nu \cdot R_{p0,2}} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_{S\text{erf}} & F_A & R_{p0,2} \\ \hline \text{mm}^2 & \text{N} & \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \hline \end{array}$$

Herleitung: Es wird reine Zugspannung im Spannungsquerschnitt A_S angenommen, hervorgerufen durch die Zugkraft F_A . Die zulässige Zugspannung wird gleich dem ν -fachen der 0,2-Dehngrenze gesetzt ($\sigma_{z\text{zul}} = \nu \cdot R_{p0,2}$), sodass mit der Zughauptgleichung $\sigma_z = F_A/A_S \leq \nu \cdot R_{p0,2}$ wird.

- $A_{S\text{erf}}$ erforderlicher Spannungsquerschnitt
- F_A gegebene axiale Vorspannkraft
- ν Ausnutzungsgrad
- $R_{p0,2}$ 0,2- Dehngrenze der Schraube (10.2.9)

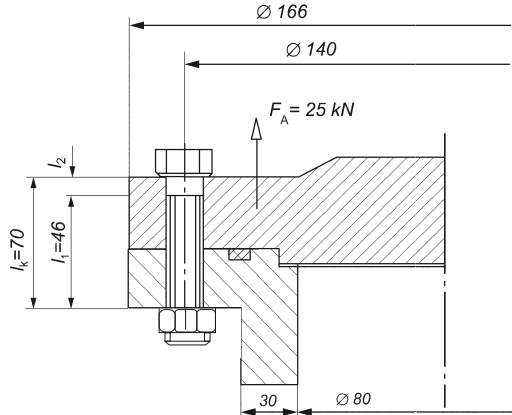
Ausnutzungsgrad ν

$\nu < 1$ gibt an, mit welchem Anteil von der Streckgrenze R_e oder der 0,2-Dehngrenze $R_{p0,2}$ die Schraube belastet werden soll, z. B.
 $\nu = 0,6 = 60\%$ von $R_{p0,2}$.

Erfahrungswerte:
 $\nu = 0,25$ bei dynamisch und exzentrisch angreifender Axialkraft F_A .
 $\nu = 0,4$ bei dynamisch und zentrisch oder statisch und exzentrisch angreifender Axialkraft F_A .
 $\nu = 0,6$ bei statisch und zentrisch angreifender Axialkraft F_A .

10.2.3.2 Berechnungs-
beispiel

Die skizzierte exzentrisch vorgespannte Verschraubung eines Hydraulik-Zylinderdeckels soll berechnet werden.



Beispiel: Zylinderdeckel-Verschraubung

Die zu übertragende größte Axialkraft je Schraube beträgt 20530 N. Beide Bauteile bestehen aus Gusseisen EN-GJS-450-10 nach DIN EN 1563 mit der Elastizitätsgrenze $R_{p0,2} = 310 \text{ MPa} = 310 \text{ N/mm}^2$. Die Schraube soll die Festigkeitsklasse 8.8 haben ($R_{p0,2} = 660 \text{ MPa}$) und mit dem Drehmomentenschlüssel angezogen werden.

Für F_A die nächsthöhere Normzahl aus R5 wählen

Normzahlen der Reihe R5:
630/1000/1600/2500/4000/6300/10000/16000/25000/40000/63000
gewählt: $F_A = 25\,000 \text{ N}$

Erforderlicher Spannungsquerschnitt

$$A_{S\text{erf}} = \frac{F_A}{v \cdot R_{p0,2}} = \frac{25000 \text{ N}}{0,4 \cdot 660 \text{ Mpa}} = 94,7 \text{ mm}^2$$

Der Ausnutzungsgrad wird für eine statisch wirkende und exzentrisch angreifende Axialkraft mit 0,4 eingesetzt (siehe oben)

Abmessungen der Schraube

Nach 10.2.13 wird das Gewinde M16 gewählt:

Gewindedurchmesser	$d = 16 \text{ mm}$
Flankendurchmesser	$d_2 = 14,701 \text{ mm}$
Steigungswinkel	$\alpha = 2,48^\circ$
Spannungsquerschnitt	$A_S = 157 \text{ mm}^2 > 94,7 \text{ mm}^2$
Schaftquerschnitt	$A = 50,201 \text{ mm}^2$
polares Widerstandsmoment	$W_{pS} = 554,9 \text{ mm}^3$
Bezeichnung der Schraube:	M8 × 80 DIN 13 – 8.8
Durchmesser der Kopfauflage	$d_w = 13 \text{ mm}$
Schraubenlänge (gewählt)	$l = 50 \text{ mm}$
Gewindelänge	$b = 22 \text{ mm}$
Durchgangsbohrung	$d_h = 9 \text{ mm}$
Kopfauflagefläche	$A_p = 69,1 \text{ mm}^2$
Außendurchmesser der verspannten Teile	$D_A = 25 \text{ mm}$

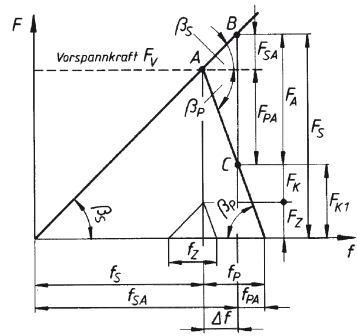
Die weiteren und umfangreicheren Rechnungen sollten mit den Unterlagen aus der VDI-Richtlinie 2230 durchgeführt werden.

Maschinenelemente

Schraubenverbindungen

10.2.4 Kräfte und Verformungen in zentrisch vorgespannten Schraubenverbindungen

Verspannungsdiagramm einer vorgespannten Schraubenverbindung nach dem Aufbringen einer axialen Betriebskraft F_A , die zentrisch an Schraubenkopf- und Mutterauflage angreift. Dann ist der Kräfteinleitungsfaktor $n = 1$. Er wird nach der VDI-Richtlinie 2230 berechnet und beschreibt den Einfluss des Einleitungsortes der Axialkraft F_A auf die Verschiebung des Schraubenkopfes.



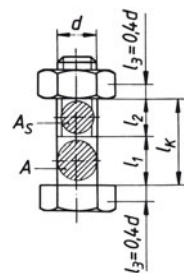
- F_V Vorspannkraft der Schraube
- F_A axiale Betriebskraft
- F_K Klemmkraft (Dichtkraft)
- F_{K1} theoretische Klemmkraft
- F_Z Vorspannkraftverlust durch Setzen während der Betriebszeit
- F_S Schraubenkraft
- F_{SA} Axialkraftanteil (Betriebskraftanteil der Schraube)
- F_{PA} Axialkraftanteil der verspannten Teile
- f_S Verlängerung der Schraube nach der Montage
- f_P Verkürzung der verspannten Teile nach der Montage
- f_{SA}, f_{PA} entsprechende Formänderungen nach Aufbringen der Betriebskraft F_A
- f_Z Setzbetrag (bleibende Verformung durch „Setzen“)
- Δf Längenänderung nach dem Aufbringen von F_A
- β_S, β_P Neigungswinkel der Kennlinie

Elastische Nachgiebigkeit δ_S einer Sechskantschraube

$$\delta_S = \frac{l_1}{A} + \frac{l_2 + 0,8 d}{A_S} \cdot \frac{1}{E_S}$$

Nach Aufbringen der Vorspannkraft F_V

$$\delta_S = \frac{f_S}{F_V} = \frac{\Delta f}{F_{SA}}$$



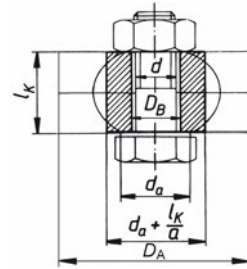
Dehnquerschnitte und Dehnlängen an der Sechskantschraube

Ersatzhohlzylinder zur Berechnung der elastischen Nachgiebigkeit δ_P der Platten und Ersatzquerschnitt (Ersatz-Hohlzylinder) A_{ers} der Platten für $d_w + l_K < D_A$

$$\delta_P = \frac{l_K}{A_{ers} \cdot E_P} = \frac{f_P}{F_V} = \frac{\Delta f}{F_{PA}} = \frac{\Delta f}{F_A - F_{SA}}$$

$$A_{ers} = \frac{\pi}{4} (d_w^2 - d_h^2) + \frac{\pi}{8} \left[\left(\frac{l_K \cdot d_w}{(l_K + d_w)^2 + 1} \right)^2 - 1 \right]$$

D_A Außendurchmesser der verspannten Platten,
 D_w Außendurchmesser der Kopfauflage, bei Sechskantschrauben Durchmesser des Telleransatzes, sonst Schlüsselweite, bei Zylinderschrauben Kopfdurchmesser,
 D_h Durchmesser der Durchgangsbohrung nach 10.2.10, l_K Klemmlänge



Ersatz-Hohlzylinder in den verspannten Platten

Axialkraftanteil F_{SA} in der Schraube

$$F_{SA} = F_A \frac{\delta_P}{\delta_P + \delta_S} \text{ und mit } \frac{\delta_P}{\delta_P + \delta_S} = \Phi$$

$$F_{SA} = \Phi F_A$$

Gleichungsentwicklung:

$$\Delta f = \delta_S F_{SA} = \delta_P (F_A - F_{SA})$$

$$\delta_S F_{SA} = \delta_P F_A - \delta_P F_{SA}$$

$$F_{SA} (\delta_S + \delta_P) = \delta_P F_A$$

Kraftverhältnis Φ

$$\Phi = \frac{\delta_P}{\delta_P + \delta_S} = \frac{F_{SA}}{F_A}$$

Φ_K ist das Kraftverhältnis bei zentrischer Verspannung und zentrischer Kräfteinleitung in Ebenen durch die Schraubenkopf- und Mutterauflage.

$$\Phi = \frac{l_K}{l_K + \frac{A_{ers} E_P}{E_S} \left(\frac{l_1}{A} + \frac{l_2 + 0,8 d}{A_S} \right)}$$

- l_K Klemmlänge
- E_P Elastizitätsmodul der Platten
- E_S Elastizitätsmodul der Schraube, für Stahl ist $E_S = 21 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$
- A_{ers} Ersatzquerschnitt
- l_1, l_2 Teillängen der Schraube (10.2.10)
- d Gewindenenddurchmesser
- A Schaftquerschnitt der Schraube
- A_S Spannungsquerschnitt der Schraube (10.2.13)

Φ -Kontrolle für Sechskantschrauben, berechnet mit der obigen Gleichung und den folgenden Überschlagswerten:
für Stahlflansche mit $E_P = 21 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ und Flansche aus EN-GJL-300 (Klammerwerte) mit $E_P = 12 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ in Abhängigkeit von l_K/d berechnet.

$l_K/d =$	1	2	3	4	5
$\Phi =$	0,21 (0,31)	0,23 (0,32)	0,22 (0,30)	0,20 (0,28)	0,19 (0,26)
$l_K/d =$	6	7	8	9	10
$\Phi =$	0,18 (0,24)	0,16 (0,22)	0,15 (0,20)	0,14 (0,19)	0,13 (0,17)
$l_K/d =$	11	12	13	14	15
$\Phi =$	0,12 (0,16)	0,11 (0,15)	0,10 (0,14)	0,097 (0,13)	0,091 (0,12)
$l_K/d =$	16	17	18	20	–
$\Phi =$	0,086 (0,11)	0,081 (0,105)	0,076 (0,099)	0,068 (0,088)	–

Berechnet mit den Vereinfachungen: $d_a = 1,6 d$; $D_B = 1,1 d$; $d_S = 0,85 d$ (für A_S); $l_1 = 0,7 l_K$; $l_2 = 0,3 l_K$

Maschinenelemente

Schraubenverbindungen

Axialkraftanteil F_{PA} in den verspannten Platten (Plattenzusatzkraft)

$$F_{PA} = F_A (1 - \phi)$$

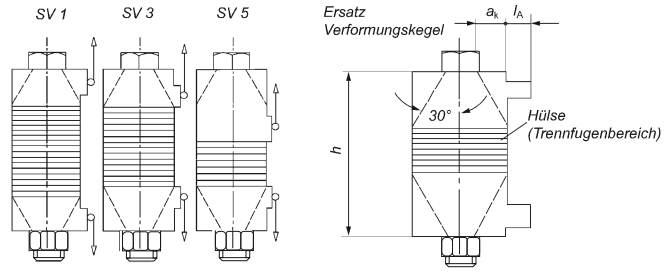
Herleitung: Das Verspannungsdiagramm zeigt $F_{PA} = F_A - F_{SA}$. Außerdem ist $F_{SA} = F_A \phi$.

Axialkraftanteile F_{SA} und F_{PA} mit $\phi_n = n \cdot \phi$ für den allgemeinen Kräfteinleitungsfall

$$\phi_n = n \frac{\delta_p}{\delta_p + \delta_s} = n \phi = \frac{F_{SA}}{F_A}$$

n ist der nach VDI 2230 zu berechnende Kräfteinleitungsfaktor, n ist abhängig vom Ort der Einleitung der Axialkraft F_A .

Kräfteinleitungs Faktoren n und zugehörige Verbindungstypen nach VDI 2230



Verbindungstypen SV zur Lage der Kräfteinleitung

Parameter zur Ermittlung von n
 h Höhe, a_k Abstand zwischen dem Rand der Verspanfläche, l_A Länge zwischen Grundkörper und Kräfteinleitungspunkt K im Anschlusskörper

Kräfteinleitungs Faktoren n :

A/h	0,00			0,10			0,20			$\geq 0,30$		
a_k/h	0,10	0,30	$\geq 0,50$	0,10	0,30	$\geq 0,50$	0,10	0,30	$\geq 0,50$	0,10	0,30	$\geq 0,50$
SV1	0,55	0,30	0,13	0,41	0,22	0,10	0,28	0,16	0,07	0,14	0,12	0,04
SV3	0,37	0,26	0,12	0,30	0,20	0,09	0,23	0,15	0,07	0,14	0,12	0,04
SV5	0,25	0,22	0,10	0,21	0,15	0,07	0,17	0,12	0,06	0,13	0,10	0,03

Klemmkraft F_K (bei $n < 1$)

$$F_K = F_V - F_Z - F_A (1 - \phi_n)$$

Das Verspannungsbild zeigt $F_K = F_V - F_Z - F_{PA}$
 $F_{PA} = F_A (1 - \phi_n)$

Schraubenkraft F_S und Vorspannkraft F_V

$$F_S = \overbrace{F_Z + F_K}^{\text{Vorspannkraft } F_V} + \underbrace{(1 - \phi) F_A}_{\text{Axialkraftanteil der verspannten Teile}} + \underbrace{\phi F_A}_{\text{Axialkraftanteil der Schraube}}$$

axiale Betriebskraft F_A

Schraubenkraft F_S (bei $n < 1$)

$$F_S = F_V + F_{SA}$$

$$F_S = F_V + \phi_n F_A$$

Setzkraft F_Z

$$F_Z = \frac{f_Z}{(\delta_S + \delta_P)} = f_Z \frac{\Phi}{\delta_P}$$

Die Setzkraft F_Z ist der Vorspannkraftverlust durch Setzen der Verbindung während der Betriebszeit. f_Z ist die dadurch bleibende Verformung.

Richtwerte für Setzbeträge f_Z in μm

bei Schrauben, Muttern und kompakten verspannten Teilen aus Stahl (VDI 2230)

Gemittelte Rautiefe R_Z	Beanspruchung	im Gewinde	je Kopf oder Mutterauflage	je innere Trennfuge
< 10 μm	Zug/Druck	3	2,5	1,5
	Schub	3	3	2
10 μm bis < 40 μm	Zug/Druck	3	3	2
	Schub	3	4,5	2,5
40 μm bis < 160 μm	Zug/Druck	3	4	3
	Schub	3	6,5	3,5

Montagevorspannkraft F_{VM}
Anziehungsfaktor α_A

$$F_{VM} = \alpha_A [F_{K\text{ erf}} + F_Z + F_A \cdot (1 - \phi_n)]$$

Richtwerte für den Anziehungsfaktor α_A (VDI 2230)

Anziehungsfaktor α_A	Streuung	Anziehverfahren	Einstellverfahren	Bemerkungen
1,2 bis 1,4	+/- (9 bis 17)%	Drehwinkelgesteuertes Anziehen	Versuchsmäßige Bestimmung von Vorziehmoment und Drehwinkel	Vorspannkraftstreuung wird wesentlich durch die Streckgrenzenstreuung bestimmt.
1,4 bis 1,6	+/- (17 bis 2)%	Drehmomenten-gesteuertes Anziehen mit Drehmomentenschlüssel	Versuchsmäßige Bestimmung der Sollanziehmomente am Originalverschraubungsteil	Niedrigere Werte für kleine Drehwinkel, höhere Werte große Drehwinkel
2,5 bis 4	+/- (43 bis 60)%	Schlag- oder Impulsschrauber	Einstellen des Schraubers über das Nachstellmoment und einem Zuschlag	Niedrigere Werte für große Zahl von Einstellversuchen

Längenänderungen f_S, f_P nach der Montage

$$f_S = F_{VM} \delta_S$$

$$f_P = F_{VM} \delta_P$$

$$F_{VM} \text{ Montagevorspannkraft}$$

Maschinenelemente

Schraubenverbindungen

Erforderliches Anziehdrehmoment M_A

$$M_A = F_{VM} \left[\frac{d_2}{2} \cdot \tan(\alpha + \varrho') + \mu_A \cdot 0,7d \right]$$

M_A	F_{VM}	d_2, d	μ_A
Nmm	N	mm	1

- F_{VM} Montagevorspannkraft
- d_2 Flankendurchmesser am Gewinde (10.2.13)
- d Gewindedurchmesser (10.2.13)
- α Steigungswinkel am Gewinde (10.2.13)
- ϱ' Reibungswinkel am Gewinde
- μ_A Gleitreibungszahl der Kopf- oder Mutterauflagefläche
- $\mu_A \approx 0,1$ für Stahl/Stahl, trocken ($\approx 0,05$ geölt)
- $\mu_A \approx 0,15$ für Stahl/Gusseisen, trocken ($\approx 0,05$ geölt)

Richtwerte für Reibungszahlen μ' und Reibungswinkel ϱ' für metrisches ISO-Regelgewinde

Behandlungsart \ Reibungsverhältnisse	trocken		geschmiert		MoS ₂ -Paste	
	μ'	ϱ'	μ'	ϱ'	μ'	ϱ'
ohne Nachbehandlung	0,16	9°	0,14	8°	0,1	6°
phosphatiert	0,18	10°	0,14	8°		
galvanisch verzinkt	0,14	8°	0,13	7,5°		
galvanisch verkadmet	0,1	6°	0,09	5°		

Montagevorspannung σ_{VM}

$$\sigma_{VM} = \frac{F_{VM}}{A_S}$$

F_{VM} Montagevorspannkraft
 A_S Spannungsquerschnitt

Torsionsspannung τ_t

$$\tau_t = \frac{F_{VM} \cdot d_2 \cdot \tan(\alpha + \varrho')}{2 \cdot W_{pS}}$$

d_2 Flankendurchmesser*)
 W_{pS} polares Widerstandsmoment der Schraube*)

$$W_{pS} = \frac{\pi}{16} d_s^3$$

d_s Durchmesser des Spannungsquerschnitts A_S *)
 α Steigungswinkel des Gewindes*)
 P Gewindesteigung*)
 ϱ' Reibungswinkel (siehe oben)
*) siehe 10.2.13

Vergleichsspannung σ_{red} (reduzierte Spannung)

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{VM}^2 + 3 \cdot \tau_t^2} \leq 0,9 \cdot R_{p0,2}$$

$R_{p0,2}$ 0,2-Dehngrenze (10.2.9)

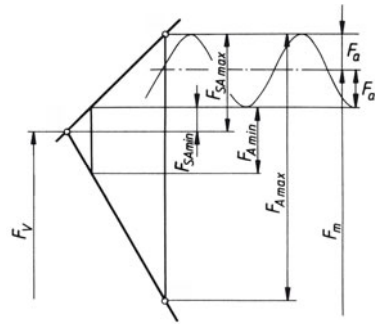
Ist die Bedingung $\sigma_{red} \leq 0,9 \cdot R_{p0,2}$ nicht erfüllt, muss die Berechnung mit einem größeren Schraubendurchmesser oder mit einer höheren Festigkeitsklasse wiederholt werden.

Ausschlagkraft F_a
bei dynamischer
Betriebskraft F_B

$$F_a = \frac{F_{SAmax} - F_{SAmin}}{2} = \frac{F_{Amax} - F_{Amin}}{2} n \cdot \phi$$

$$F_a = \frac{F_{SA}}{2} \text{ bei } F_{SAmin} = 0$$

$$F_m = F_{VM} + F_{SAmin} + F_a$$



Ausschlagspannung σ_a

$$\sigma_a = \frac{F_a}{A_S} \leq 0,9 \cdot \sigma_A$$

σ_A Ausschlagfestigkeit der Schraube
 A_S Spannungsquerschnitt (10.2.13)

Ausschlagfestigkeit
 $\pm \sigma_A$ in N/mm^2

Festigkeits- klasse	Gewinde			
	< M 8	M 8 ... M 12	M 14 ... M 20	> M 20
4.6 und 5.6	50	40	35	35
8.8 bis 12.9	60	50	40	35
10.9 und 12.9 schlussgerollt	100	90	70	60

Flächenpressung p

$$p = \frac{F_S}{A_p} \leq p_G$$

A_p gepresste Fläche (10.2.10)

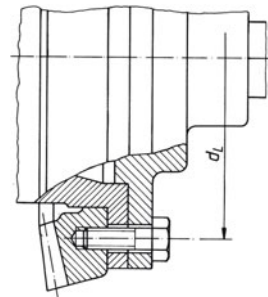
p_G Grenzflächenpressung

Richtwerte für die
Grenzflächenpressung
 p_G in N/mm^2

Anziehart	Grenzflächenpressung p_G in N/mm^2 bei Werkstoff der Teile						
	S235JO	E 335	C 45 E	Stahl, vergütet	Stahl, einsatz- gehärtet	EN-GJL-250 EN-GJL-300	AlSiCu -Leg.
motorisch	200	350	600	–	–	500	120
von Hand (drehmomentgesteuert)	300	500	900	ca. 1 000	ca. 1 500	750	180

**10.2.5 Berechnung vorge-
 spannter Schrau-
 benverbindungen**
bei Aufnahme
einer Querkraft

Die Schraubenverbindung überträgt die gesamte statisch oder dynamisch wirkende Querkraft $F_{Q\text{ges}}$ allein durch Reibungschluss: Reibungskraft $F_R = F_{Q\text{ges}}$ Die erforderliche Vorspannkraft F_V (Schraubenlängskraft) setzt sich zusammen aus der erforderlichen Klemmkraft $F_{K\text{erf}}$ und der Setzkraft F_Z . Eine axiale Betriebskraft F_A tritt nicht auf ($F_A = 0$).



Beispiel einer Schraubenverbindung mit Querkraftaufnahme: Tellerrad am Kraftfahrzeug

Maschinenelemente

Schraubenverbindungen

Erforderliche Klemmkraft
 $F_{K\text{erf}}$ je Schraube

$$F_{K\text{erf}} \geq \frac{F_{Q\text{ges}}}{n \cdot \mu_A}$$

n Anzahl der Schrauben, die $F_{Q\text{ges}}$ aufnehmen sollen
 μ_A Gleitreibungszahl zwischen den Bauteilen

Erforderliche Klemmkraft
 $F_{K\text{erf}}$ je Schraube bei Drehmomentübertragung

$$F_{K\text{erf}} \geq \frac{2 \cdot M}{n \cdot \mu_A \cdot d_L}$$

Die Anzahl n der Schrauben ergibt sich aus dem zum Anziehen der Schraubenverbindung erforderlichen Mindestabstand auf dem Lochkreis.
 M zu übertragendes Drehmoment

Erforderlicher Spannungsquerschnitt $A_{S\text{erf}}$ und Wahl des Gewindes nach Tabelle im Abschnitt 10.2.13

$$A_{S\text{erf}} \geq \frac{\alpha_A \cdot F_{K\text{erf}}}{0,6 \cdot R_{p0,2}}$$

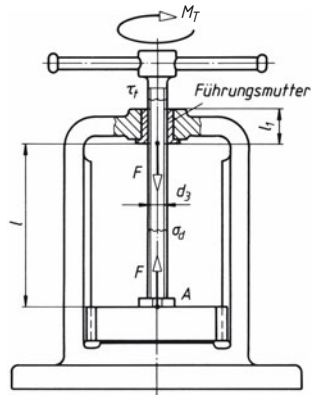
α_A Anziehungsfaktor (10.2.4)
 $R_{p0,2}$ 0,2-Dehngrenze (10.2.9)

10.2.6 Berechnung von Bewegungsschrauben

Für Bewegungsschrauben wird meist Trapezzgewinde nach Tabelle im Abschnitt 10.2.14 verwendet. Man rechnet dann mit dem Kernquerschnitt A_3 . Wird die Bewegungsschraube auf Druck beansprucht, muss die Knickung überprüft werden.

Beispiel einer Bewegungsschraube: Handspindelpresse

- l Knickgefährdete Spindellänge
- τ_t Spindelteil mit Torsionsspannung $\tau_t = M_T/W_p$
- l_1 tragende Gewindelänge der Führungsmutter
- F Druckkraft in der Spindel
- d_3 Kerndurchmesser des Trapezzgewindes
- σ_d Druckspannung im Gewinde
- F Druckkraft
- A Querschnittsfläche des Drucktellers



Erforderlicher Kernquerschnitt $A_{3\text{erf}}$ (überschlägig)

$$A_{3\text{erf}} \geq \frac{F}{0,45 \cdot R_{p0,2}}$$

F Zug- oder Druckkraft in der Schraube (Spindel)
 $R_{p0,2}$ siehe Tabelle in 10.2.9 u. 4.4
 A_3 siehe Tabelle in 10.2.14

Vergleichsspannung σ_{red} (reduzierte Spannung)

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_{z,d}^2 + 3 \cdot \tau_t^2} \quad \sigma_{z,d} = \frac{F}{A_3} \quad \tau_t = \frac{M_{\text{RG}}}{W_p} \quad W_p = \frac{\pi}{16} d_3^2$$

Gewindereibungsmoment M_{RG}

$$M_{\text{RG}} = F \frac{d_2}{2} \tan(\alpha + \rho')$$

Erforderliche Mutterhöhe m_{erf}

$$m_{\text{erf}} = \frac{F \cdot P}{\pi \cdot d_2 \cdot H_1 \cdot p_{\text{zul}}}$$

Gewindegrößen nach 10.2.14
 $P_{\text{zul}} = 2 \dots 3$ MP für Gusseisenmutter/Stahl
 $= 5 \dots 15$ MP für Bronzemutter/Stahl
 $= 7$ für Stahl/Stahl

Wirkungsgrad η

$$\eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \beta)}$$

α Steigungswinkel (10.2.14)
 β Reibungswinkel im Gewinde (10.2.8)

Festigkeitsnachweis

Für ruhende Belastung: $\sigma_{red} \leq 0,9 \cdot R_{p0,2}$ $R_{p0,2} = 0,2$ Dehngrenze (10.2.9)

Für schwellende Belastung: σ_a Ausschlagspannung
 σ_A Ausschlagfestigkeit
 σ_{Sch} Schwellfestigkeit
 b_1 Oberflächenbeiwert
 b_2 Größenbeiwert
 β_k Kerbwirkungszahl ≈ 2 für Trapezgewinde

} s. S. 295

$$\sigma_a = \frac{F}{2 \cdot A_3} \leq \sigma_A$$

$$\sigma_A = \frac{\sigma_{Sch} \cdot b_1 \cdot b_2}{\beta_k}$$

10.2.7 Richtwerte für die zulässige Flächenpressung bei Bewegungsschrauben

Schraube (Spindel)	Werkstoff		p_{zul} in N/mm ²
	Spindel	Mutter (Spindelführung)	
Stahl	Stahl	Stahl	8
Stahl	Stahl	Gusseisen	5
Stahl	Stahl	CuZn und CuSn-Legierung	10
Stahl, gehärtet	Stahl	CuZn und CuSn-Legierung	15

10.2.8 Reibungszahlen und Reibungswinkel für Trapezgewinde

Gewinde	trocken		geschmiert	
	μ'	ϱ'	μ'	ϱ'
Spindel aus Stahl, Mutter aus Gusseisen	0,22	12°		
Spindel aus Stahl, Mutter aus CuZn- und CuSn-Legierungen	0,18	10°		
Aus vorstehenden Werkstoffen	–	–	0,1	6°

10.2.9 $R_{p0,2}$ 0,2-Dehngrenze der Schraube

(Festigkeitseigenschaften der Schraubenstähle nach DIN EN 20898)

Kennzeichen (Festigkeitsklasse)	4.6	4.8	5.6	5.8	6.6	6.8	6.9	8.8	10.9	12.9
Mindestzugfestigkeit R_m in N/mm ²	400		500		600			800	1 000	1 200
Mindest-Streckgrenze R_e oder $R_{p0,2}$ Dehngrenze in N/mm ²	240	320	300	400	360	480	540	640	900	1 080
Bruchdehnung A_5 in %	25	14	20	10	16	8	12	12	9	8

Maschinenelemente

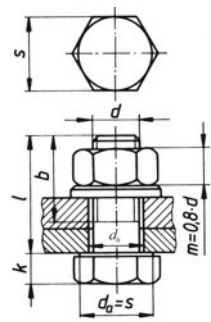
Schraubenverbindungen

10.2.10 Geometrische Größen an Sechskantschrauben

Bezeichnung einer Sechskantschraube M10, Länge $l = 90$ mm, Festigkeitsklasse 8.8:
 Sechskantschraube M10 × 90 DIN 931–8.8

Maße in mm, Kopfauflagefläche A_p in mm^2

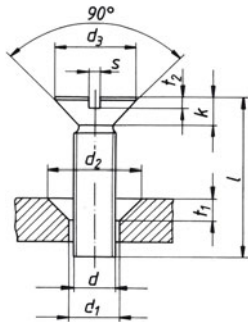
Gewinde	$d_a \pm s$	k	l -Bereich ¹⁾	b		d_h		A_p	
				²⁾	³⁾	fein	mittel	⁴⁾	⁵⁾
M 5	8	3,5	22 ... 80	16	22	5,3	5,5	26,5	30
M 6	10	4	28 ... 90	18	24	6,4	6,6	44,3	41
M 8	13	5,5	35 ... 110	22	28	8,4	9	69,1	64
M 10	17	7	45 ... 160	26	32	10,5	11	132	100
M 12	19	8	45 ... 180	30	36	13	13,5	140	93
M 14	22	9	45 ... 200	34	40	15	15,5	191	134
M 16	24	10	50 ... 200	38	44	17	17,5	212	185
M 18	27	12	55 ... 210	42	48	19	20	258	244
M 20	30	13	60 ... 220	46	52	21	22	327	311
M 22	32	14	60 ... 220	50	56	23	24	352	383
M 24	36	15	70 ... 220	54	60	25	26	487	465
M 27	41	17	80 ... 240	60	66	28	30	613	525
M 30	46	19	80 ... 260	66	72	31	33	806	707



- 1) gestuft: 18, 20, 25, 28, 30, 35, 40,
- 2) für $l \leq 125$ mm
- 3) für $l > 125$ mm ... 200 mm
- 4) für Sechskantschrauben
- 5) für Innen-Sechskantschrauben

Anmerkung: Die Kopfauflagefläche A_p für Sechskantschrauben wurde als Kreisringfläche berechnet mit $A_p = \pi/4 (d_a^2 - d_{h\text{mittel}}^2)$, für Innen-Sechskantschrauben aus den Maßen nach DIN. Aussenkungen der Durchgangsbohrungen (d_h) verringern die Auflagefläche A_p unter Umständen erheblich.

10.2.11 Maße an Senkschrauben mit Schlitz und an Senkungen für Durchgangsbohrungen



Maße in mm

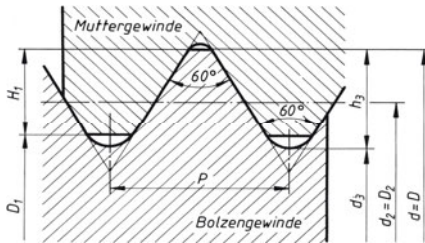
Bezeichnung einer Senkschraube M10
 Länge $l = 20$ mm, Festigkeitsklasse 5.8:
 Senkschraube M10 × 20 DIN 962 – 5.8
 Bezeichnung der zugehörigen Senkung der Form A
 mit Bohrungsausführung mittel (m):
 Senkung A m 10 DIN 74

Gewindedurchmesser $d = M \dots$	1	1,2	1,4	1,6	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	16	20
k_{max}	0,6	0,72	0,84	0,96	1,2	1,5	1,65	2,2	2,5	3	4	5	6	8	10
d_3	1,9	2,3	2,6	3	3,8	4,7	5,6	7,5	9,2	11	14,5	18	22	29	36
$t_2 \text{ max}$	0,3	0,35	0,4	0,45	0,6	0,7	0,85	1,1	1,3	1,6	2,1	2,6	3	4	5
s	0,25	0,3	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,2	1,6	2	2,5	3	4	5
d_1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,4	2,9	3,4	4,5	5,5	6,6	9	11	14	18	22
d_2	2,4	2,8	3,3	3,7	4,6	5,7	6,5	8,6	10,4	12,4	16,4	20,4	24,4	32,4	40,4
t_1	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,4	1,6	2,1	2,5	2,9	3,7	4,7	5,2	7,2	9,2

10.2.12 Einschraublänge l_a für Sacklochgewinde

Festigkeitsklasse	8.8	8.8	10.9	10.9
Gewindefinheit d/P	< 9	≥ 9	< 9	≥ 9
AlCuMg1 F40	1,1 d		1,4 d	
GJL220	1,0 d		1,2 d	1,4 d
E295	0,9 d		1,0 d	1,2 d
C45V	0,8 d		0,9 d	1,0 d

10.2.13 Metrisches ISO-Gewinde nach DIN 13



Bezeichnung des metrischen Regelgewindes z. B. M 12 Gewinde-Nenndurchmesser $d = D = 12 \text{ mm}$

Maße in mm

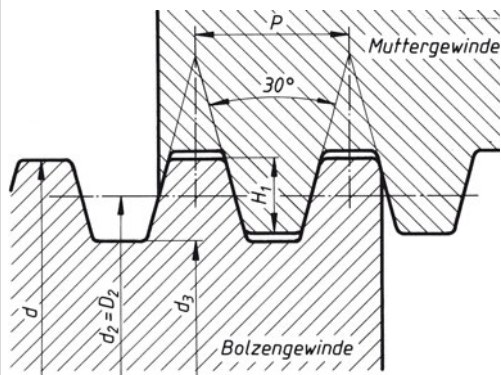
Gewinde-Nenndurchmesser $d = D$		Steigung	Steigungswinkel	Flankendurchmesser	Kerndurchmesser		Gewindetiefe ¹⁾		Spannungsquerschnitt	polares Widerstandsmoment
Reihe 1	Reihe 2	P	α in Grad	$d_2 = D_2$	d_3	D_1	h_3	H_1	A_{S_2} mm ²	W_{ps} mm ³
3		0,5	3,40	2,675	2,387	2,459	0,307	0,271	5,03	3,18
	3,5	0,6	3,51	3,110	2,764	2,850	0,368	0,325	6,78	4,98
4		0,7	3,60	3,545	3,141	3,242	0,429	0,379	8,73	7,28
	4,5	0,75	3,40	4,013	3,580	3,688	0,460	0,406	11,3	10,72
5		0,8	3,25	4,480	4,019	4,134	0,491	0,433	14,2	15,09
6		1	3,40	5,350	4,773	4,917	0,613	0,541	20,1	25,42
8		1,25	3,17	7,188	6,466	6,647	0,767	0,677	36,6	62,46
10		1,5	3,03	9,026	8,160	8,376	0,920	0,812	58,0	124,6
12		1,75	2,94	10,863	9,853	10,106	1,074	0,947	84,3	218,3
	14	2	2,87	12,701	11,546	11,835	1,227	1,083	115	347,9
16		2	2,48	14,701	13,546	13,835	1,227	1,083	157	554,9
	18	2,5	2,78	16,376	14,933	15,294	1,534	1,353	192	750,5
20		2,5	2,48	18,376	16,933	17,294	1,534	1,353	245	1082
	22	2,5	2,24	20,376	18,933	19,294	1,534	1,353	303	1488
24		3	2,48	22,051	20,319	20,752	1,840	1,624	353	1871
	27	3	2,18	25,051	23,319	23,752	1,840	1,624	459	2774
30		3,5	2,30	27,727	25,706	26,211	2,147	1,894	561	3748
	33	3,5	2,08	30,727	28,706	29,211	2,147	1,894	694	5157
36		4	2,18	33,402	31,093	31,670	2,454	2,165	817	6588
	39	4	2,00	36,402	34,093	34,670	2,454	2,165	976	8601
42		4,5	2,10	39,077	36,479	37,129	2,760	2,436	1120	10574
	45	4,5	1,95	42,077	39,479	40,129	2,760	2,436	1300	13222
48		5	2,04	44,752	41,866	42,587	3,067	2,706	1470	15899
	52	5	1,87	48,752	45,866	46,587	3,067	2,706	1760	20829
56		5,5	1,91	52,428	49,252	50,046	3,374	2,977	2030	25801
	60	5,5	1,78	56,428	53,252	54,046	3,374	2,977	2360	32342
64		6	1,82	60,103	56,639	57,505	3,681	3,248	2680	39138
	68	6	1,71	64,103	60,639	61,505	3,681	3,248	3060	47750

¹⁾ H_1 ist die Tragtiefe (siehe Handbuch Maschinenbau, D Festigkeitslehre: Flächenpressung im Gewinde)

Maschinenelemente

Schraubenverbindungen

10.2.14 Metrisches ISO-Trapezgewinde nach DIN 103



Bezeichnung für

a) eingängiges Gewinde z. B.
 Tr 75 × 10 Gewindedurchmesser
 d = 75 mm,
 Steigung P = 10 mm = Teilung

b) zweigängiges Gewinde z. B.
 Tr 75 × 20 P 10 Gewindedurchmesser
 d = 75 mm,
 Steigung Ph = 20 mm,
 Teilung P = 10 mm

$$\text{Gangzahl } z = \frac{\text{Steigung } P_h}{\text{Teilung } P} = \frac{20 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 2$$

Maße in mm

Gewinde- durchmesser	Steigung	Steigungs- winkel	Tragtiefe	Flanken- durchmesser	Kern- durchmesser	Kernquerschnitt	polares Wider- standsmoment
d	P	α in Grad	H_1 $H_1 = 0,5 P$	$D_2 = d_2$ $D_2 = d - H_1$	d_3	$A_3 = \frac{\pi}{4} d_3^2$ mm ²	$W_p = \frac{\pi}{16} d_3^3$ mm ³
8	1,5	3,77	0,75	7,25	6,2	30,2	46,8
10	2	4,05	1	9	7,5	44,2	82,8
12	3	5,20	1,5	10,5	9	63,6	143
16	4	5,20	2	14	11,5	104	299
20	4	4,05	2	18	15,5	189	731
24	5	4,23	2,5	21,5	18,5	269	1243
28	5	3,57	2,5	25,5	22,5	398	2237
32	6	3,77	3	29	25	491	3068
36	6	3,31	3	33	29	661	4789
40	7	3,49	3,5	36,5	32	804	6434
44	7	3,15	3,5	40,5	36	1018	9161
48	8	3,31	4	44	39	1195	11647
52	8	3,04	4	48	43	1452	15611
60	9	2,95	4,5	55,5	50	1963	24544
65	10	3,04	5	60	54	2290	30918
70	10	2,80	5	65	59	2734	40326
75	10	2,60	5	70	64	3217	51472
80	10	2,43	5	75	69	3739	64503
85	12	2,77	6	79	72	4071	73287
90	12	2,60	6	84	77	4656	89640
95	12	2,46	6	89	82	5281	108261
100	12	2,33	6	94	87	5945	129297
110	12	2,10	6	104	97	7390	179203
120	14	2,26	7	113	104	8495	220867

10.3 Federn

Normen (Auswahl) und Richtlinien

- DIN 2088 Zylindrische Schraubenfedern aus runden Drähten und Stäben, Berechnung und Konstruktion von kaltgeformten Drehfedern (Schenkelfedern)
- DIN 2089 Zylindrische Schraubenfedern aus runden Drähten und Stäben, Berechnung und Konstruktion von Druck- und Zugfedern
- DIN 2090 Zylindrische Schraubendruckfedern aus Flachstahl, Berechnung
- DIN 2091 Drehstabfedern mit rundem Querschnitt, Berechnung und Konstruktion
- DIN 2092 Tellerfedern, Berechnung
- DIN 2093 Tellerfedern, Maße und Güteeigenschaften
- DIN 2094 Blattfedern für Straßenfahrzeuge, Anforderung, Prüfung
- DIN 2095 Zylindrische Druckfedern aus Runddraht, kaltgeformt
- DIN 2097 Zylindrische Zugfedern aus Runddraht

10.3.1 Federkennlinie, Federrate, Federarbeit, Eigenfrequenz

Federkennlinie, Federrate c, Federarbeit W_f

Für Zug-, Druck- und Biegefedern:

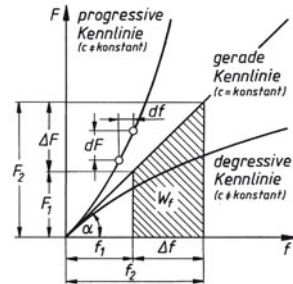
$$c = \frac{F_2 - F_1}{f_2 - f_1} = \frac{\Delta F}{\Delta f} \text{ oder}$$

$$c = \frac{dF}{df}$$

$$c \triangleq \tan \alpha$$

$$W_f = \frac{F_1 + F_2}{2} \Delta f = \frac{c}{2} (f_2^2 - f_1^2)$$

F	f	c	W_f
N	mm	$\frac{N}{mm}$	Nmm



F Federkraft
f Federweg

Für Drehstabfedern:

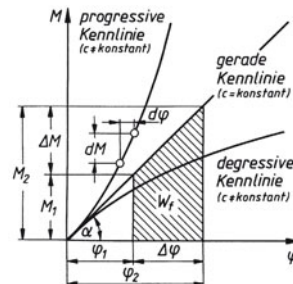
$$c = \frac{M_2 - M_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{\Delta M}{\Delta \varphi} \text{ oder}$$

$$c = \frac{dM}{d\varphi}$$

$$c \triangleq \tan \alpha$$

$$W_f = \frac{M_1 + M_2}{2} \Delta \varphi = \frac{c}{2} (\varphi_2^2 - \varphi_1^2)$$

M	φ	c	W_f
Nmm	rad	$\frac{Nmm}{rad}$	Nmm



M Federmoment
 φ Drehwinkel

Beachte: In den Gleichungen für Drehstabfedern steht das Federmoment M für die Federkraft F sowie der Drehwinkel φ für den Federweg f (Analogie: $M \triangleq F$, $\varphi \triangleq f$).

Maschinenelemente

Federn

Resultierende Federrate c_0 bei hintereinandergeschalteten Federn

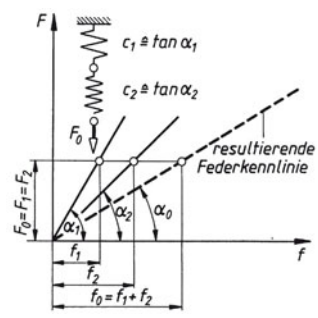
Wegen $F_0 = F_1 = F_2 = \dots$
und $f_0 = f_1 + f_2 + \dots$

wird

$$\frac{1}{c_0} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots$$

Bei zwei Federn gilt:

$$c_0 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

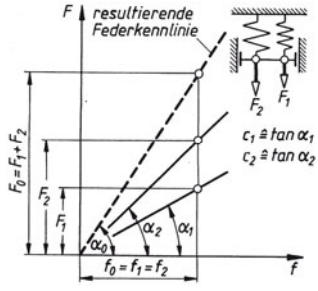


Resultierende Federrate c_0 bei parallelgeschalteten Federn

Wegen $F_0 = F_1 + F_2 + \dots$
und $f_0 = f_1 = f_2 = \dots$

wird

$$c_0 = c_1 + c_2 + \dots$$



Eigenfrequenz v_e (Federmasse vernachlässigt)

$$v_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$$

für Zug-, Druck- und Biegefedern

$$v_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_D}{J}}$$

für Drehstabfedern

- c, c_D Federraten
- m Masse des abgefederten Körpers
- J Trägheitsmoment des Körpers, bezogen auf die Drehachse
- Hz Hertz ($1 \text{ Hz} = \frac{1}{\text{s}}$)

v_e	c	c_D	m	J
$\frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	kg	kgm^2

In der Gleichung für Drehstabfedern steht das Trägheitsmoment J für die Masse m (Analogie: $J \triangleq m$).

10.3.2 Metallfedern

Größen und Einheiten

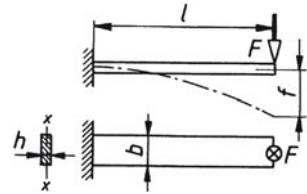
Spannung σ , τ in N/mm^2 , Elastizitätsmodul E und Schubmodul G in N/mm^2 ($E_{\text{Stahl}} = 210\,000 \text{ N/mm}^2$, $G_{\text{Stahl}} = 83\,000 \text{ N/mm}^2$), Federkraft (Federbelastung) F in N , Federmoment (Kraftmoment, Drehmoment) M in Nmm , Federarbeit c in N/mm (bei Drehstabfedern in Nmm/rad), Federarbeit W_f in Nmm , Widerstandsmoment W in mm^3 , Flächenmoment 2. Grades I in mm^4 , Federvolumen V in mm^3 , Federweg f in mm , Drehwinkel φ in rad , sämtliche Längenmaße in mm .

10.3.2.1 Rechteck-Blattfeder

$$\sigma_b = \frac{Fl}{W_x} = \frac{6Fl}{bh^2} \leq \sigma_{b\text{zul}} \quad f = \frac{Fl^3}{3EI_x} = \frac{4Fl^3}{bh^3E} \quad c = \frac{Ebh^3}{4l^3}$$

$$f_{\text{max}} = \frac{2l^2}{3hE} \sigma_{b\text{zul}} \quad W_f = \frac{V\sigma_b^2}{18E}$$

$$V = bhl$$



Zulässige Biegespannung $\sigma_{b\text{zul}}$:

Bei *ruhender* Belastung $\sigma_{b\text{zul}} = 0,7 R_m$ mit $R_m = 1300 \dots 1500 \text{ N/mm}^2$ für Federstahl.

Bei *schwingender* Belastung gilt das Dauerfestigkeits- oder Gestaltfestigkeitsdiagramm.

Dann muss sein:

$$\sigma_{b\text{zul}} \approx \sigma_m + 0,7 \sigma_A \quad \sigma_A \text{ Ausschlagfestigkeit}$$

$$\sigma_a \text{ vorh} \leq 0,75 \sigma_A \quad \sigma_a \text{ Ausschlagspannung}$$

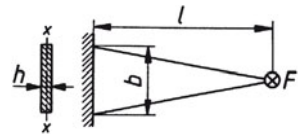
Anhaltswert für $\sigma_A = 50 \text{ N/mm}^2$ für Federstahl.

10.3.2.2 Dreieck-Blattfeder

$$\sigma_b = \frac{Fl}{W_x} = \frac{6Fl}{bh^2} \leq \sigma_{b\text{zul}} \quad f = \frac{Fl^3}{2EI_x} = \frac{6Fl^3}{bh^3E} \quad c = \frac{bh^3E}{6l^3}$$

$$\sigma_{b\text{zul}} \text{ wie oben} \quad f_{\text{max}} = \frac{l^2 \sigma_{b\text{zul}}}{hE} \quad W_f = \frac{V\sigma_b^2}{6E}$$

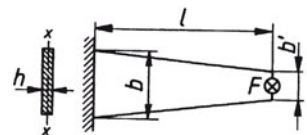
$$V = \frac{1}{2} bhl$$



10.3.2.3 Trapez-Blattfeder

$$\sigma_b = \frac{Fl}{W_x} = \frac{6Fl}{bh^2} \leq \sigma_{b\text{zul}} \quad f = K_{Tr} \frac{Fl^3}{3EI_x} = K_{Tr} \frac{4Fl^3}{bh^3E} \quad c = \frac{bh^3E}{4K_{Tr}l^3}$$

$$\sigma_{b\text{zul}} \text{ wie oben} \quad f_{\text{max}} = K_{Tr} \frac{2l^2 \sigma_{b\text{zul}}}{3hE} \quad W_f = \frac{K_{Tr} V \sigma_b^2}{9 \left(1 + \frac{b'}{b}\right) E}$$



Formfaktor K_{Tr} aus nachstehendem Diagramm $V = \frac{1}{2} bhl \left(1 + \frac{b'}{b}\right)$

Maschinenelemente

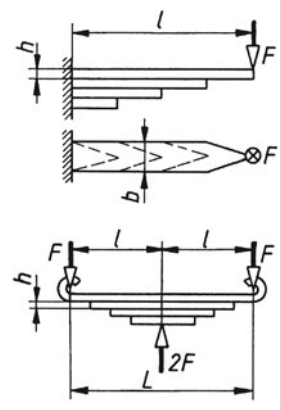
Federn

10.3.2.4 Geschichtete Blattfeder

$$\sigma_b = \frac{Fl}{W_x} \leq \sigma_{bzul} \quad f = K_{Tr} \frac{Fl^3}{3EI_x} = K_{Tr} \frac{4Fl^3}{zbh^3E} \quad c = \frac{zbh^3E}{4K_{Tr}l^3}$$

$$\sigma_b = \frac{6Fl}{zbh^2} \leq \sigma_{bzul} \quad f_{max} = K_{Tr} \frac{2l^2\sigma_{bzul}}{3hE} \quad W_f = \frac{K_{Tr}V\sigma_b^2}{9\left(1+\frac{z'}{z}\right)E}$$

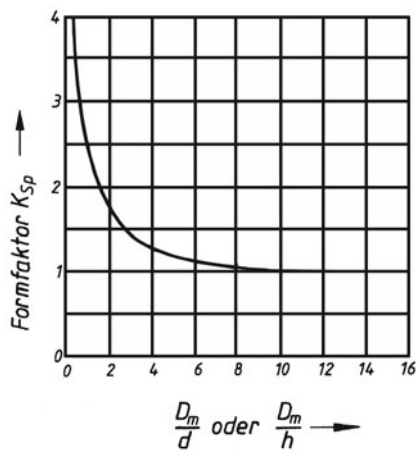
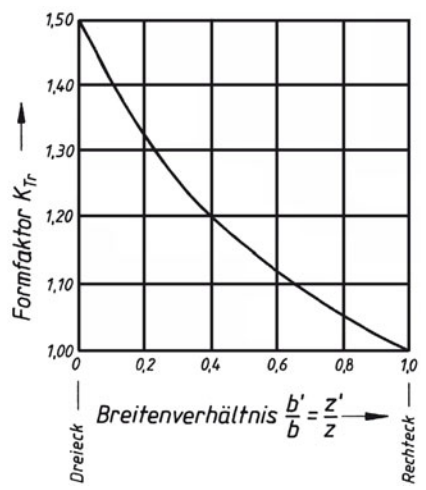
$$V = \frac{1}{2}bh l \left(1+\frac{z'}{z}\right)$$



$\sigma_{bzul} = 600 \text{ N/mm}^2$ für Vorderfedern an Fahrzeugen

$\sigma_{bzul} = 750 \text{ N/mm}^2$ für Hinterfedern

z Anzahl der Blätter
 z' Anzahl der Blätter von der Länge L
 Formfaktor K_{Tr} aus nachstehendem Diagramm



10.3.2.5 Spiralfeder

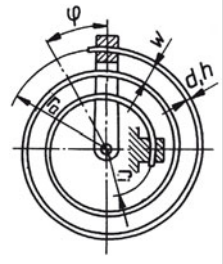
$$\sigma_b = 10 K_{Sp} \frac{M}{d^3} \leq \sigma_{bzul} \quad \varphi = \frac{Ml}{EI_x} \quad \varphi_{max} = \frac{2l\sigma_{bzul}}{dE} \quad c = \frac{\pi d^4E}{64l}$$

für Kreisquerschnitt

$$\sigma_b = 6 K_{Sp} \frac{M}{bh^2} \leq \sigma_{bzul} \quad \varphi = \frac{Ml}{EI_x}; \quad \varphi_{max} = \frac{2l\sigma_{bzul}}{hE} \quad c = \frac{bh^3E}{12l}$$

für Rechteckquerschnitt

$$l = \frac{\pi(r_a^2 - r_i^2)}{(d \text{ oder } h) + w} \quad W_f = \frac{V\sigma^2}{6E}$$



K_{Sp} aus vorstehendem Diagramm

Die zulässige Biegespannung σ_{bzul} ist abhängig vom Drahtwerkstoff (patentiert-gezogener Federdraht) und vom Drahtdurchmesser.

Anhaltswerte:	Drahtdurchmesser d in mm	2	3	4	5	6	8	10
	σ_{bzul} in N/mm ²	1200	1170	1130	980	920	860	800

10.3.2.6 Drehfeder (Schenkelfeder)

$$\sigma_b = 10 K_{Sp} \frac{Fr}{d^3} \leq \sigma_{bzul} \quad \varphi = \frac{Flr}{EI_x} \quad \varphi_{max} = \frac{2l \sigma_{bzul}}{(d \text{ oder } h)E}$$

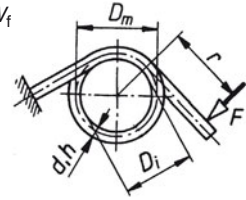
Größen c und W_f wie in 10.3.2.5

$$\sigma_{bzul} \text{ wie in 10.3.2.5}$$

$$K_{Sp} \text{ aus Diagramm in 10.3.2.4}$$

$$l = i_f \sqrt{(D_m \pi)^2 + s^2}$$

gestreckte Lande der Windungen



Bei *schwingender* Belastung ist der Beiwert k zu beruckichtigen. (Diagramm unter Entwurfsberechnung, unten)

i_f Anzahl der federnden Windungen
 s Windungssteigung

Entwurfsberechnung des Drahtdurchmessers d :

$$d = k_1 \sqrt[3]{\frac{Fr}{1-k_2}}$$

d, r	F	k_1, k_2
mm	N	1

$$k_2 = 0,06 \sqrt[3]{\frac{Fr}{D_i}}$$

$$k_1 = 0,22 \text{ fur } d < 5 \text{ mm}$$

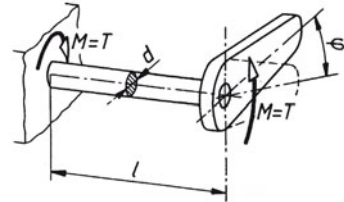
$$k_1 = 0,24 \text{ fur } d \geq 5 \text{ mm}$$

10.3.2.7 Drehstabfeder (Drehmoment $M =$ Torsionsmoment T)

$$\tau_{t \text{ max}} = \frac{T}{W_p} = \frac{16T}{\pi d^3} \leq \tau_{tzul} \quad \varphi = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{32Tl}{\pi d^4 G} \quad c = \frac{\pi d^4 G}{32l}$$

$$d \geq 3 \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi \tau_{tzul}}} \quad \varphi_{max} = \frac{2l \tau_{tzul}}{dG} \quad W_f = \frac{V \tau_t^2}{16G}$$

$$d \geq \frac{dl \tau_{tzul}}{\varphi G}$$



τ_{tzul} fur 50 CrV4 $\approx 700 \text{ N/mm}^2$ fur nicht gesetzte Stabe, $\approx 1000 \text{ N/mm}^2$ fur gesetzte Stabe;
 $\tau_{tzul} = \pm 100 \dots 200 \text{ N/mm}^2$ fur Dauerbeanspruchung bei geschliffener Oberflache.
Sonst: Gestaltfestigkeit $\tau_G \leq 700 \text{ N/mm}^2$, Ausschlagfestigkeit $\tau_A \leq \pm 200 \text{ N/mm}^2$, es muss sein:
 $\tau_m + \tau_A \leq \tau_G$ und $\tau_{a \text{ zul}} \approx 0,75 \tau_A$.

10.3.2.8 Ringfeder

$$\sigma = \frac{F}{\pi h_{am} b \tan(\beta + \varrho)} \leq \sigma_{zul}$$

$\varrho \approx 9^\circ$ fur schwere Ringe,
 $\varrho \approx 7^\circ$ fur leichte Ringe,

$$\sigma_{Au\ss enring} = \frac{F}{\pi h_{am} b \tan(\beta + \varrho)} = \frac{h_m}{h_{am}} \sigma \leq 800 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\beta = 14^\circ, b \approx \frac{D_a}{4}$$

$$h_m = \frac{1}{4}(D_a - D_i)$$

$$\sigma_{Innenring} = \frac{h_m}{h_{im}} \sigma \leq 1200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

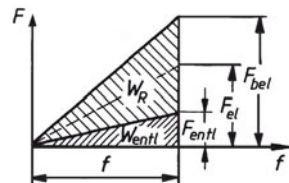
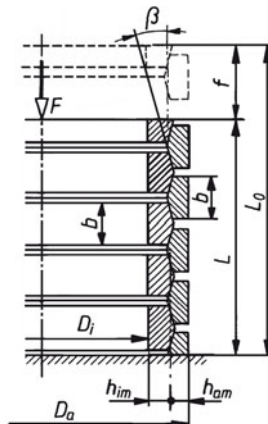
$$f = \frac{LF}{b^2 E \pi \tan \beta \tan(\beta + \varrho)} \left(\frac{D_a}{h_{am}} + \frac{D_i}{h_{im}} \right)$$

fur Belasten: $F_{bel} = F_{el} \frac{\tan(\beta + \varrho)}{\tan \beta}$

F_{el} allein von der elastischen Verformung herruhrende Federkraft

fur Entlasten: $F_{entl} = F_{el} \frac{\tan(\beta - \varrho)}{\tan \beta}$

$$F_{entl} \approx \frac{1}{3} F_{bel}; (\varrho_{entl} \leq \varrho_{bel})$$



Maschinenelemente

Federn

10.3.2.9 Zylindrische Schraubendruckfeder

$$\tau_i = \frac{8FD_m}{\pi d^3} = \frac{Gdf}{\pi i_f D_m^2} \leq \tau_{i\text{zul}}$$

$$F = \frac{d^4 G}{8i_f D_m^3}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{8FD_m}{\pi \tau_{i\text{zul}}}}$$

G Schubmodul

G_{Stahl} = 83 000 N/mm²

τ_i ideale Schubspannung

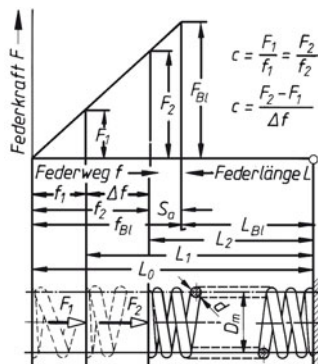
i_f Anzahl der federnden Windungen

$$f = \frac{8D_m^3 i_f F}{d^4 G}$$

$$c = \frac{d^4 G}{8i_f D_m^3}$$

$$i_f = \frac{1}{c} \cdot \frac{d^4 G}{8D_m^3}$$

$$W_f = \frac{V \tau^2}{4G}$$



$$L_{Bl} = (i_f + 1,8) d = i_g d \quad i_g = i_f + 1,8$$

$$L_0 = L_{Bl} + S_a + f_2$$

i_g Gesamtzahl der Windungen

L_{Bl} Blocklänge

S_a Summe aller Windungsabstände

Anhaltswerte für die zulässige ideale Schubspannung

Drahtdurchmesser in mm	2	4	6	8	10
$\tau_{i\text{zul}}$ in N/mm ²	900	750	670	620	570

Ermittlung der Summe der Mindestabstände S_a bei kaltgeformten Druckfedern nach DIN 2095

d mm	Berechnungsformel für S_a in mm	x-Werte in 1/mm bei Wickelverhältnis $w = \frac{D_m}{d}$			
		4 ... 6	über 6 ... 8	über 8 ... 12	über 12
0,07 ... 0,5	$0,5 d + x d^2 i_f$	0,50	0,75	1,00	1,50
über 0,5 ... 1,0	$0,4 d + x d^2 i_f$	0,20	0,40	0,60	1,00
über 1,0 ... 1,6	$0,3 d + x d^2 i_f$	0,05	0,15	0,25	0,40
über 1,6 ... 2,5	$0,2 d + x d^2 i_f$	0,035	0,10	0,20	0,30
über 2,5 ... 4,0	$1 d + x d^2 i_f$	0,02	0,04	0,06	0,10
über 4,0 ... 6,3	$1 d + x d^2 i_f$	0,015	0,03	0,045	0,06
über 6,3 ... 10	$1 d + x d^2 i_f$	0,01	0,02	0,030	0,04
über 10 ... 17	$1 d + x d^2 i_f$	0,005	0,01	0,018	0,022

Entwurfsberechnung des Drahtdurchmessers d bei gegebener größter Federkraft F_2 und geschätzten Durchmessern D_a und D_i :

$$d \approx k_1 \sqrt[3]{F_2 D_a}$$

$$d \approx k_1 \sqrt[3]{F_2 D_i} + \frac{2(k_1 \sqrt[3]{F_2 D_i})^2}{3D_i}$$

d, D_a , D_i	F_2	k_1
mm	N	1

$k_1 = 0,15$ bei $d < 5\text{mm}$ } für Federstahldraht C
 $k_1 = 0,16$ bei $d = 5\text{mm} \dots 14\text{mm}$ } (siehe Dauerfestigkeitsdiagramm)

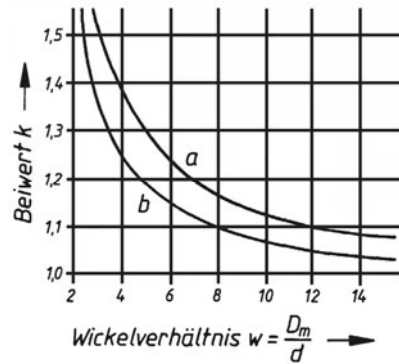
Die Gleichung $\tau_1 = 8FD_m / \pi d^3$ berücksichtigt nicht die Spannungserhöhung durch die Drahtkrümmung. Bei *schwingender* Belastung der Feder wird diese Spannungserhöhung berücksichtigt. Es gilt dann:

$$\tau_{k1} = k \frac{8F_1 D_m}{\pi d^3} = k \frac{Gd f_1}{\pi i_f D_m^2} < \tau_{kO}$$

$$\tau_{k2} = k \frac{8F_2 D_m}{\pi d^3} = k \frac{Gd f_2}{\pi i_f D_m^2} < \tau_{kH} \quad \Delta F = F_2 - F_1$$

k Beiwert nach nebenstehendem Diagramm in Abhängigkeit vom Wickelverhältnis. Kurve a für Schraubendruckfeder, Kurve b für Drehfedern

τ_{kO} Oberspannungsfestigkeit aus dem Dauerfestigkeitsdiagramm für kaltgeformte Druckfedern aus Federstahldraht C



Zusätzliche Bedingungen:

Die Hubspannung τ_{kh} (berechnet mit dem Federhub $h = f_2 - f_1 = \Delta f$) darf die Dauerhubfestigkeit τ_{kH} (siehe Diagramm) nicht überschreiten:

$$\tau_{kh} = k \frac{Gdh}{\pi i_f D_m^2} < \tau_{kH} \quad (h \text{ Federhub}) \text{ oder}$$

$$\tau_{kh} = k \frac{8\Delta F D_m}{\pi d^3} < \tau_{kH} \quad \Delta F = F_2 - F_1$$

Ebenso darf die größte Schubspannung τ_{k2} (berechnet mit dem Federweg f_2) die Oberspannungsfestigkeit τ_{kO} (siehe Diagramm) nicht überschreiten:

$$\tau_{k2} = k \frac{Gd f_2}{\pi i_f D_m^2} < \tau_{kO}$$

$$\tau_{k2} = k \frac{8F_2 D_m}{\pi d^3} < \tau_{kO}$$

Zur Überprüfung der Dauerhaltbarkeit bestimmt man aus dem Federweg f_1 oder nach

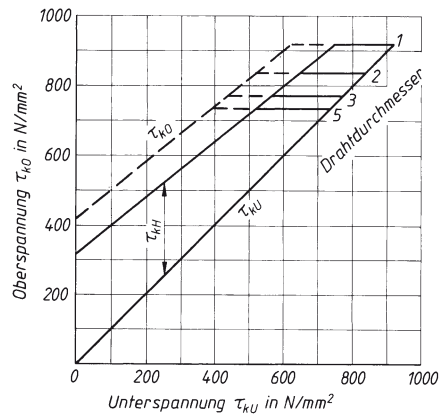
$$\tau_{k1} = k \frac{8F_1 D_m}{\pi d^3}$$

die Spannung τ_{k1} , setzt $\tau_{k1} = \tau_{kU}$ (Unterspannungsfestigkeit aus dem Diagramm und liest τ_{kO} und τ_{kH} ab.

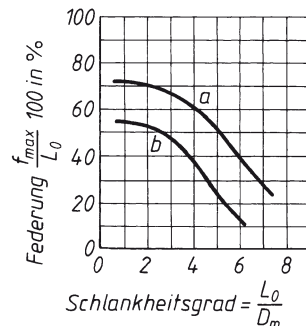
Sicherheit gegen Ausknicken ist ausreichend, wenn die geometrischen Größen im nebenstehenden Diagramm einen Schnittpunkt unterhalb der Kurven ergeben.

Kurve a: Federn mit geführten Einspannungen

Kurve b: Federn mit veränderlichen Auflagebedingungen



Dauerfestigkeitsdiagramm für kaltgeformte Druckfedern aus Federstahldraht C



Maschinenelemente

Federn

10.3.2.10 Zylindrische Schraubenzugfeder

Bei Zugfedern ohne innere Vorspannung gelten die Spannungs- und Formänderungsgleichungen wie bei Druckfedern in 10.3.2.9, ebenso die Anhaltswerte für $\tau_{i\text{zul}}$.

Bei Zugfedern mit innerer Vorspannkraft F_0 ist statt F die Differenz $F - F_0$ einzusetzen. Die innere Vorspannkraft F_0 ergibt sich aus

$$F_0 = F - f c$$

$$F_0 = F - f \frac{G d^4}{8 l_f D_m^3}$$

Damit wird nachgeprüft:

$$\tau_{i0} = \frac{8 F_0 D_m}{\pi d^3} \leq \tau_{i0\text{zul}}$$

Richtwerte für

$\tau_{i0\text{zul}}$

Herstellungsverfahren	Wickelverhältnis $w = D_m/d$		
	$w = 4 \dots 10$	$w > 10 \dots 15$	
kalt- geformt	auf Wickelbank	$0,25 \cdot \tau_{i\text{zul}}$	$0,14 \cdot \tau_{i\text{zul}}$
	auf Automat	$0,14 \cdot \tau_{i\text{zul}}$	$0,07 \cdot \tau_{i\text{zul}}$

10.3.2.11 Tellerfedern

Normen

DIN 2092 Tellerfedern, Berechnung

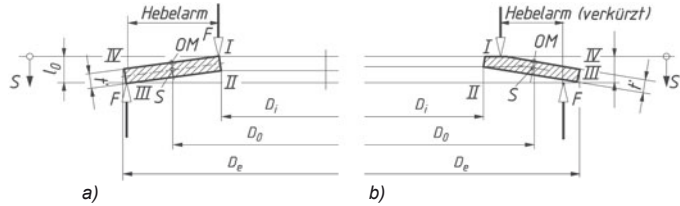
DIN 2093 Tellerfedern, Maße, Qualitätsforderungen

Formelzeichen und Einheiten

D_a, D_i	mm	Außen-, Innendurchmesser des Federtellers
D_0	mm	Durchmesser des Stülpmittelpunktkreises
E	N/mm ²	Elastizitätsmodul (für Federstahl $E = 206\,000 \text{ N/mm}^2$)
F	N	Federkraft des Einzeltellers
L_0	mm	Länge von Federsäule oder Federpaket, unbelastet
L_C	mm	berechnete Länge von Federsäule oder Federpaket, platt gedrückt
N		Anzahl der Lastspiele bis zum Bruch
R	N/mm	Federrate
W	Nmm	Federungsarbeit
$H_0 = l_0 - t, h'_0$	mm	lichte Tellerhöhe des unbelasteten Einzeltellers (Rechengröße = Federweg bis zur Plananlage) bei Tellerfedern ohne Auflagefläche, mit Auflagefläche
$S (s_1, s_2, s_3, \dots)$	mm	Federweg des Einzeltellers (bei $F_1, F_2, F_3 \dots$)
$s_{0,75}$	mm	Federweg des Einzeltellers beim Federweg $s = 0,75 h_0$
t, t'	mm	Tellerdicke, reduzierte Dicke bei Tellern mit Auflagefläche (Gruppe 3)
μ		Poisson-Zahl ($\mu = 0,3$ für Stahl)
$\sigma (\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \sigma_{OM})$	N/mm ²	rechnerische Normalspannung (für die Querschnitte nach Bild in 10.3.2.11.1)
σ_H	N/mm ²	Hubspannung bei Dauerschwingbeanspruchung der Feder
σ_0, σ_u	N/mm ²	rechnerische Oberspannung, Unterspannung bei Schwingbeanspruchung
σ_0, σ_U	N/mm ²	Ober-, Unterspannung der Dauerschwingfestigkeit
$\sigma_H = \sigma_0 - \sigma_U$	N/mm ²	Dauerhubfestigkeit

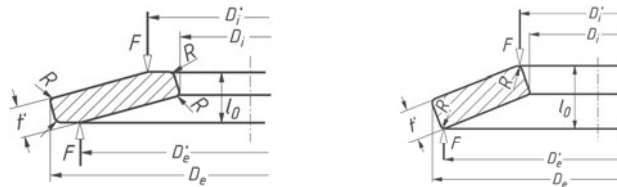
10.3.2.11.1 Maße, Begriffe und Bezeichnungen

Maße der Einzelteller

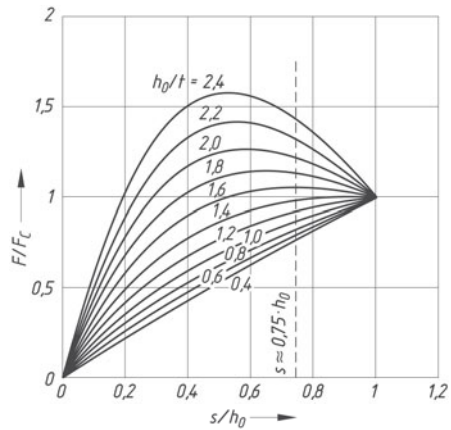


a) ohne Auflagefläche, b) mit Auflagefläche und Lage der Berechnungspunkte (I, II, III, IV, OM), I und II sind Kräfteinleitungskreise, S ist der Stülpmittelpunkt.

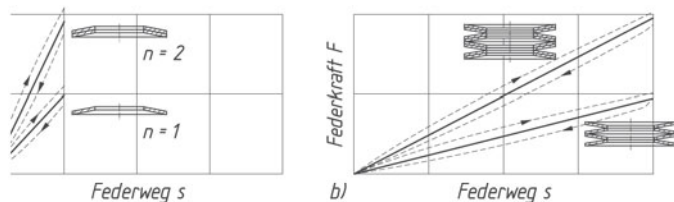
Querschnitt (schematisch) einer Tellerfeder
a) ohne Auflagefläche, b) mit Auflagefläche



Federkennlinien von Einzeltellern mit verschiedenen Verhältnissen h_0/t
 h_0/t = lichte Tellerhöhe
 h_0 /Tellerdicke t ,
(gestrichelte Ordinate gilt für Werte nach DIN 2093).



Kombinationen geschichteter Tellerfedern
a) Federpaket, b) Federsäule



Maschinenelemente

Federn

10.3.2.11.2 Berechnungen

F, s, l_0, t, h_0 siehe
10.3.2.11.3 (Tabelle)

**Berechnungsgleichungen
für die Einzeltellerfeder
Kennwerte K**

**Federkraft F bei beliebigem
Federweg s des
Einzeltellers ($s_1, s_2, s_3 \dots$)**

Federpaket mit n Anzahl der gleichsinnig geschichteten Einzelteller:

$$\begin{aligned} \text{Gesamtfederkraft} & F_{\text{ges}} = n \cdot F \\ \text{Gesamtfederweg} & s_{\text{ges}} = s \\ \text{Pakethöhe (unbelastet)} & L_0 = l_0 + (n-1) \cdot t \\ \text{Pakethöhe (belastet)} & L = L_0 - s_{\text{ges}} \end{aligned}$$

Federsäule mit Anzahl i der wechselsinnig aneinander gereihten Pakete und je n Einzelteller:

$$\begin{aligned} \text{Gesamtfederkraft} & F_{\text{ges}} = F \\ \text{Gesamtfederweg} & s_{\text{ges}} = i \cdot s \\ \text{Säulenlänge (unbelastet)} & L_0 = i \cdot [l_0 + (n-1) \cdot t] \\ & = i \cdot (h_0 + n \cdot t) \\ \text{Säulenlänge (belastet)} & L = L_0 - s_{\text{ges}} \\ & = i \cdot (h_0 + n \cdot t - s) \end{aligned}$$

$\delta = \frac{D_e}{D_i}$ Durchmesserverhältnis

$$K_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)^2}{\frac{\delta+1}{\delta-1} - \frac{2}{\ln \delta}}$$

$$K_2 = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\left(\frac{\delta-1}{\ln \delta} - 1\right)}{\ln \delta}$$

$$K_3 = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{\delta-1}{\ln \delta}$$

$$K_4 = \sqrt{-\frac{C_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_1}{2}\right)^2 + C_2}}$$

$K_4 = 1$ bei Federteller ohne Auflagefläche

$$C_1 = \frac{\left(\frac{t'}{t}\right)^2}{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{l_0}{t} - \frac{t'}{t} + \frac{3}{4}\right) \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{l_0}{t} - \frac{t'}{t} + \frac{3}{8}\right)}$$

$$C_2 = \frac{C_1}{\left(\frac{t'}{t}\right)^3} \left[\frac{5}{32} \cdot \left(\frac{l_0}{t} - 1\right)^2 + 1 \right]$$

$$F = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^4}{K_1 D_e^2} \cdot K_4^2 \frac{s}{t} \left[K_4^2 \left(\frac{h_0}{t} - \frac{s}{t}\right) \left(\frac{h_0}{t} - \frac{s}{2t}\right) + 1 \right]$$

Beachte: Für Tellerfedern der Gruppe 3 mit Auflagefläche und reduzierter Dicke t' ist in allen Gleichungen t durch t' und h_0 durch $h'_0 = l_0 - t'$ zu ersetzen.

Federkraft F_C bei platt
gedrückter Tellerfeder
($s = h_0$)

$$F_C = F h_0 = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^3 h_0}{K_1 D_e^2} \cdot K_4^2$$

Für Federstahl kann mit dem Faktor $\frac{4E}{1-\mu^2} = 905\,495 \text{ N/mm}^2$
gerechnet werden (Elastizitätsmodul $E = 206000 \text{ N/mm}^2$ und
Poisson-Zahl $\mu = 0,3$).

Rechnerische Spannungen
(negative Beträge sind
Druckspannungen)

$$\sigma_{0M} = -\frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^2}{K_1 D_e^2} \cdot K_4 \cdot \frac{s}{t} \cdot \frac{3}{\pi} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_I = -\frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^2}{K_1 D_e^2} \cdot K_4 \cdot \frac{s}{t} \cdot \left[K_4 \cdot K_2 \left(\frac{h_0}{t} - \frac{s}{2t} \right) + K_3 \right] \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{II} = -\frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^2}{K_1 D_e^2} \cdot K_4 \cdot \frac{s}{t} \cdot \left[K_4 \cdot K_2 \left(\frac{h_0}{t} - \frac{s}{2t} \right) - K_3 \right] \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{III} = -\frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^2}{K_1 D_e^2} \cdot K_4 \cdot \frac{s}{t} \cdot \left[K_4 \cdot (K_2 - 2K_3) \cdot \left(\frac{h_0}{t} - \frac{s}{2t} \right) - K_3 \right] \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{VI} = -\frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^2}{K_1 D_e^2} \cdot K_4 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{s}{t} \cdot \left[K_4 \cdot (K_2 - 2K_3) \cdot \left(\frac{h_0}{t} - \frac{s}{2t} \right) + K_3 \right] \leq \sigma_{zul}$$

Federrate R

$$R = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^3}{K_1 D_e^2} \cdot K_4^2 \cdot \left[K_4^2 \cdot \left\{ \left(\frac{h_0}{t} \right)^2 - 3 \cdot \frac{h_0}{t} \cdot \frac{s}{t} + \frac{3}{2} \left(\frac{s}{t} \right)^2 \right\} + 1 \right]$$

Federungsarbeit W

$$W = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{t^5}{K_1 D_e^2} \cdot K_4^2 \cdot \left(\frac{s}{t} \right)^2 \cdot \left[K_4^2 \left(\frac{h_0}{t} - \frac{s}{2t} \right) + 1 \right]$$

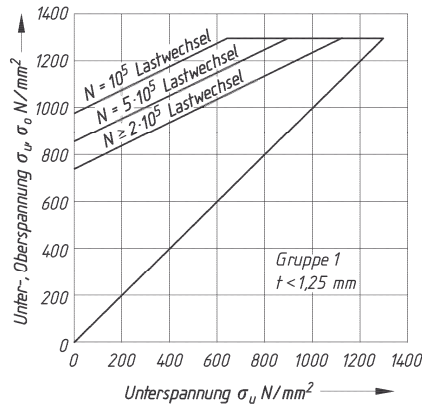
Maschinenelemente

Federn

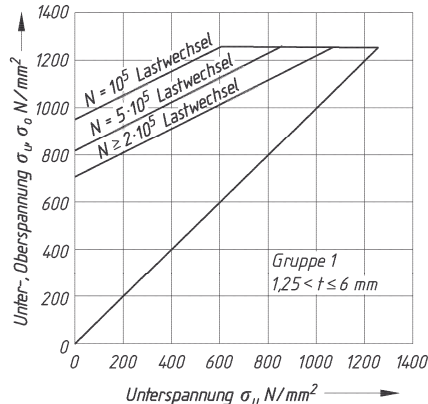
Festigkeitsnachweis bei statischer Belastung:
 Für diese und die so genannte quasistatische Belastung bei $N < 10^4$ Lastspielen wählt man die Tellerfeder aus Tabelle 10.3.2.11.3 so aus, dass die vorhandene größte Federkraft F kleiner ist als die in der Tabelle angegebene zulässige Federkraft $F_{0,75}$ bei dem Federweg $s_{0,75} = 0,75 \cdot h_0$. Die im Querschnitt I auftretende Druckspannung σ_I soll $2\ 400\ \text{N/mm}^2$ bei dem Federweg $s = 0,75 \cdot h_0 = s_{0,75}$ nicht überschreiten.

Nachweis bei schwingender Belastung (Dauerfestigkeit):

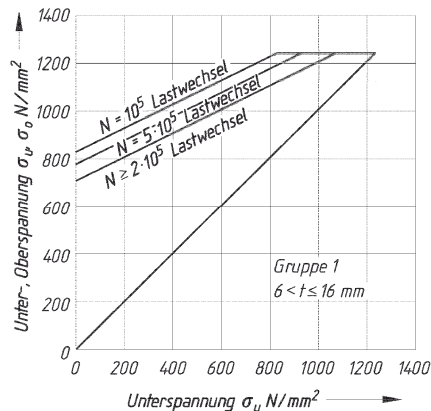
Grundlage für den Nachweis der Dauer- oder Zeitfestigkeit sind die in den dargestellten Dauerfestigkeitsdiagrammen (Goodman-Diagramme). Zur Auswertung werden die vorhandenen oberen und unteren Zugspannungen σ_{IIo} σ_{IIu} σ_{IIIo} σ_{IIIu} in den Querschnitten II und III mit den entsprechenden Gleichungen ermittelt. Diese Werte müssen kleiner sein als die Spannungshubgrenzen in den Dauerfestigkeitsdiagrammen.



Dauer- und Zeitfestigkeitsdiagramm der Tellerfedergruppe 1 mit $t < 1,25\ \text{mm}$



Dauer- und Zeitfestigkeitsdiagramm der Tellerfedergruppe 2 mit $1,25\ \text{mm} < t \leq 6\ \text{mm}$



Dauer- und Zeitfestigkeitsdiagramm der Tellerfedergruppe 3 mit $6\ \text{mm} < t < 14\ \text{mm}$

10.3.2.11.3 Original-SCHNORR ¹⁾ Tellerfedern (nach DIN 2093), erweitert

D_e Außendurchmesser

D_i Innendurchmesser

t Tellerdicke des Einzeltellers

l_0 Bauhöhe des unbelasteten Federtellers

$h_0 = l_0 - t$ Federweg bis zur Plananlage der Tellerfeder ohne Auflagefläche

h_0 = lichte Höhe am unbelasteten Einzelteller

$F_{0,75}$ Federkraft am Einzelteller bei Federweg $s_{0,75} = 0,75 \cdot h_0$

$s_{0,75}$ Federweg am Einzelteller bei $s = 0,75 \cdot h_0$

$\sigma_{OM}^{(2)}$, $\sigma_{II}^{(3)}$, σ_{III} Rechnerische Spannung an der Stelle OM, II, III (siehe Bild in 10.3.2.11.1)

1) t' ist die verringerte Tellerdicke der Gruppe 3 (Grenzabmaße nach DIN 2093, Abschnitt 6.2).

2) rechnerische Druckspannung am oberen Mantelpunkt OM (siehe Bild in 10.3.2.11.1).

3) größte rechnerische Zugspannung an der Tellerunterseite,

*) Werte gelten für die Stelle II, sonst für Stelle III (siehe Bild in 10.3.2.11.1).

Reihe							bei $s = 0,75 \cdot h_0$				bei $s \approx 1,0 \cdot h_0$
	D_e	D_i	$t (t')^{(1)}$	l_0	h_0	h_0/t	$F_{0,75}$	$s_{0,75}$	σ_{OM}	$\sigma_{II}^{(*)}, \sigma_{III}^{(*)}$	σ_{OM}
	mm	mm	mm	mm	mm		N	mm	N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²
C	8	4,2	0,2	0,45	0,25	1,25	39	0,19	- 762	1040	- 1000
B	8	4,2	0,3	0,55	0,25	0,83	119	0,19	- 1140	1330	- 1510
A	8	4,2	0,4	0,6	0,2	0,50	210	0,15	- 1200	1220	- 1610
C	10	5,2	0,25	0,55	0,3	1,20	58	0,23	- 734	980	- 957
B	10	5,2	0,4	0,7	0,3	0,75	213	0,23	- 1170	1300	- 1530
A	10	5,2	0,5	0,75	0,25	0,50	329	0,19	- 1210	1240	- 1600
C	12,5	6,2	0,35	0,8	0,45	1,29	152	0,34	- 944	1280	- 1250
B	12,5	6,2	0,5	0,85	0,35	0,70	291	0,26	- 1000	1110	- 1390
A	12,5	6,2	0,7	1	0,3	0,43	673	0,23	- 1280	1420	- 1670
C	14	7,2	0,35	0,8	0,45	1,29	123	0,34	- 769	1060	- 1020
B	14	7,2	0,5	0,9	0,4	0,80	279	0,3	- 970	1100	- 1290
A	14	7,2	0,8	1,1	0,3	0,38	813	0,23	- 1190	1340	- 1550
C	16	8,2	0,4	0,9	0,5	1,25	155	0,38	- 751	1020	- 988
B	16	8,2	0,6	1,05	0,45	0,75	412	0,34	- 1010	1120	- 1330
A	16	8,2	0,9	1,25	0,35	0,39	1000	0,26	- 1160	1290	- 1560
C	18	9,2	0,45	1,05	0,6	1,33	214	0,45	- 789	1110	- 1050
B	18	9,2	0,7	1,2	0,5	0,71	572	0,38	- 1040	1130	- 1360
A	18	9,2	1	1,4	0,4	0,40	1250	0,3	- 1170	1300	- 1560
C	20	10,2	0,5	1,15	0,65	1,30	254	0,49	- 772	1070	- 1020
B	20	10,2	0,8	1,35	0,55	0,69	745	0,41	- 1030	1110	- 1390
A	20	10,2	1,1	1,55	0,45	0,41	1530	0,34	- 1180	1300	- 1560
C	22,5	11,2	0,6	1,4	0,8	1,33	425	0,6	- 883	1230	- 1180
B	22,5	11,2	0,8	1,45	0,65	0,81	710	0,49	- 962	1080	- 1280
A	22,5	11,2	1,25	1,75	0,5	0,40	1950	0,38	- 1170	1320	- 1530
C	25	12,2	0,7	1,6	0,9	1,29	601	0,68	- 936	1270	- 1240
B	25	12,2	0,9	1,6	0,7	0,78	868	0,53	- 938	1030	- 1240
A	25	12,2	1,5	2,05	0,55	0,37	2910	0,41	- 1210	1410	- 1620
C	28	14,2	0,8	1,8	1	1,25	801	0,75	- 961	1300	- 1280
B	28	14,2	1	1,8	0,8	0,80	1110	0,6	- 961	1090	- 1280
A	28	14,2	1,5	2,15	0,65	0,43	2850	0,49	- 1180	1280	- 1560
C	31,5	16,3	0,8	1,85	1,05	1,31	687	0,79	- 810	1130	- 1080
B	31,5	16,3	1,25	2,15	0,9	0,72	1920	0,68	- 1090	1190	- 1440
A	31,5	16,3	1,75	2,45	0,7	0,40	3900	0,53	- 1190	1310	- 1570
C	35,5	18,3	0,9	2,05	1,15	1,28	831	0,86	- 779	1080	- 1040
B	35,5	18,3	1,25	2,25	1	0,80	1700	0,75	- 944	1070	- 1260
A	35,5	18,3	2	2,8	0,8	0,40	5190	0,6	- 1210	1330	- 1610
C	40	20,4	1	2,3	1,3	1,30	1020	0,98	- 772	1070	- 1020
B	40	20,4	1,5	2,65	1,15	0,77	2620	0,86	- 1020	1130	- 1360
A	40	20,4	2,25	3,15	0,9	0,40	6540	0,68	- 1210	1340	- 1600

Maschinenelemente

Federn

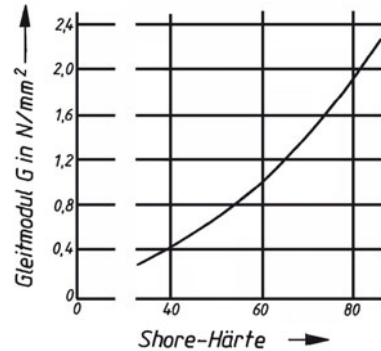
Reihe	D_e	D_i	$t(t^1)$	l_0	h_0	h_0/t	bei $s = 0,75 \cdot h_0$			bei $s = 1,0 \cdot h_0$	
							$F_{0,75}$	$s_{0,75}$	σ_{OM}	$\sigma_{II}^{+}, \sigma_{III}^{+}$	σ_{OM}
	mm	mm	mm	mm	mm		N	mm	N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²
C	45	22,4	1,25	2,85	1,6	1,28	1890	1,2	-920	1250	-1230
B	45	22,4	1,75	3,05	1,3	0,74	3660	0,98	-1050	1150	-1400
A	45	22,4	2,5	3,5	1	0,40	7720	0,75	-1150	1300	-1530
C	50	25,4	1,25	2,85	1,6	1,28	1550	1,2	-754	1040	-1010
B	50	25,4	2	3,4	1,4	0,70	4760	1,05	-1060	1140	-1410
A	50	25,4	3	4,1	1,1	0,37	12000	0,83	-1250	1430	-1660
C	56	28,5	1,5	3,45	1,95	1,30	2620	1,46	-879	1220	-1170
B	56	28,5	2	3,6	1,6	0,80	4440	1,2	-963	1090	-1280
A	56	28,5	3	4,3	1,3	0,43	11400	0,98	-1180	1280	-1570
C	63	31	1,8	4,15	2,35	1,31	4240	1,76	-985	1350	-1320
B	63	31	2,5	4,25	1,75	0,70	7180	1,31	-1020	1090	-1360
A	63	31	3,5	4,9	1,4	0,40	15000	1,05	-1140	1300	-1520
C	71	36	2	4,6	2,6	1,30	5140	1,95	-971	1340	-1300
B	71	36	2,5	4,5	2	0,80	6730	1,5	-934	1060	-1250
A	71	36	4	5,6	1,6	0,40	20500	1,2	-1200	1330	-1590
C	80	41	2,25	5,2	2,95	1,31	6610	2,21	-982	1370	-1310
B	80	41	3	5,3	2,3	0,77	10500	1,73	-1030	1140	-1360
A	80	41	5	6,7	1,7	0,34	33700	1,28	-1260	1460	-1680
C	90	46	2,5	5,7	3,2	1,28	7680	2,4	-935	1290	-1250
B	90	46	3,5	6	2,5	0,71	14200	1,88	-1030	1120	-1360
A	90	46	5	7	2	0,40	31400	1,5	-1170	1300	-1560
C	100	51	2,7	6,2	3,5	1,30	8610	2,63	-895	1240	-1190
B	100	51	3,5	6,3	2,8	0,80	13100	2,1	-926	1050	-1240
A	100	51	6	8,2	2,2	0,37	48000	1,65	-1250	1420	-1660
C	112	57	3	6,9	3,9	1,30	10500	2,93	-882	1220	-1170
B	112	57	4	7,2	3,2	0,80	17800	2,4	-963	1090	-1280
A	112	57	6	8,5	2,5	0,42	43800	1,88	-1130	1240	-1510
C	125	64	3,5	8	4,5	1,29	15400	3,38	-956	1320	-1270
B	125	64	5	8,5	3,5	0,70	30000	2,63	-1060	1150	-1420
A	125	64	8	10,6	2,6	0,41	85900	1,95	-1280	1330	-1710
C	140	72	3,8	8,7	4,9	1,29	17200	3,68	-904	1250	-1200
B	140	72	5	9	4	0,80	27900	3	-970	1110	-1290
A	140	72	8	11,2	3,2	0,49	85300	2,4	-1260	1280	-1680
C	160	82	4,3	9,9	5,6	1,30	21800	4,2	-892	1240	-1190
B	160	82	6	10,5	4,5	0,75	41100	3,38	-1000	1110	-1330
A	160	82	10	13,5	3,5	0,44	139000	2,63	-1320	1340	-1750
C	180	92	4,8	11	6,2	1,29	26400	4,65	-869	1200	-1160
B	180	92	6	11,1	5,1	0,85	37500	3,83	-895	1040	-1190
A	180	92	10	14	4	0,49	125000	3	-1180	1200	-1580
C	200	102	5,5	12,5	7	1,27	36100	5,25	-910	1250	-1210
B	200	102	8	13,6	5,6	0,81	76400	4,2	-1060	1250	-1410
A	200	102	12	16,2	4,2	0,44	183000	3,15	-1210	1230	-1610
C	225	112	6,5	13,6	7,1	1,19	44600	5,33	-840	1140	-1120
B	225	112	8	14,5	6,5	0,93	70800	4,88	-951	1180	-1270
A	225	112	12	17	5	0,51	171000	3,75	-1120	1140	-1490
C	250	127	7	14,8	7,8	1,21	50500	5,85	-814	1120	-1090
B	250	127	10	17	7	0,81	119000	5,25	-1050	1240	-1410
A	250	127	14	19,6	5,6	0,50	249000	4,2	-1200	1220	-1600

¹⁾ Adolf Schnorr GmbH + Co. KG, 71050 Sindelfingen

10.3.3 Gummifedern

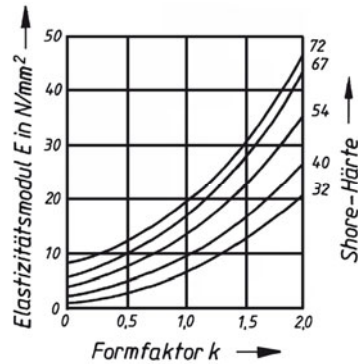
Anmerkung zu Gummifedern:

Die prozentuale Dämpfung beträgt
 $d = (W_{fzu} - W_{fab}) \cdot 100 / W_{fab} = 6 \dots 30 \%$.
 Der E-Modul aus $E = 2 G (1 + \mu) = 3 G$ (mit $\mu = 0,5$) gilt nur für Federn, bei denen keine Behinderungen an den Befestigungsstellen durch Reibung oder chemische Bindung eintritt. Die Zerreißfestigkeit beträgt etwa 15 N/mm^2 . Die Dauerfestigkeit ist abhängig von Beanspruchungsart, Gummiqualitt, Herstellungsverfahren und Form. Allseitig eingeschlossener Gummi kann nicht federn (Formfaktor $k = \infty$). Zugbeanspruchung ist bei Gummi zu vermeiden.



Richtwerte für die zulässige Spannung τ_{zul} in N/mm^2

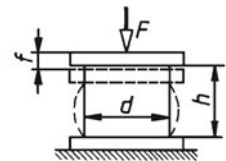
Beanspruchung	Belastung	
	statisch	dynamisch
Druck	3	± 1
Parallelschub	1,5	$\pm 0,4$
Drehschub	2	$\pm 0,7$
Verdrehschub	1,5	$\pm 0,4$



Beanspruchung: Druck

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{fE}{h} \leq \sigma_{zul} \quad f = \frac{Fh}{EA} \quad F = \frac{fEA}{h} \quad c = \frac{AE}{h}$$

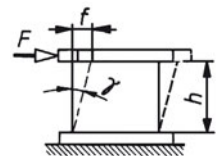
$\sigma_G \leq 3 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_A \leq \pm 1 \text{ N/mm}^2$; Gleichungen gelten für $f < 0,2 h$



Beanspruchung der Scheibenfeder: Parallelschub

$$\tau = \gamma G = \frac{F}{A} = \frac{fG}{h} \leq \tau_{zul} \quad f = \frac{Fh}{GA} \quad F = \frac{fGA}{h} \quad c = \frac{AG}{h}$$

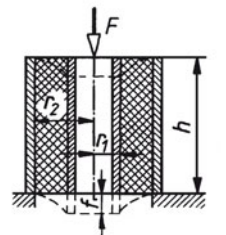
bei kleinem γ ist: $\gamma = \frac{f}{h}$ sonst: aus $\tan \gamma = \frac{f}{h} = \tan \frac{F}{AG}$; $f = h \tan \frac{F}{AG}$



Beanspruchung der Hülsenfeder: Parallelschub

$$\tau = \gamma G = \frac{F}{A} = \frac{F}{2\pi r h} \leq \tau_{zul} \quad f = \frac{F}{2\pi h G} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad c = \frac{F}{f} = \frac{2\pi h G}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\gamma = \frac{F}{2\pi r h G}$$



Maschinenelemente

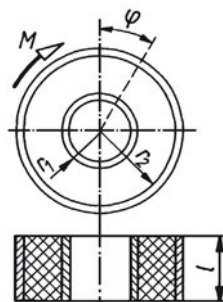
Achsen, Wellen und Zapfen

Beanspruchung der Hülsenfeder: Drehschub

$$\tau = \frac{M}{2\pi r^2 l} \leq \tau_{zul}$$

$$\varphi = \frac{M}{4\pi l G} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$

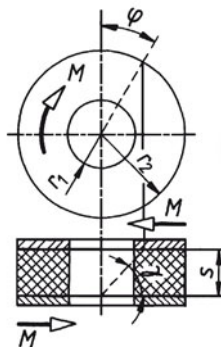
$$c = \frac{M}{\varphi} = \frac{4\pi l G}{\left(\frac{1}{r_1^2} \right) - \left(\frac{1}{r_2^2} \right)}$$



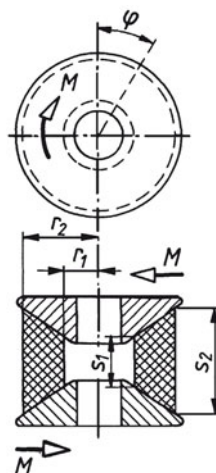
Beanspruchung der Scheibenfeder: Verdrehschub

$$\tau = \gamma G = \frac{\varphi r_2 G}{s} \leq \tau_{zul}$$

$$\gamma s \approx \varphi r$$



$$M = \frac{2\pi G \varphi}{4s} (4r_2^4 - r_1^4)$$



$$M = \frac{2}{3} \pi G \varphi (r_2^3 - r_1^3) \frac{r_2}{s_2}$$

10.4 Achsen, Wellen und Zapfen

Normen (Auswahl)

DIN 509	Freistiche
DIN 668, 670, 671	Blanker Rundstahl
DIN 669	Blanke Stahlwellen
DIN 743	Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen
DIN 748	Zylindrische Wellenenden
DIN 1448, 1449	Keglige Wellenenden mit Außen-, Innengewinde
DIN 59360	Geschliffen-polierter Rundstahl

10.4.1 Achsen

Grundlagen zur Berechnung von Achsen, Wellen und Zapfen siehe auch Abschnitt 9 Festigkeitslehre.

Maschinenelemente

Achsen, Wellen und Zapfen

10.4.2.2 Überschlägige Ermittlung der Wellendurchmesser

Beanspruchung

Bei Wellen liegt gleichzeitige Torsions- und Biegebeanspruchung vor. Durch die Zahnrad-, Riemenzug- und sonstigen Kräfte treten noch kleine, meist vernachlässigbare Schubspannungen auf. Häufig ist das Biegemoment vorerst nicht bekannt. Der Wellendurchmesser d wird dann überschlägig berechnet.

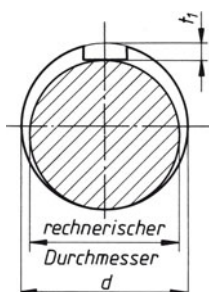
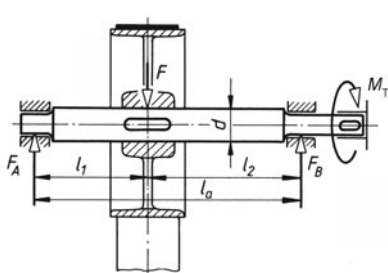
Wellendurchmesser d

$$d \approx c_1 \sqrt[3]{M_T} \approx c_2 \sqrt[3]{\frac{P}{n}}$$

d	c_1, c_2	M_T	P	n
mm	1	Nmm	kW	min ⁻¹

– nur Drehmoment M_T bzw. Leistung P und Drehzahl n bekannt –

Biegemoment M_b und Torsionsmoment M_T bekannt –



Wellenentwurf mit gleichzeitiger Torsions- und Biegebeanspruchung, Kräfte F und Längen l bekannt

Rechnerischer Wellendurchmesser

Vergleichsspannung σ_v

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + 3(\alpha_0 \tau_t)^2} \leq \sigma_{b \text{ zul}}$$

σ_b vorhandene Biegespannung
 τ_t vorhandene Torsionsspannung

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{b \text{ zul}}}{1,73 \tau_{t \text{ zul}}}$$

Anstrengungsverhältnis α_0

Man setzt $\alpha_0 \approx 1,0$, wenn σ_b und τ_t im gleichen Belastungsfall (z. B. beide wechselnd) auftreten, $\alpha_0 \approx 0,7$ wenn σ_b wechselnd und τ_t schwelend oder ruhend auftritt (häufigster Fall).
 $\sigma_{b \text{ zul}}$ zulässige Biegespannung je nach Belastungsfall, siehe Abschnitt Festigkeitslehre.
Sind Torsionsmoment und Biegemoment bekannt, dann lässt sich der Wellendurchmesser mit dem Vergleichsmoment M_V berechnen:

Vergleichsmoment M_V

$$M_V = \sqrt{M_b^2 + 0,75(\alpha_0 M_T)^2}$$

M_V, M_b, M_T	α_0
Nmm	1

Wellendurchmesser d

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_V}{0,1 \sigma_{b \text{ zul}}}}$$

d	M_V	$\sigma_{b \text{ zul}}$
mm	Nmm	$\frac{N}{\text{mm}^2}$

10.4.3 Stützkräfte und Biegemomente an Getriebewellen (siehe auch 10.6.1 Kräfte am Zahnrad)

Bezeichnungen: Umfangskraft $F_t = M/r$; Radialkraft F_r ; Axialkraft F_a ; F_V Vorspannkraft für Riemen nach 9.1; Biegemomente M_b in Nmm, alle Längenmaße l und r in mm.

resultierende Radialkraft F_{Ar} in A

$$F_{Ar} = \frac{1}{l} \sqrt{(F_r l_2 + F_a r)^2 + (F_t l_2)^2}$$

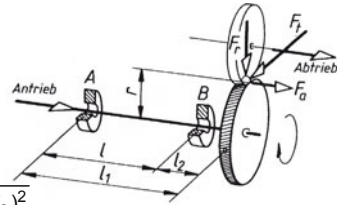
resultierende Radialkraft F_{Br} in B

$$F_{Br} = \frac{1}{l} \sqrt{(F_r l_1 + F_a r)^2 + (F_t l_1)^2}$$

maximales Biegemoment $M_{b \max}$ in B

$$M_{b \max} = F_{Ar} l = \sqrt{(F_r l_2 + F_a r)^2 + (F_t l_2)^2}$$

$$r = \frac{z_1 m_n}{2 \cos \beta}$$



Diese Gleichungen gelten für entgegengesetzten Richtungssinn der Axialkraft F_a in den obigen Gleichungen

$$F_{Ar} = \frac{1}{l} \sqrt{(F_r l_2 - F_a r)^2 + (F_t l_2)^2}$$

$$F_{Br} = \frac{1}{l} \sqrt{(F_r l_1 - F_a r)^2 + (F_t l_1)^2}$$

$$M_{b \max} = F_{Ar} l = \sqrt{(F_r l_2 - F_a r)^2 + (F_t l_2)^2}$$

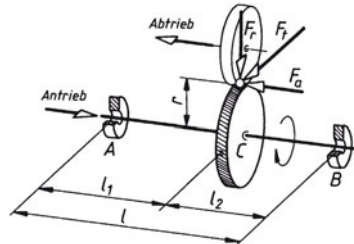
resultierende Radialkraft F_{Ar} in A

$$F_{Ar} = \frac{1}{l} \sqrt{(F_r l_2 + F_a r)^2 + (F_t l_2)^2}$$

resultierende Radialkraft F_{Br} in B

$$F_{Br} = \frac{1}{l} \sqrt{(F_r l_1 - F_a r)^2 + (F_t l_1)^2}$$

$$r = \frac{z_1 m_n}{2 \cos \beta}$$



maximales Biegemoment $M_{b \max}$ in C

$$M_{b \max 1} = F_{Ar} l_1 \quad \text{oder} \quad M_{b \max 2} = F_{Br} l_2$$

(beide Beträge ausrechnen und mit dem größeren Betrag weiterrechnen)

Diese Gleichungen gelten für entgegengesetzten Richtungssinn der Axialkraft F_a in den obigen Gleichungen

$$F_{Ar} = \frac{1}{l} \sqrt{(F_r l_2 - F_a r)^2 + (F_t l_2)^2}$$

$$F_{Br} = \frac{1}{l} \sqrt{(F_r l_1 + F_a r)^2 + (F_t l_1)^2}$$

$$M_{b \max 1} = F_{Ar} l_1 \quad \text{oder} \quad M_{b \max 2} = F_{Br} l_2$$

(beide Beträge ausrechnen und mit dem größeren Betrag weiterrechnen)

Maschinenelemente

Achsen, Wellen und Zapfen

resultierende Radialkraft
 F_{Ar} in A

$$F_{Ar} = \frac{1}{l} \sqrt{[F_r(l_2 - l_3) - F_v \cos \alpha l_3 + F_a r]^2 + [F_t(l_2 - l_3) - F_v l_3 \sin \alpha]^2}$$

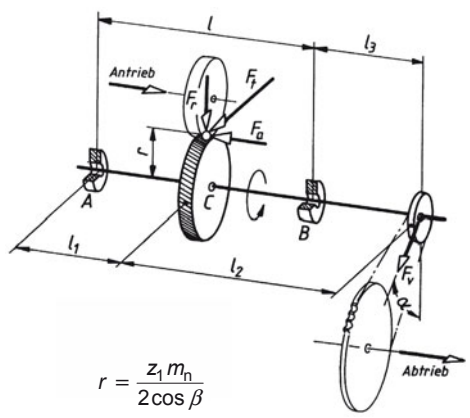
resultierende Radialkraft
 F_{Br} in B

$$F_{Br} = \frac{1}{l} \sqrt{[F_r l_1 + F_v \cos \alpha(l_1 + l_2) - F_a r]^2 + [F_t l_1 + F_v \sin \alpha(l_1 + l_2)]^2}$$

Biegemomente M_b in B
und C

$$M_{b(B)} = F_v l_3$$

$$M_{b(C)} = F_{Ar} l_1$$



resultierende Radialkraft
 F_{Ar} in A

$$F_{Ar} = \frac{1}{l} \sqrt{[F_{r1}(l_2 + l_3) - F_{r2} l_3 \cos \alpha - F_{t2} l_3 \sin \alpha - F_{a1} r_1 - F_{a2} r_2 \cos \alpha]^2 + [F_{t1}(l_2 + l_3) + F_{t2} l_3 \cos \alpha - F_{r2} l_3 \sin \alpha - F_{a2} r_2 \sin \alpha]^2}$$

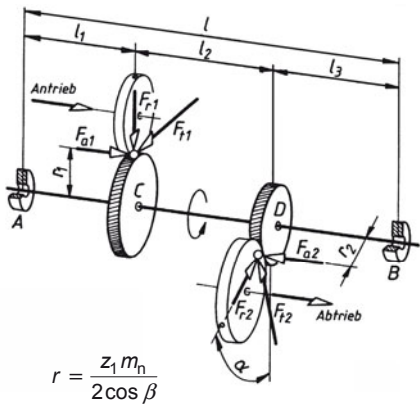
resultierende Radialkraft
 F_{Br} in B

$$F_{Br} = \frac{1}{l} \sqrt{[F_{r1} l_1 - (l_1 + l_2)(F_{t2} \sin \alpha + F_{r2} \cos \alpha) + F_{a1} r_1 + F_{a2} r_2 \cos \alpha]^2 + [F_{t1} l_1 - (l_1 + l_2)(F_{r2} \sin \alpha - F_{t2} \cos \alpha) + F_{a2} r_2 \sin \alpha]^2}$$

Biegemomente M_b in C
und D

$$M_{b(C)} = F_{Ar} l_1$$

$$M_{b(D)} = F_{Br} l_3$$



10.4.4 Berechnung der Tragfähigkeit nach DIN 743

10.4.4.1 Sicherheitsnachweis gegen Dauerbruch

Sicherheitsnachweis S gegen Dauerfestigkeit

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{z,d}}{\sigma_{z,dADK}} + \frac{\sigma_b}{\sigma_{bADK}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_t}{\tau_{tADK}}\right)^2}}$$

S	$\sigma_{z,d}$	σ_b	τ_t	$\sigma_{z,dADK}$	σ_{bADK}	τ_{tADK}
1	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	$\frac{N}{\text{mm}^2}$

$\sigma_{z,d}$, σ_b , τ_t vorhandene Zug-, Druck-, Biege- und Torsionsspannungen.

$\sigma_{z,dADK}$, σ_{bADK} , τ_{tADK} Gestalt- oder Bauteil-Ausschlagfestigkeit.

Die Indizes σ und τ fassen jeweils die Beanspruchungen Zug, Druck, Biegung (σ) bzw. Abscheren und Torsion (τ) zusammen.

Sicherheitsnachweis S bei reiner Biegebeanspruchung

$$S = \frac{\sigma_{bADK}}{\sigma_b}$$

S	σ_b	σ_{bADK}
1	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	$\frac{N}{\text{mm}^2}$

Sicherheitsnachweis S bei reiner Torsionsbeanspruchung

$$S = \frac{\tau_{tADK}}{\tau_t}$$

S	τ_t	τ_{tADK}
1	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	$\frac{N}{\text{mm}^2}$

10.4.4.2 Ermittlung der Gestaltfestigkeit

Technologischer Größeneinflussfaktor K_1

$$K_1 = 1 - 0,23 \cdot \lg\left(\frac{d_{\text{eff}}}{100 \text{ mm}}\right)$$

K_1	d_{eff}
1	mm

Für Nitrierstähle und Baustähle (nicht vergütet)

Für die Streckgrenze allgemeiner und höherfester Baustähle im nicht vergüteten Zustand gilt:

$$K_1 = 1 - 0,26 \cdot \lg\left(\frac{d_{\text{eff}}}{2 \cdot d_B}\right)$$

K_1	d_{eff}, d_B
1	mm

Für Baustähle (nicht vergütet)

Maschinenelemente

Achsen, Wellen und Zapfen

Für Vergütungsstähle und Baustähle im vergüteten Zustand, CrNiMo-Einsatzstähle im gehärteten Zustand gilt:

$$K_1 = 1 - 0,26 \cdot \lg\left(\frac{d_{\text{eff}}}{d_B}\right)$$

K_1	d_{eff}, d_B
1	mm

Für Vergütungsstähle, vergütete Baustähle und NiCrMo-Einsatzstähle (gehärtet)

Für Einsatzstähle im gehärteten Zustand außer CrNiMo-Einsatzstähle gilt:

$$K_1 = 1 - 0,41 \cdot \lg\left(\frac{d_{\text{eff}}}{d_B}\right)$$

K_1	d_{eff}, d_B
1	mm

Für Einsatzstähle (gehärtet) außer CrNiMo-Einsatzstähle

Geometrischer Einflussfaktor K_2

Dieser Faktor berücksichtigt, dass bei größer werdendem Durchmesser die Biege-wechselfestigkeit in die Zug/Druckwechselfestigkeit übergeht und die Torsionswechselfestigkeit sinkt.

Für die Zug- und Druckbeanspruchung ist $K_2 = 1$.

Für Biegungs- und Torsionsbeanspruchungen berechnet sich K_2 aus:

$$K_2 = 1 - 0,2 \cdot \frac{\lg\left(\frac{d}{7,5 \text{ mm}}\right)}{\lg 20}$$

K_2	d
1	mm

Bei Kreisringquerschnitten ist d der Außendurchmesser.

Einflussfaktor der Oberflächenrauheit $K_{F\sigma}, K_{F\tau}$

Dieser Faktor berücksichtigt den Einfluss der Oberflächen-Rauheit auf die Dauerfestigkeit von Wellen und Achsen.

Für die Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung gilt:

$$K_{F\sigma} = 1 - 0,22 \cdot \lg(Rz) \cdot \lg\left(\frac{R_m}{20} - 1\right)$$

$K_{F\sigma}, K_{F\tau}$	R_m	Rz
$\frac{N}{\text{mm}^2}$	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	μm

R_m Zugfestigkeit, $R_m \leq 2000 \frac{N}{\text{mm}^2}$

Rz gemittelte Rautiefe

Für die Torsionsbeanspruchung gilt: $K_{F\tau} = 0,575 K_{F\sigma} + 0,425$

Einflussfaktor der Oberflächenverfestigung K_V

Dieser Faktor berücksichtigt in Abhängigkeit vom Wellen- bzw. Achsendurchmesser bei einem *gekerbten* Probestab. Veränderungen von Spannung und Härte, z. B. durch Nitrieren oder Kugelstrahlen, an der Wellen- oder Achsenoberfläche (siehe DIN 743-2, Seite 13).

Nitrieren:

Für $d = 8 \text{ mm}$ bis 25 mm : $K_V = 1,15 \dots 1,25$

Für $d = 25 \text{ mm}$ bis 40 mm : $K_V = 1,10 \dots 1,15$

Einsatzhärten:

Für $d = 8 \text{ mm}$ bis 25 mm : $K_V = 1,20 \dots 2,10$

Für $d = 25 \text{ mm}$ bis 40 mm : $K_V = 1,10 \dots 1,50$

Kugelstrahlen:

Für $d = 8 \text{ mm}$ bis 25 mm : $K_V = 1,10 \dots 1,30$

Für $d = 25 \text{ mm}$ bis 40 mm : $K_V = 1,10 \dots 1,20$

**Einflussfaktor
Kerbwirkung $\beta_{\sigma, \tau}$**

Richtwerte für Kerbwirkungszahlen siehe Festigkeitslehre. Genauere und umfangreichere Werte in DIN 743-2.
Kerbwirkungszahlen für Welle-Nabe-Verbindungen werden errechnet aus

$$\beta_{\sigma} \approx 3,0 \cdot \left(\frac{R_m}{1000 \frac{N}{\text{mm}^2}} \right)^{0,38} \quad \frac{\beta_{\sigma, \tau}}{1} \quad \frac{R_m}{\frac{N}{\text{mm}^2}}$$

$$\beta_{\tau} \approx 0,56 \cdot \beta_{\sigma} + 0,1$$

Aus den vier Einflussfaktoren K_V, K_2, K_F und β wird je nach Beanspruchungsart ein Gesamteinflussfaktor $K_{\sigma, \tau}$ gebildet.

Für Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung gilt:

$$K_{\sigma} = \left(\frac{\beta_{\sigma}}{K_2} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V}$$

Für Torsionsbeanspruchung gilt:

$$K_{\tau} = \left(\frac{\beta_{\tau}}{K_2} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V}$$

Mit den Gleichungen für die Bauteil-Wechselfestigkeiten $\sigma_{z,d,bWK}$ und τ_{tWK} können die Gleichungen für die Gestaltfestigkeit definiert werden.

für Zug- und Druckbeanspruchung $\sigma_{z,dWK}$:

$$\sigma_{z,dWK} = \frac{0,4 \cdot R_m \cdot K_1}{K_{\sigma}}$$

für Biegebeanspruchung σ_{bWK} :

$$\sigma_{bWK} = \frac{0,5 \cdot R_m \cdot K_1}{K_{\sigma}} \quad \frac{\sigma_{z,dWK}, \sigma_{bWK}}{\frac{N}{\text{mm}^2}} \quad \frac{R_m}{\frac{N}{\text{mm}^2}} \quad \frac{K_1, K_{\sigma, \tau}}{1}$$

für Torsionsbeanspruchung τ_{tWK} :

$$\tau_{tWK} = \frac{0,3 \cdot R_m \cdot K_1}{K_{\tau}}$$

Bei der Berechnung der Bauteil-Wechselfestigkeit ist der Größeneinflussfaktor K_1 zu bestimmen (siehe oben).

Faktor der Mittelspannungsempfindlichkeit für Zug- und Druckbeanspruchung $\psi_{z,dK}$:

für Zug- und Druckbeanspruchung $\psi_{z,dK}$:

$$\psi_{z,dK} = \frac{\sigma_{z,dWK}}{2 \cdot K_1 \cdot R_m - \sigma_{z,dWK}}$$

$$\frac{\sigma_{z,dWK}, \sigma_{bWK}, \psi_{z,d,b,tK}}{\frac{N}{\text{mm}^2}} \quad \frac{R_m}{\frac{N}{\text{mm}^2}} \quad \frac{K_1, K_{\sigma, \tau}}{1}$$

für Biegebeanspruchung ψ_{bK} :

$$\psi_{bK} = \frac{\sigma_{bWK}}{2 \cdot K_1 \cdot R_m - \sigma_{bWK}}$$

für Torsionsbeanspruchung ψ_{tK} :

$$\psi_{tK} = \frac{\tau_{tWK}}{2 \cdot K_1 \cdot R_m - \tau_{tWK}}$$

Maschinenelemente

Achsen, Wellen und Zapfen

Vergleichsmittelspannung σ_{mv}

ergibt sich als Funktion aus der Bauteil-Fließgrenze und der Mittelspannungsempfindlichkeit.

$$\sigma_{mv} = \frac{(K_1 \cdot K_{2F} \cdot \gamma_F \cdot R_e) - \sigma_{z,d,bWK}}{1 - \psi_{z,d,bWK}}$$

Vergleichsmittelspannung τ_{mv}

$$\tau_{mv} = \frac{(K_1 \cdot K_{2F} \cdot \gamma_F \cdot R_e) - \tau_{tWK}}{\sqrt{3} \cdot (1 - \psi_{tWK})}$$

- K_1 Technologischer Größeneinflussfaktor nach Gleichung in 10.4.4.2
- K_{2F} Faktor für die statische Stützwirkung; bei einer Vollwelle für Biegung und Torsion ist $K_{2F} = 1,2$, bei einer Hohlwelle für Biegung und Torsion ist $K_{2F} = 1,05$
- γ_F Erhöhungsfaktor der Fließgrenze R_e ; für Biegebeanspruchung ist $\gamma_F = 1,1$, für Torsionsbeanspruchung ist $\gamma_F = 1,0$

Gestaltfestigkeit

für Zug- und Druckbeanspruchung $\sigma_{z,d,ADK}$:

$$\sigma_{z,d,ADK} = \sigma_{z,dWK} - \psi_{z,dK} \cdot \sigma_{mv}$$

für Biegebeanspruchung $\sigma_{b,ADK}$:

$$\sigma_{b,ADK} = \sigma_{bWK} - \psi_{bK} \cdot \sigma_{mv}$$

für Torsionsbeanspruchung $\tau_{t,ADK}$:

$$\tau_{t,ADK} = \tau_{tWK} - \psi_{tK} \cdot \tau_{mv}$$

10.4.4.3 Sicherheitsnachweis gegen Fließgrenze

Sicherheit S bei gleichzeitigem Auftreten von Zug, Druck und Torsion

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{z,d,max}}{\sigma_{z,dFK}} + \frac{\sigma_{b,max}}{\sigma_{bFK}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{t,max}}{\tau_{tFK}}\right)^2}}$$

$\sigma_{z,d,max}$, $\sigma_{b,max}$, $\tau_{t,max}$ vorhandene Maximalspannungen infolge der Betriebsbelastung. $\sigma_{z,dFK}$, σ_{bFK} , τ_{tFK} Bauteil-Fließgrenze für die jeweilige Beanspruchung.

Sicherheit S bei reiner Biegebeanspruchung

$$S = \frac{\sigma_{bFK}}{\sigma_{b,max}}$$

S	$\frac{\sigma_{b,max}}{mm^2}$	$\frac{\sigma_{bFK}}{mm^2}$
1	$\frac{N}{mm^2}$	$\frac{N}{mm^2}$

Sicherheit S bei reiner Torsionsbeanspruchung

$$S = \frac{\tau_{tFK}}{\tau_{t,max}}$$

S	$\frac{\tau_{t,max}}{mm^2}$	$\frac{\tau_{tFK}}{mm^2}$
1	$\frac{N}{mm^2}$	$\frac{N}{mm^2}$

10.4.4.4 Ermittlung der Bauteil-Fließgrenze $\sigma_{z,b,dFK}$ und τ_{tFK}

Bauteil-Fließgrenze $\sigma_{z,b,dFK}$ für Zug-, Druck- und Biegebeanspruchung

$$\sigma_{z,b,dFK} = K_1 \cdot K_{2F} \cdot \gamma_F \cdot R_e$$

$\sigma_{z,d,bFK}, \tau_{tFK}$	R_e	K_1, K_{2F}, γ_F
$\frac{N}{mm^2}$	$\frac{N}{mm^2}$	$\frac{N}{mm^2}$

$$\tau_{tFK} = \frac{(K_1 \cdot K_{2F} \cdot \gamma_F \cdot R_e)}{\sqrt{3}}$$

$\sigma_{z,d,bFK}, \tau_{tFK}$	R_e	K_1, K_{2F}, γ_F
$\frac{N}{mm^2}$	$\frac{N}{mm^2}$	$\frac{N}{mm^2}$

Bauteil-Fließgrenze τ_{tFK} für Torsionsbeanspruchung

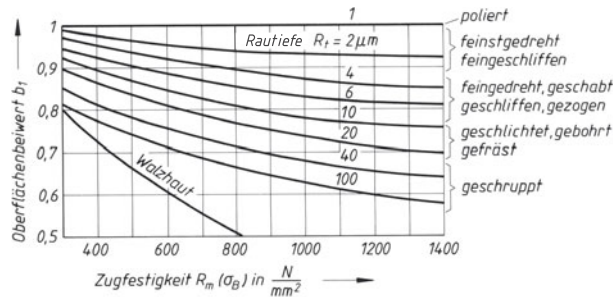
K_1 Technologischer Größeneinflussfaktor K_1 nach Gleichung in 10.4.4.2

K_{2F} Faktor für die statische Stützwirkung; bei einer Vollwelle für Biegung und Torsion ist $K_{2F} = 1,2$ bei einer Hohlwelle für Biegung und Torsion ist $K_{2F} = 1,05$

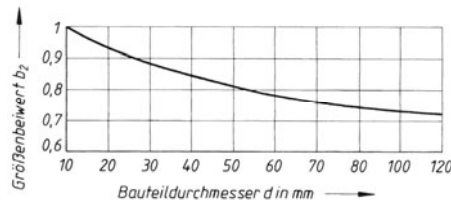
γ_F Erhöhungsfaktor der Fließgrenze R_e , für Biegebeanspruchung ist $\gamma_F = 1,1$, für Torsionsbeanspruchung ist $\gamma_F = 1,0$

R_e Streckgrenze nach DIN 743-3. Bei gehärteter Randschicht gelten die Werte für den weicheren Kern.

10.4.4.5 Oberflächenbeiwert b_1 für Kreisquerschnitte



10.4.4.6 Größenbeiwert b_2 für Kreisquerschnitte



Für andere Querschnittsformen kann etwa gesetzt werden:
bei Biegung für Quadrat: Kantenlänge $\approx d$; für Rechteck: in Biegebene liegende Kantenlänge $\approx d$
bei Verdrehung für Quadrat und Rechteck: Flächendiagonale $\approx d$

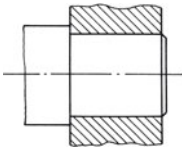
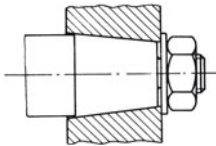
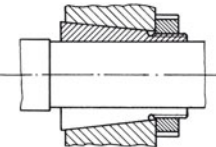
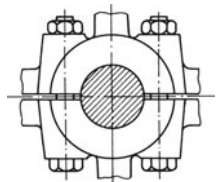
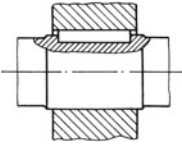
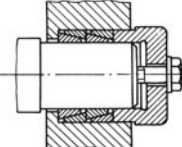
Maschinenelemente

Nabenverbindungen

10.5 Nabenverbindungen

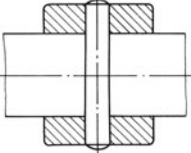
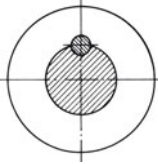
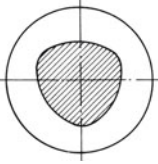
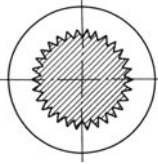
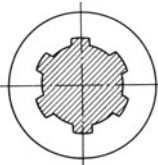
10.5.1 Kraftschlüssige (reibschlüssige) Nabenverbindungen (Beispiele)

Hauptvorteil: Spielfreie Übertragung wechselnder Drehmomente

Pressverbände (Presssitzverbindungen)	
 <p>zylindrischer Pressverband</p>	<p>Vorwiegend für nicht zu lösende Verbindung und zur Aufnahme großer, wechselnder und stoßartiger Drehmomente und Axialkräfte: <i>Verbindungsbeispiele:</i> Riemenscheiben, Zahnräder, Kupplungen, Schwungräder im Großmaschinenbau, aber auch in der Feinwerktechnik.</p> <p>Ausführung als Längs- und Querpressverband (Schrumpfverbindung). Besonders wirtschaftliche Verbindungsart.</p>
 <p>kegliger Pressverband (Wellenkegel)</p>	<p>Leicht lösbare und in Drehrichtung nachstellbare Verbindung auf dem Wellenende zur Aufnahme großer, wechselnder und stoßartiger Drehmomente.</p> <p>Verbindungsbeispiele: Wie beim zylindrischen Pressverband, außerdem bei Werkzeugen und in den Spindeln von Werkzeugmaschinen und bei Wälzlagern mit Spannhülse und Abziehhülse.</p>
 <p>kegliger Pressverband (Kegelbuchse)</p>	<p>Wegen der Herstellwerkzeuge und der Lehren möglichst genormte Kegel verwenden (siehe keglige Wellenenden mit Kegel 1 : 10 nach DIN 1448). Die Naben werden durch Schrauben oder Muttern aufgepresst, die Werkzeuge durch die Axialkraft beim Fertigen (zum Beispiel Bohrer). Kegelbuchsen sind meist geschlitzt.</p>
 <p>geteilte Nabe</p>	Klemmsitzverbindung
	<p>Leicht lösbare und in Längs- und Drehrichtung nachstellbare Verbindung zur Aufnahme wechselnder kleinerer Drehmomente. Bei größerer Drehmomentenaufnahme werden zusätzlich Passfedern oder Tangentkeile angebracht.</p> <p><i>Verbindungsbeispiele:</i> Riemen- und Gurtscheiben, Hebel auf glatten Wellen. Die Nabe ist geschlitzt oder geteilt.</p>
 <p>Einlegekeil</p>	Keilsitzverbindung
	<p>Lösbare Verbindung zur Aufnahme wechselnder Drehmomente. Kleinere Drehmomentenaufnahme beim Flach- und Hohlkeil, große und stoßartige Drehmomentenaufnahme beim Tangentkeil. Die Keilneigung beträgt meistens 1 : 100.</p> <p><i>Verbindungsbeispiele:</i> Schwere Scheiben, Räder und Kupplungen im Bagger- und Landmaschinenbau, insgesamt bei schwererem und rauem Betrieb.</p> <p>Die Verbindung mit dem Hohlkeil ist nachstellbar.</p>
 <p>Ringfederspannelement</p>	Ringfeder-Spannverbindung
	<p>Leicht lösbare und in Längs- und Drehrichtung nachstellbare Verbindung zur Aufnahme großer, wechselnder und stoßartiger Drehmomente. Das übertragbare Drehmoment ist abhängig von der Anzahl der Spannelemente.</p> <p>Hierzu sind die Angaben der Herstellerfirmen zu beachten, zum Beispiel Fa. Ringfeder GmbH, Krefeld-Uerdingen.</p>

10.5.2 Formschlüssige Nabenverbindungen (Beispiele)

Hauptvorteil: Lagesicherung

 <p>Querstiftverbindung</p>	<p style="text-align: center;">Stiftverbindungen</p> <p>Lösbare Verbindung zur Aufnahme meist richtungskonstanter kleinerer Drehmomente. <i>Verbindungsbeispiele:</i> Bunde an Wellen, Stellringe, Radnaben, Hebel, Buchsen.</p> <p>Verwendet werden Kegelstifte nach DIN 1 mit Kegel 1 : 50, Zylinderstifte nach DIN 7, für hochbeanspruchte Teile auch gehärtete Zylinderstifte nach DIN 6325. Hinzu kommen Kerbstifte und Spannhülsen</p>
 <p>Längsstiftverbindung</p>	<p style="text-align: center;">Passfederverbindung</p> <p>Leicht lösbare und verschiebbare Verbindung zur Aufnahme richtungskonstanter Drehmomente. <i>Verbindungsbeispiele:</i> Riemscheiben, Kupplungen, Zahnräder. Gegen axiales Verschieben ist eine zusätzliche Sicherung vorzusehen (Wellenbund, Axialsicherungsring). <i>Gleitpassfedern</i> werden zum Beispiel bei Verschieberädern in Getrieben verwendet.</p>
 <p>Polygonprofil</p>	<p style="text-align: center;">Profilwellenverbindungen</p> <p>Profilwellenverbindungen sind Formschlussverbindungen für hohe und höchste Belastungen. Das <i>Polygonprofil</i> ist nicht genormt. Hierzu sind die Angaben der Hersteller zu verwenden, zum Beispiel: Fortuna-Werke, Stuttgart-Bad Cannstadt oder Fa. Manurhin K'MX, Mühlhausen (Elsass).</p>
 <p>Kerbzahnprofil</p>	<p>Das <i>Kerbzahnprofil</i> ist nach DIN 5481 genormt. Die Verbindung ist leicht lösbar und feinverstellbar. Verwendung zum Beispiel bei Achsschenkeln und Drehstabfedern an Kraftfahrzeugen. Ein Sonderfall ist die Stirnverzahnung (Hirthverzahnung) als Plan-Kerbverzahnung.</p>
 <p>Vielnutprofil</p>	<p>Das <i>Vielnutprofil</i> ist als „Keilwellenprofil“ genormt. Die Bezeichnung „Keilwellenprofil“ ist irreführend, weil die Wirkungsweise der Passfederverbindung (Formschluss) entspricht, nicht aber der Keilverbindung. Die Verbindung ist leicht lösbar und verschiebbar. Verwendung zum Beispiel bei Verschieberädergetrieben, bei Kraftfahrzeugkupplungen und Antriebswellen von Fahrzeugen.</p>

Maschinenelemente

Nabenverbindungen

10.5.3 Zylindrische Pressverbände

Normen (Auswahl)

- DIN 7190 Berechnung und Anwendung von Pressverbänden
- DIN 4766 Ermittlung der Rauheitsmessgrößen R_a, R_z, R_{max}

10.5.3.1 Begriffe bei Pressverbänden

Der Pressverband

ist eine kraftschlüssige (reibschlüssige) Nabenverbindung ohne zusätzliche Bauteile wie Passfedern und Keile. Außenteil (Nabe) und Innenteil (Welle) erhalten eine Presspassung, sie haben also vor dem Fügen immer ein Übermaß U . Nach dem Fügen stehen sie unter einer Normalspannung σ mit dem Fugendruck p in der Fuge.

Die Presspassung

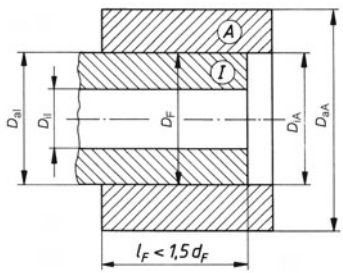
ist eine Passung, bei der immer ein Übermaß U vorhanden ist. Das Höchstmaß der Bohrung ist daher also kleiner als das Mindestmaß der Welle. Zur Presspassung zählt auch der Fall $U = 0$.

Herstellen von Pressverbänden (Fügeart)

durch Einpressen (Längseinpressen des Innenteils): Längspressverband
 durch Erwärmen des Außenteils (Schrumpfen des Außenteils)
 durch Unterkühlen des Innenteils (Dehnen des Innenteils)
 durch hydraulisches Fügen und Lösen (Dehnen des Außenteils)

Durchmesser Bezeichnungen und Fugenlänge l_F

- D_F Fugendurchmesser (ungefähr gleich dem Nenndurchmesser der Passung)
- D_{il} Innendurchmesser des Innenteils I (Welle)
- D_{al} Außendurchmesser des Innenteils $I, D_{al} \approx D_F$
- D_{aA} Außendurchmesser des Außenteils A
- D_{iA} Innendurchmesser des Außenteils A (Nabe), $D_{iA} \approx D_F$
- l_F Fugenlänge ($l_F < 1,5 D_F$)



Durchmesserverhältnis Q

$$Q_A = \frac{D_F}{D_{aA}} < 1 \quad Q_I = \frac{D_{il}}{D_F} < 1$$

Das Übermaß U

ist die Differenz des Außendurchmessers des Innenteils I und des Innendurchmessers des Außenteils A :

$$U = D_{al} - D_{iA}$$

Die Glättung G

ist der Übermaßverlust ΔU , der beim Fügen durch Glätten der Fügeflächen auftritt:

$$G \approx 0,8 (R_{ziA} + R_{zai}) \quad R_z \text{ gemittelte Rautiefe nach DIN 4768 Teil 1}$$

Wirksames Übermaß U_W
(Haftmaß), wirksames

ist das um $G = \Delta U$ verringerte Übermaß, also das Übermaß nach dem Fügen:

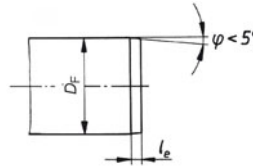
$$U_W = U - G$$

Fugendruck p

ist die nach dem Fügen in der Fuge auftretende Flächenpressung.

Fasenlänge l_e und
Fasenwinkel φ

$$l_e = \sqrt[3]{D_F}$$



10.5.3.2 Berechnen von
Pressverbänden

Erforderlicher
Fugendruck p
(Pressungsgleichung)
und zulässige
Flächenpressung p_{zul}

$$p \geq \frac{2M}{\pi D_F^2 l_F \nu} \leq p_{zul}$$

M	D_F, l_F	ν	P	n	p
Nmm	mm	1	kW	min ⁻¹	$\frac{N}{mm^2}$

$$M_H = F_H \frac{D_F}{2} = \frac{\pi}{2} p D_F^2 l_F \nu \geq M$$

M Wellendrehmoment

$$M = 9,55 \cdot 10^6 \frac{P}{n}$$

D_F Fugendurchmesser

l_F Fugenlänge

ν Haftbeiwert

p_{zul} zulässige

Flächenpressung

Anhaltswerte für p_{zul}

Belastung	Stahl	Gusseisen
ruhend und schwelend	$p_{zul} = \frac{R_e}{1,5}$	$p_{zul} = \frac{R_e}{3}$
wechselnd und stoßartig	$p_{zul} = \frac{R_e}{2,5}$	$p_{zul} = \frac{R_e}{4}$

R_e (oder $R_{p0,2}$) sowie R_m aus den Dauerfestigkeitsdiagrammen

Haftbeiwert ν und
Rutschbeiwert ν_e
(Mittelwerte)

Der Rutschbeiwert ν_e wird
zur Berechnung der
Einpresskraft F_e gebraucht.

Längspressverband

Werkstoffe Welle/Nabe	Haftbeiwert ν	
	trocken	Rutschbeiwert ν_e geschmiert
Stahl/Stahl	0,1 (0,1)	0,08 (0,06)
Stahl/Stahlguss		
Stahl/Gusseisen	0,12 (0,1)	0,06
Stahl/Guss	0,07 (0,03)	0,05

Querpressverband

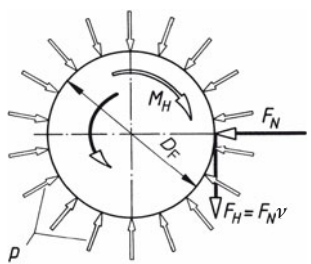
Werkstoffe, Fügeart, Schmierung		Haftbeiwert ν
Stahl/Stahl	hydraulisches Fügen, Mineralöl	0,12
Stahl/Stahl	hydraulisches Fügen, entfettete Fügeflächen	0,18
	Glyzerin – aufgetragen	
Stahl/Stahl	Schrumpfen des Außenteils	0,14
Stahl/Gusseisen	hydraulisches Fügen, Mineralöl	0,1
Stahl/Gusseisen	hydraulisches Fügen, entfettete Fügeflächen	0,16

Maschinenelemente

Nabenverbindungen

**Herleitung der Pressungs-
gleichung**

Normalkraft $F_N = p A_F = p \pi D_F l_F$
 Fugenfläche $A_F = \pi D_F l_F$
 Haftkraft $F_H = F_N v = p \pi D_F l_F v$
 Normalkraft $F_N = p A_F = p \pi D_F l_F$



Haftmoment
 $M_H = F_H \frac{D_F}{2} = \frac{\pi}{2} p D_F^2 l_F v \geq M$
 $p = \frac{2M}{\pi D_F^2 l_F v} \leq p_{zul}$

M Drehmoment, M_H Haftmoment
 F_N Normalkraft, F_H Haftkraft -
 (Reibkraft)

p	M	D_F, l_F	v
$\frac{N}{mm^2}$	Nmm	mm	1

**Formänderungs-
Hauptgleichung für
Pressverbände**

$$U_w = p D_F \left[\frac{1}{E_A} \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \mu_A \right) + \frac{1}{E_I} \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \mu_I \right) \right]$$

U_w	p, E_A, E_I	Q_A, Q_I, μ_A, μ_I
mm	$\frac{N}{mm^2}$	1

- U_w wirksames Übermaß nach dem Fügen (auch Haftmaß genannt)
- p Fugendruck (Flächenpressung in den Fügeflächen)
- l_F Fugenlänge
- E_A, E_I Elastizitätsmodul des Außenteils; A (Nabe) und des Innenteils I (Welle)
- μ_A, μ_I Querdehnzahl des Außenteils A (Nabe) und des Innenteils I (Welle)
- Q_A, Q_I , Durchmesserverhältnis: $Q_A = D_F / D_{aA} < 1$ $Q_I = D_{II} / D_F < 1$

Die Querdehnzahl μ ist das Verhältnis der Querdehnung ϵ_q eines zugbeanspruchten Stabes zur Längsdehnung ϵ ($\mu = \epsilon_q / \epsilon$) und hat somit die Einheit 1. Die Querdehnung ist immer kleiner als die Längsdehnung, ($\mu < 1$).
 (Beispiel: $\mu_{Stahl} \approx 0,3$).

**Elastizitätsmodul E
und Querdehnzahl μ
(Mittelwerte)**

Werkstoff	Elastizitätsmodul E $\frac{N}{mm^2}$	Querdehnzahl μ Einheit 1
Stahl	210 000	0,3
EN-GJL-200	105 000	0,25
EN-GJS-500-7	150 000	0,28
Bronze, Cu-Leg.	80 000	0,35
Al-Legierungen	70 000	0,33

Formänderungsgleichungen für Pressverbände mit Vollwelle ($Q_I = D_{II}/D_F = 0$)

$$U_W = p D_F \left[\frac{1}{E_A} \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \mu_A \right) + \frac{1}{E_I} (1 - \mu_I) \right]$$

U_W, D_F	p, E_A, E_I	Q_A, Q_I, μ_A, μ_I
mm	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	1

Formänderungsgleichung für Vollwelle und gleichelastische Werkstoffe ($E_A = E_I = E$)

$$U_W = \frac{2p D_F}{E(1-Q_A^2)}$$

U_W, D_F	p, E	Q_A
mm	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	1

Übermaß U

$$U = U_W + G$$

gemessenes Übermaß vor dem Fügen = wirksames Übermaß (Haftmaß) + Glättung (Übermaßverlust ΔU beim Fügen der Teile)

Glättung G

$$G = 0,8 (R_{zAi} + R_{zIa}) \quad R_z \text{ gemittelte Rautiefe nach DIN 4166}$$

Beispiele für G (Mittelwerte):

polierte Oberfläche	$G = 0,002 \text{ mm} = 2 \mu\text{m}$
feingeschliffene Oberfläche	$G = 0,005 \text{ mm} = 5 \mu\text{m}$
feingedrehte Oberfläche	$G = 0,010 \text{ mm} = 10 \mu\text{m}$

Einpresskraft F_e

$$F_e = p_g \pi D_F l_F v_e$$

Herleitung der Gleichung:

p_g größter vorhandener Fugendruck

$$F_R = F_N v_e$$

D_F Fugendurchmesser

$$F_N = p_g A_F$$

l_F Fugenlänge

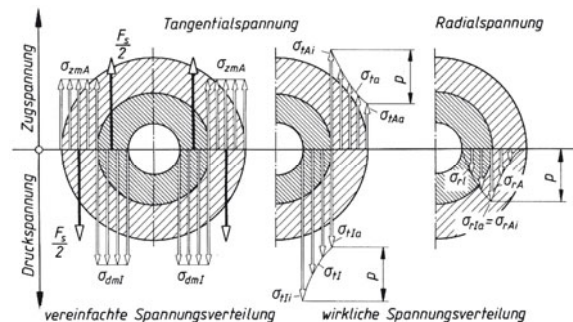
$$A_F = \pi D_F l_F$$

v_e Rutschbeiwert

$$F_e = F_R = p_g \pi D_F l_F v_e$$

F_e	p_g	D_F, l_F	v_e
N	$\frac{N}{\text{mm}^2}$	mm	1

Spannungsverteilung im Pressverband (Spannungsbild)



- σ_{zmA} mittlere tangentielle Zugspannung im Außenteil
- σ_{dml} mittlere tangentielle Druckspannung im Innenteil
- F_S Nabensprengkraft
- σ_{tA} Tangentialspannung im Außenteil
- σ_{rA} Radialspannung im Außenteil
- σ_{tI} Tangentialspannung im Innenteil
- σ_{rI} Radialspannung im Innenteil

Für Übersichtsrechnungen kann man sich die Tangentialspannungen σ_{rA} und σ_{tI} gleichmäßig verteilt vorstellen (σ_{zmA} und σ_{dml})

Maschinenelemente

Nabenverbindungen

Spannungsgleichungen
(siehe Spannungsbild)

Tangentialspannung σ_t		Radialspannung σ_r	
Außenteil	Innenteil	Außenteil	Innenteil
$\sigma_{t Ai} = p \frac{1 + Q_A^2}{1 - Q_A^2}$	$\sigma_{t Ii} = p \frac{2}{1 - Q_I^2}$	$\sigma_{r Ai} = p$	$\sigma_{r Ii} = 0$
$\sigma_{t Aa} = p \frac{2Q_A^2}{1 - Q_A^2}$	$\sigma_{t Ia} = p \frac{1 + Q_A^2}{1 - Q_A^2}$	$\sigma_{r Aa} = 0$	$\sigma_{r Ia} = p$

Nabensprengkraft F_S

$$F_S = p D_F l_F$$

**Mittlere tangentielle
Zugspannung σ_{zmA}**
(siehe Spannungsbild)

$$\sigma_{zmA} = \frac{F_S}{A_{Nabe}} = \frac{p D_F l_F}{(D_{aA} - D_{iA}) l_F}$$

$$\sigma_{zmA} = \frac{p D_F}{D_{aA} - D_{iA}} \approx \frac{p D_F}{D_{aA} - D_F}$$

**Mittlere tangentielle
Druckspannung σ_{dml}**
(siehe Spannungsbild)

$$\sigma_{dml} = \frac{F_S}{A_{Welle}} = \frac{p D_F l_F}{(D_F - D_{ii}) l_F}$$

$$\sigma_{dml} = \frac{p D_F}{D_F - D_{ii}}$$

Für die Vollwelle gilt mit $D_{ii} = 0$:

$$\sigma_{dml} = \frac{p D_F}{D_F - 0} = p$$

**Fügetemperatur $\Delta\vartheta$ für
Schrumpfen**

$$\Delta\vartheta = \frac{U + U_{S\vartheta}}{\alpha D_F} \quad U_{S\vartheta} \geq \frac{D_F}{1000}$$

U Übermaß in mm

$U_{S\vartheta}$ erforderliches Fügspiel in mm

α Längenausdehnungskoeffizient des Werkstoffs:

$$\alpha_{\text{Stahl}} = 11 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$$

$$\alpha_{\text{Gusseisen}} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$$

Herleitung einer Gleichung:

Mit dem Längenausdehnungskoeffizienten α in $\text{m}/(\text{m } ^\circ\text{C}) = 1/^\circ\text{C}$ beträgt die Verlängerung Δl eines Metallstabes der Ursprungslänge l_0 bei seiner Erwärmung um die Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$:

$$\Delta l = \alpha \Delta\vartheta l_0.$$

Für den Außenteil (Nabe) eines Pressverbands ist $\Delta l = U + U_{S\vartheta}$ und $l_0 = D_F$.

Damit wird analog zu $\Delta l = \alpha \Delta\vartheta l_0$:

$$U + U_{S\vartheta} = \alpha \Delta\vartheta D_F$$

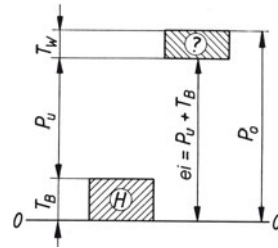
und daraus die obige Gleichung für $\Delta\vartheta$.

10.5.3.4 Festlegen einer Übermaßpassung (Presspassung)

Bei Einzelfertigung führt man die Nabenbohrung aus und fertigt nach deren Istmaß die Welle für das errechnete Übermaß U .

Bei Serienfertigung müssen größere Toleranzen zugelassen werden.

Man muss also eine Übermaßpassung festlegen. Eine Auswahl der ISO-Toleranzlagen und -Qualitäten zeigt Tabelle 10.1.13 für das im Maschinenbau übliche System der Einheitsbohrung. Da sich kleinere Toleranzen bei Wellen leichter einhalten lassen als bei Bohrungen, wählt man zweckmäßig:



- Bohrung H7 mit Wellen der Qualität 6
- Bohrung H8 mit Wellen der Qualität 7 usw.

Liegt ein Toleranzfeld für die Bohrung vor, zum Beispiel H7, findet man das Toleranzfeld für eine Welle folgendermaßen:

Das errechnete Übermaß wird gleich dem Kleinstübermaß P_u gesetzt und die Toleranz der Bohrung T_B addiert.

Damit hat man das vorläufige untere Abmaß einer Welle:

$$e_i = P_u + T_B \quad P_u = U$$

Mit diesem Wert geht man in der Tabelle 10.1.14 in die Zeile für den vorliegenden Nennmaßbereich und wählt dort für die vorher festgelegte Qualität ein Toleranzfeld für die Welle, bei dem das angegebene untere Abmaß dem errechneten am nächsten kommt (siehe Beispiel).

Beispiel:

Nennmaßbereich	35 mm
Toleranzfeld für die Bohrung	H7
Qualität für die Welle	6
Toleranz der Bohrung T_B	= 25 μm
errechnetes Übermaß U	= 60 $\mu\text{m} = P_u$

unteres Abmaß der Welle: $e_i = P_u + T_B = 60 \mu\text{m} + 25 \mu\text{m} = 85 \mu\text{m}$

Toleranzfeld der Welle: x 6 mit $e_i = 80 \mu\text{m}$ und $e_s = 96 \mu\text{m}$

Damit können die Höchstpassung P_o und die Mindestpassung P_u berechnet werden:

$$P_o = E_i - e_s = 25 \mu\text{m} - 80 \mu\text{m} = -55 \mu\text{m}$$

$$P_u = E_S - e_i = 0 - 96 \mu\text{m} = -96 \mu\text{m}$$

Maschinenelemente

Nabenverbindungen

10.5.4 Keglige Pressverbände (Kegelsitzverbindungen)

Normen (Auswahl)

DIN 254	Kegel
DIN 1448, 1449	Keglige Wellenenden
DIN 7178	Kegeltoleranz- und Kegelpasssystem
ISO 3040	Eintragung von Maßen und Toleranzen für Kegel

10.5.4.1 Begriffe am Kegel

Kegelmaße:

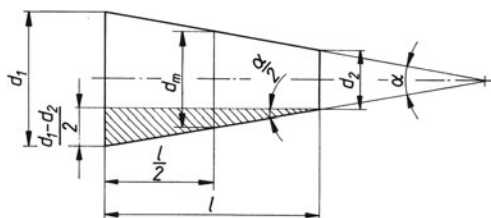
Kegel sind im technischen Sinn sind kegliche Werkstücke mit Kreisquerschnitt (spitze Kegel und Kegelstümpfe).

Bezeichnung eines Kegels mit dem Kegelwinkel

$$\alpha = 30^\circ - \text{Kegel } 30^\circ$$

Bezeichnung eines Kegels mit dem Kegelverhältnis

$$C = 1 : 10 - \text{Kegel } 1 : 10$$



d_1, d_2 Kegeldurchmesser

$$d_m = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad \text{mittlerer Kegeldurchmesser}$$

l Kegellänge

α Kegelwinkel

$\frac{\alpha}{2}$ Einstellwinkel zum Fertigen und Prüfen des Kegels

Kegelverhältnis C

$$C = \frac{d_1 - d_2}{l} \quad C = 1 : x = \frac{1}{x} \quad d_2 = d_1 - C l$$

Das Kegelverhältnis wird in der Form:

$$C = 1 : x \text{ angegeben, zum Beispiel } C = 1 : 5$$

Kegelwinkel α und

Einstellwinkel $\frac{\alpha}{2}$

Aus dem schraffierten rechtwinkligen Dreieck lässt sich ablesen:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{d_1 - d_2}{2l} \Rightarrow C = 2 \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \arctan \frac{C}{2}$$

$$\alpha = 2 \arctan \frac{C}{2}$$

$$d_2 = d_1 - 2 l \tan \frac{\alpha}{2}$$

10.5.4.2 Vorzugswerte für Kegel

Kegelverhältnis $C = 1 : x$	Kegelwinkel α	Einstellwinkel $\frac{\alpha}{2}$
1 : 0,2886751	120°	60°
1 : 0,5	90°	45°
1 : 1,8660254	30°	15°
1 : 3	18° 55'29" \approx 18,925°	9° 27'44"
1 : 5	11° 25'16" \approx 11,421°	5° 42'38"
1 : 10	5° 43'29" \approx 5,725°	2° 51'45"
1 : 20	2° 51'51" \approx 2,864°	1° 25'56"
1 : 50	1° 8'45" \approx 1,146°	34'23"
1 : 100	34'22" \approx 0,573°	17'11"

Werkzeugkegel und Aufnahmekegel an Werkzeugmaschinen spindeln, die so genannten Morsekegel (DIN 228), haben ein Kegelverhältnis von ungefähr 1 : 20.

10.5.4.3 Berechnungsformeln für kegliche Pressverbände

Erforderliche Einpresskraft F_e

$$F_e = \frac{2 M_T}{d_m v_e} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + r_e\right)$$

F_e	M_T	d_m, l_F	v_e	P	n	p
N	Nmm	mm	1	kW	min ⁻¹	$\frac{N}{mm^2}$

$$M_T = 9,55 \cdot 10^6 \cdot \frac{P}{n}$$

Vorhandene Fugenpressung p

$$p = \frac{2 M_T \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{v_e d_m^2 l_F} \leq p_{zul}$$

M_T Drehmoment
 P Wellenleistung
 n Drehzahl
 $\frac{\alpha}{2}$ Einstellwinkel

Einpresskraft F_e für einen bestimmten Fugendruck p

$$F_e = \pi p d_m l_F \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + r_e\right)$$

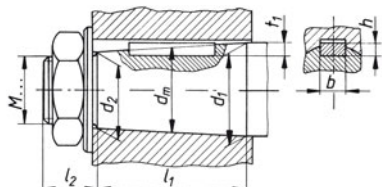
p_e Reibungswinkel aus $\tan p_e = v_e$
 $p_e = \arctan v_e$
 v_e Rutschbeiwert
 d_m mittlerer Kegeldurchmesser
 l_F Fugenlänge

Maschinenelemente

Nabenverbindungen

10.5.5 Maße für kegliche Wellenenden mit Außengewinde

Bezeichnung eines langen keglichen Wellenendes mit Passfeder und Durchmesser $d_1 = 40$ mm:



Wellenende 40 × 82 DIN 1448

Maße in mm

Durchmesser d_1	6	7	8	9	10	11	12	14	16	19	20	22	24	25	28
Kegellänge l_1	lang	10	12	15	18	28	36	42							
	kurz	—	—	—	—	16	22	24							
Gewindelänge l_2	6	8	8	12	14	18									
	Gewinde	M4	M6	M8 × 1	M10 × 1,25	M12 × 1,25	M16 × 1,5								
Passfeder $b \times h$	lang	—		2 × 2	3 × 3	4 × 4	5 × 5								
	Nuttiefe t_1	—	—	1,6	1,7	2,3	2,5	3,2	3,4	3,9	4,1				
Durchmesser d_1	30	32	35	38	40	42	45	48	50	55	60	65	70	75	80
	Kegellänge l_1	lang	58		82				105				130		
kurz		36		54				70				90			
Gewindelänge l_2	22	28				35				40					
	Gewinde	M20 × 1,5	M24 × 2	M30 × 2	M36 × 3	M42 × 3	M48 × 3	M56 × 4							
Passfeder $b \times h$	5 × 5	6 × 6	10 × 8	12 × 8	14 × 9	16 × 10	18 × 11	20 × 12							
	lang	4,5	5	7,1	7,6	8,6	9,6	10,8							
Nuttiefe t_1	kurz	3,9	4,4	6,4	6,9	7,8	8,8	9,8							

10.5.6 Richtwerte für Nabenabmessungen

Verbindungsart	Nabendurchmesser D_{aA} Naben aus		Nabenlänge l	
	Gusseisen	Stahl oder Stahlguss	Gusseisen	Stahl oder Stahlguss
zylindrische und kegliche Pressverbände und Spannverbindungen	2,2 ... 2,6 d	2 ... 2,5 d	1,2 ... 1,5 d	0,8 ... 1 d
Klemmsitz- und Keilsitzverbindungen	2 ... 2,2 d	1,8 ... 2 d	1,6 ... 2 d	1,2 ... 1,5 d
Keilwelle, Kerbverzahnung	1,8 ... 2 d	1,6 ... 1,8 d_1	0,8 ... 1 d_1	0,6 ... 0,8 d_1
Passfederverbindungen	1,8 ... 2 d	1,6 ... 1,8 d	1,8 ... 2 d	1,6 ... 1,8 d
längs bewegliche Naben	1,8 ... 2 d	1,6 ... 1,8 d	2 ... 2,2 d	1,8 ... 2 d
lose sitzende (sich drehende) Naben	1,8 ... 2 d	1,6 ... 1,8 d	2 ... 2,2 d	

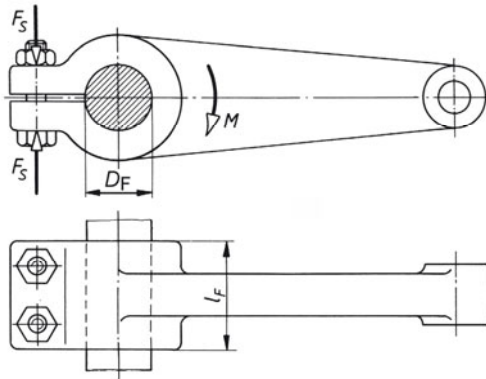
d Wellendurchmesser

Die Werte für Keilwelle und Kerbverzahnung sind Mindestwerte (d_1 „Kerndurchmesser“). Bei größeren Scheiben oder Rädern mit seitlichen Kippkräften ist die Nabenlänge noch zu vergrößern. Allgemein gelten die größeren Werte bei Werkstoffen geringerer Festigkeit, die kleineren Werte bei Werkstoffen höherer Festigkeit.

10.5.7 Klemmsitzverbindungen

Klemmsitzverbindungen werden mit geteilter oder geschlitzter Nabe hergestellt.

Mit Schrauben, Schrumpfringen oder Kegelringen werden die beiden Nabenhälften so auf die Welle gepresst, dass ohne Rutschen ein gegebenes Drehmoment M übertragen werden kann. Die dazu erforderliche Verspannkraft wird hier *Sprengkraft* F_S genannt. Die in der Fugenfläche entstehende Flächenpressung heißt *Fugendruck* p . Der errechnete Betrag ist mit der zulässigen Flächenpressung für den Werkstoff mit der geringeren Festigkeit zu vergleichen.



Die beiden folgenden Gleichungen gelten unter der Annahme, dass die Spannungsverteilung bei der Klemmsitzverbindung die gleiche ist wie beim zylindrischen Pressverband.

Insbesondere wird von einer gleichmäßigen Verteilung des Fugendrucks in der Fugenfläche ausgegangen.

Vor allem bei der geschlitzten Nabe ist eine gleichmäßige Verteilung des Fugendrucks kaum zu erzielen.

Die zulässige Flächenpressung p_{zul} sollte daher kleiner angesetzt werden als beim zylindrischen Pressverband.

Sicherheitshalber ist in der Gleichung für die Sprengkraft F_S der Rutschbeiwert v_e zu verwenden, der kleiner ist als der Haftbeiwert v , der in den Gleichungen für den zylindrischen Pressverband verwendet wird (siehe Tabelle in 10.5.3.2).

Sprengkraft F_S
(gesamte
Verspannkraft)

$$F_S = \frac{2 M}{\pi v_e D_F}$$

$$M = 9,55 \cdot 10^6 \frac{P}{n}$$

F_S	p, p_{zul}	M	D_F, l_F	v_e	P	n
N	$\frac{N}{mm^2}$	Nmm	mm	1	kW	min^{-1}

Vorhandener
Fugendruck p

$$p = \frac{F_S}{D_F l_F} \leq p_{zul}$$

$$p = \frac{2 M}{2 \pi D_F^2 l_F} \leq p_{zul}$$

Zulässige
Flächenpressung p_{zul}

für Stahl-Nabe: $p_{zul} = \frac{R_e}{3}$ oder $\frac{R_{p,0.2}}{3}$

für Gusseisen-Nabe: $p_{zul} = \frac{R_m}{5}$

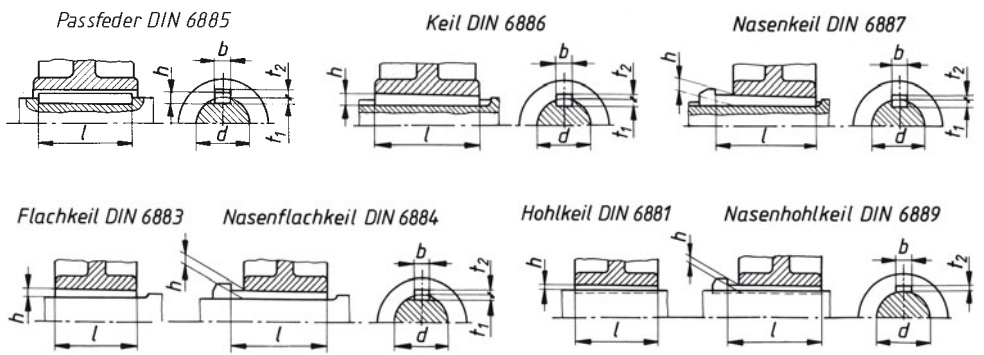
Maschinenelemente

Nabenverbindungen

10.5.8 Keilsitzverbindungen

Keilsitzverbindungen werden in der Praxis nicht berechnet, weil die Eintreibkraft, von der die Zuverlässigkeit des Reibungsschlusses abhängt, rechnerisch kaum erfasst werden kann.

Für bestimmte Wellen- und Nabenabmessungen sind die Abmessungen der Keile den Normen zu entnehmen, die in der folgenden Darstellung angegeben sind. Die Passfeder ist hier zur Vervollständigung noch einmal aufgenommen worden:

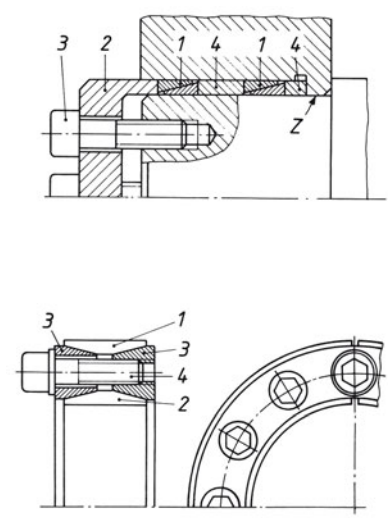


Ringfederspannverbindungen

Ringfederspannverbindungen werden in der Praxis nicht berechnet. Die Hersteller liefern Tabellen für die Abmessungen und die übertragbaren Drehmomente, die aus Versuchsergebnissen zusammengestellt wurden.

Man verwendet *Ringfederspannelemente* und *-spannsätze*. Die Kraftumsetzung von Axial- in Radialspannkraften an den keglig aufeinandergeschobenen Ringen erfolgt wie bei Keilen. Die Neigungswinkel der keglichen Flächen sind so groß, dass keine Selbsthemmung auftritt. Wird die Verbindung gelöst, lässt sich die Spannverbindung leicht ausbauen.

Einbau und Einbaubeispiel für Ringfederspannverbindungen



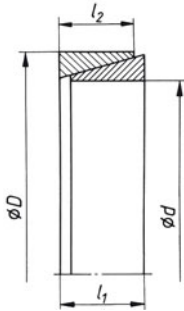
Ringfederspannelemente bestehen aus den Spannelementen 1, das sind kegliche Stahlringe, dem Druckring 2, den Spannschrauben 3 und den Distanzhülsen 4. Welle und Nabe brauchen eine zusätzliche Zentrierung Z. Zum Aufeinanderschieben der keglichen Spannelemente (Ringpaare) ist ein ausreichender Spannweg s vorzusehen.

Er wird in den Tabellen der Herstellerfirmen angegeben. Wegen der exponential abfallenden Wirkung können nur bis zu $n = 4$ Spannelemente hintereinandergeschaltet werden.

Spannsätze bestehen aus dem Außenring 1, dem Innenring 2, den beiden Druckringen 3 und den gleichmäßig am Umfang verteilten Spannschrauben 4, mit denen die Druckringe 3 axial verspannt werden. Dadurch wird der Innenring elastisch zusammengepresst (Wellensitz), der Außenring gedehnt (Nabensitz). Auch für Spannsätze ist eine zusätzliche Zentrierung von Welle und Nabe erforderlich.

10.5.9 Ringfederspannverbindungen, Maße, Kräfte und Drehmomente (nach Ringfeder GmbH, Krefeld-Uerdingen)

Spannelement



$M_{(100)}$ ist das von einem Spannelement übertragbare Drehmoment bei

$$p = 100 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

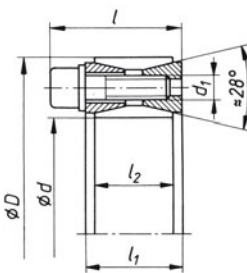
Flächenpressung.

Entsprechendes gilt für

$F_{(100)}$ und $F_{ax(100)}$.
Ermittlung der Anzahl hintereinander geschalteter Elemente in 11.6.2.

$d \times D$ mm	Maße		Kräfte			Drehmoment	Spannweg s in mm bei n			
	l_1 mm	l_2 mm	F_0 kN	$F_{(100)}$ kN	$F_{ax(100)}$ kN	$M_{(100)}$ Nm	1	2	3	4
10 × 13	4,5	3,7	6,95	6,30	1,40	7,0	2	2	3	3
12 × 15	4,5	3,7	6,95	7,50	1,67	10,0	2	2	3	3
14 × 18	6,3	5,3	11,20	12,60	2,80	19,6	3	3	4	5
16 × 20	6,3	5,3	10,10	14,40	3,19	25,5	3	3	4	5
18 × 22	6,3	5,3	9,10	16,20	3,60	32,4	3	3	4	5
20 × 25	6,3	5,3	12,05	18,00	4,00	40	3	3	4	5
22 × 26	6,3	5,3	9,05	19,80	4,40	48	3	3	4	5
25 × 30	6,3	5,3	9,90	22,50	5,00	62	3	3	4	5
28 × 32	6,3	5,3	7,40	25,20	5,60	78	3	3	4	5
30 × 35	6,3	5,3	8,50	27,00	6,00	90	3	3	4	5
35 × 40	7	6	10,10	35,60	7,90	138	3	3	4	5
40 × 45	8	6,6	13,80	45,00	9,95	199	3	4	5	6
45 × 57	10	8,6	28,20	66,00	14,60	328	3	4	5	6
50 × 57	10	8,6	23,50	73,00	16,20	405	3	4	5	6
55 × 62	12	10,4	21,80	80,00	17,80	490	3	4	5	6
60 × 68	12	10,4	27,40	106,00	23,50	705	3	4	5	7
63 × 71	12	10,4	26,30	111,00	24,80	780	3	4	5	7
65 × 73	14	12,2	25,40	115,00	25,60	830	3	4	5	7
70 × 79	14	12,2	31,00	145,00	32,00	1120	3	5	6	7
75 × 84	17	15	34,60	155,00	34,40	1290	3	5	6	7
80 × 91	17	15	48,00	203,00	45,00	1810	4	5	6	8
85 × 96	17	15	45,60	216,00	48,00	2040	4	5	6	8
90 × 101	17	15	43,40	229,00	51,00	2290	4	5	6	8
95 × 106	17	15	41,20	242,00	54,00	2550	4	5	6	8
100 × 114	21	18,7	60,70	317,00	70,00	3520	4	6	7	9

Spannsätze



Bei zwei Spannsätzen verdoppeln sich die Beträge des übertragbaren Drehmoments M und der übertragbaren Axialkraft F_{ax}

$d \times D$ mm	Maße			Kraft F_{ax} kN	Drehmoment M Nm	Flächenpressung		Schrauben DIN 912		
	l_1 mm	l_2 mm	l mm			P_{Welle} N/mm ²	P_{Nabe} N/mm ²	Anzahl	Gewinde d_1	M_A Nm
30 × 55	20	17	27,5	33,4	500	175	95	10	M 6 × 18	14
35 × 60	20	17	27,5	40	700	180	105	12	M 6 × 18	14
40 × 65	20	17	27,5	46	920	180	110	14	M 6 × 18	14
45 × 75	24	20	33,5	72	1610	210	125	12	M 8 × 22	35
50 × 80	24	20	33,5	71	1770	190	115	12	M 8 × 22	35
55 × 85	24	20	33,5	83	2270	200	130	14	M 8 × 22	35
60 × 90	24	20	33,5	83	2470	180	120	14	M 8 × 22	35
65 × 95	24	20	33,5	93	3040	190	130	16	M 8 × 22	35
70 × 110	28	24	39,5	132	4600	210	130	14	M 10 × 25	70
75 × 115	28	24	39,5	131	4900	195	125	14	M 10 × 25	70
80 × 120	28	24	39,5	131	5200	180	120	14	M 10 × 25	70
85 × 125	28	24	39,5	148	6300	195	130	16	M 10 × 25	70
90 × 130	28	24	39,5	147	6600	180	125	16	M 10 × 25	70
95 × 135	28	24	39,5	167	7900	195	135	18	M 10 × 25	70
100 × 145	30	26	44	192	9600	195	135	14	M 12 × 30	125
110 × 155	30	26	44	191	10500	180	125	14	M 12 × 30	125
120 × 165	30	26	44	218	13100	185	135	16	M 12 × 30	125
130 × 180	38	34	52	272	17600	165	115	20	M 12 × 35	125

Maschinenelemente

Nabenverbindungen

10.5.10 Ermittlung der Anzahl n der Spannelemente und der axialen Spannkraft F_a

Anzahl n für gegebenes Drehmoment M in Nm

$$n = f_p f_n \frac{M}{M_{(100)}}$$

$M_{(100)}$ übertragbares Drehmoment M in Nm nach Tabelle 10.5.9 für ein Spannelement und eine Flächenpressung von $p = 100 \text{ N/mm}^2$

f_p Pressungsfaktor (nachfolgend)

f_n Anzahlfaktor, abhängig von der Anzahl der hintereinandergeschalteten Elemente:

für $n = 2$ ist $f_n = 1,55$,

für $n = 3$ ist $f_n = 1,85$ und

für $n = 4$ ist $f_n = 2,02$.

Pressungsfaktor f_p

$$f_p = \frac{p_w}{p_{(100)}} \quad p_{(100)} = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

p_w Grenzwert der Flächenpressung für den Wellen- oder Nabenwerkstoff

$p_w = 0,9 R_e$ (oder $R_{p0,2}$) für (Stahl und Stahlguss)

$p_w = 0,6 R_m$ für Gusseisen

R_e Streckgrenze, $R_{p0,2}$ 0,2-Dehngrenze

R_m Zugfestigkeit alle Werte aus den Dauerfestigkeitsdiagrammen

Anzahl n für gegebene Axialkraft F_{ax} in kN

$$n = f_p f_n \frac{F}{F_{ax(100)}}$$

$F_{ax(100)}$ Axialkraft in kN nach Tabelle 10.5.9 für ein Spannelement und eine Flächenpressung von $p = 100 \text{ N/mm}^2$

f_p Pressungsfaktor (nachfolgend)

f_n Anzahlfaktor, abhängig von der Anzahl der hintereinandergeschalteten Elemente:

für $n = 2$ ist $f_n = 1,55$,

für $n = 3$ ist $f_n = 1,85$ und

für $n = 4$ ist $f_n = 2,02$.

Erforderliche axiale Gesamtspannkraft F_a in kN

$$F_a = F_0 + F_{(100)} f_p$$

F_0 axiale Spannkraft in kN nach Tabelle 10.5.9 zur Überbrückung des Passungsspiels bei H6/H7 und einer gemittelten Rautiefe $R_z \approx 6 \mu\text{m}$

$F_{(100)}$ axiale Spannkraft in kN nach Tabelle 10.5.9 bei einer Flächenpressung $p = 100 \text{ N/mm}^2$

f_p Pressungsfaktor

10.5.11 Stiftverbindungen

Längsstiftverbindung

$$\frac{d_S}{d} = 0,13 \dots 0,16$$

Bauverhältnisse
(Anhaltswerte)

$$\frac{l}{d} = 1,0 \dots 1,5$$

l Nabenlänge

Nabendicke s' in mm
(M in Nm einsetzen)

$$s' = (3,2 \dots 3,9) \sqrt[3]{M}$$

für Gusseisen-Nabe

$$s' = (2,4 \dots 3,2) \sqrt[3]{M}$$

für Stahl- und Stahlguss-Nabe

$$M = 9550 \frac{P}{n}$$

M	P	n
Nm	kW	min ⁻¹

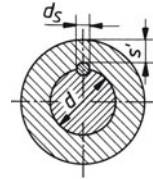
Übertragbares
Drehmoment M

$$M \leq \frac{d_S d l_S}{4} p_{zul} \text{ (Nabe)}$$

M	d_S, d, l_S	p_{zul}
Nmm	mm	$\frac{N}{mm^2}$

p_{zul} siehe unten

l_S Stiftlänge



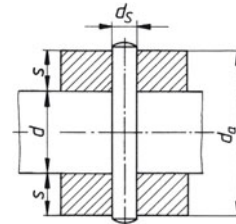
Querstiftverbindung

$$\frac{d_S}{d} = 0,2 \dots 0,3$$

Bauverhältnisse
(Anhaltswerte)

$$\frac{d_a}{d} = 2,5 \text{ für Gusseisen-Nabe}$$

$$= 2,0 \text{ für Stahl- und Stahlguss-Nabe}$$



Übertragbares
Drehmoment M

$$M \leq \frac{d d_S^2 \pi}{4} \tau_{a,zul} \quad M \leq d_S s (d + s) p_{zul} \text{ (Nabe)} \quad M = 9,55 \cdot 10^6 \frac{P}{n}$$

M	d, d_S, s	$\tau_{a,zul}, p_{zul}$	P	n
Nmm	mm	$\frac{N}{mm^2}$	kW	min ⁻¹

Übertragbare
Längskraft F_l

$$F_l \leq \frac{\pi d_S^2}{2} \tau_{a,zul}$$

Zulässige
Beanspruchungen

$$p_{zul} \text{ (Nabe)} = (120 \dots 180) \frac{N}{mm^2} \text{ für Stahl und Gusseisen}$$

$$= (90 \dots 120) \frac{N}{mm^2} \text{ für Gusseisen}$$

$$\tau_{a,zul} = (90 \dots 130) \frac{N}{mm^2} \text{ für S235JR ... E295, 10S20K der Kegel- und Zylinderstifte}$$

$$= (140 \dots 170) \frac{N}{mm^2} \text{ für E335 und E360 der Kerbstifte}$$

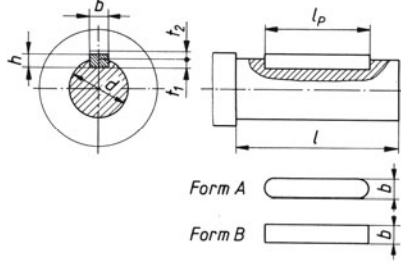
bei Schwellbelastung 70 %, bei Wechselbelastung 50 % der zulässigen Beanspruchung ansetzen

Maschinenelemente

Nabenverbindungen

10.5.12 Passfederverbindungen

10.5.12.1 Maße für zylindrische Wellenenden mit Passfedern und übertragbare Drehmomente



Bezeichnung der Passfeder Form A für $d = 40$ mm, Breite $b = 12$ mm
 Höhe $h = 8$ mm, Passfederlänge $l_p = 70$ mm:

Passfeder A12 × 8 × 70 DIN 6885

Bezeichnung eines zylindrischen Wellenendes von $d = 40$ mm und $l = 110$ mm:

Wellenende 40 × 110 DIN 748

Maße in mm

Wellen- durch- messer d	l		Toleranz- feld	Passfedermaße ¹⁾			Richtwerte für das übertragbare Drehmoment M in Nm	
	kurz	lang		Breite mal Höhe $b \times h$	Wellennut-tiefe t_1	Nabennut-tiefe t_2	reine Torsion ²⁾	Torsion und Biegung ³⁾
6	–	16	k6 H7	–	–	–	1,7	0,7
10	15	23		4 × 4	2,5	1,8	7,9	3,3
16	28	40		5 × 5	3	2,3	32	14
20	36	50		6 × 6	3,5	2,8	63	26
25	42	60		8 × 7	4	3,3	120	52
30	58	80					210	89
35	58	80		10 × 8	5	3,3	340	140
40	82	110		12 × 8	5	3,8	500	210
45	82	110		14 × 9	5,5	3,8	720	300
50	82	110					980	410
55	82	110	16 × 10	6	4,3	$1,3 \cdot 10^3$	550	
60	105	140	18 × 11	7	4,4	$1,7 \cdot 10^3$	710	
70	105	140	20 × 12	7,5	4,9	$2,7 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^3$	
80	130	170	22 × 14	9	5,4	$4 \cdot 10^3$	$1,7 \cdot 10^3$	
90	130	170	25 × 14	9	5,4	$5,7 \cdot 10^3$	$2,4 \cdot 10^3$	
100	165	210	28 × 16	10	6,4	$7,85 \cdot 10^3$	$3,3 \cdot 10^3$	
120	165	210	32 × 18	11	7,4	$13,6 \cdot 10^3$	$5,7 \cdot 10^3$	
140	200	250	36 × 20	12	8,4	$21,5 \cdot 10^3$	$9,1 \cdot 10^3$	
160	240	300	40 × 22	13	9,4	$32,2 \cdot 10^3$	$13,5 \cdot 10^3$	
180	240	300	45 × 25	15	10,4	$45,8 \cdot 10^3$	$19,2 \cdot 10^3$	
200	280	350	50 × 28	17	11,4	$62,8 \cdot 10^3$	$26,4 \cdot 10^3$	
220	280	350	56 × 32	20	12,4	$83,6 \cdot 10^3$	$35,1 \cdot 10^3$	
250	330	410				$123 \cdot 10^3$	$51,6 \cdot 10^3$	

¹⁾ Passfederlänge l_p in mm:
 8/10/12/14/16/18/20/22/25/28/32/36/40/45/50/56/63/70/80/90/100/110/125/140/160/180/200/220/250/280/315/355/400

²⁾ berechnet mit $M = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot d^3$ aus $\tau_t = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{(\pi/16)d^3} = \tau_{zul} = 40 \text{ N/mm}^2$

³⁾ berechnet mit $M = 3,3 \cdot 10^{-3} \cdot d^3$ aus $\sigma_b = \frac{M}{W} = \frac{M}{(\pi/32)d^3} = \sigma_{b,zul} = 70 \text{ N/mm}^2$ sowie mit $M = M_v = \sqrt{M_b^2 + 0,75 \cdot (\alpha_0 M_t)^2}$
 für $\alpha_0 = 0,7$ und $M_b = 2 M_t$ (Biegemoment = 2 × Torsionsmoment)

10.5.12.2 Passfeder-
verbindungen
(Nachrechnung)

Vorhandene
Flächenpressung p_W
an der Welle

Vorhandene
Flächenpressung p_N
an der Nabe

Zulässige
Flächenpressung p_{zul}

Herleitung der
Gleichungen für die
Flächenpressung p_W, p_N

Die beiden letzten Spalten der Tabelle im Abschnitt 10.5.12 enthalten Richtwerte für das übertragbare Drehmoment.

Im Normalfall ist das zu übertragende Drehmoment M bekannt oder kann über die gegebene Leistung P und die Wellendrehzahl n errechnet werden. Mit dem Drehmoment M werden der Wellendurchmesser d und die zugehörige Passfeder ($b \times h$) festgelegt.

Abgesehen von der Gleitfeder muss die Passfederlänge l_p etwas kleiner sein als die Nabelänge l . Werden für die Nabelänge l die in der Tabelle im Abschnitt 10.5.6 angegebenen Richtwerte verwendet, erübrigt es sich, die Flächenpressung p zu überprüfen ($p \leq p_{zul}$). Nur bei kürzeren Naben ist die folgende Nachrechnung erforderlich.

$$p_W = \frac{2M}{d l_t t_1} \leq p_{zul}$$

$$M = 9,55 \cdot 10^6 \frac{P}{n}$$

$$p_N = \frac{2M}{d l_t (h - t_1)} \leq p_{zul}$$

p	M	d, l_t, t_1	P	n
$\frac{N}{mm^2}$	Nmm	mm	kW	min^{-1}

d Wellendurchmesser

t_1 Wellennuttiefe

l_t tragende Länge an der Passfeder

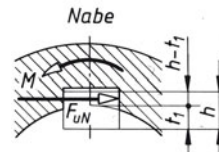
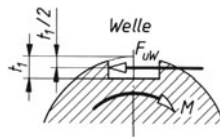
$l_t = l_p$ bei den Passfederformen A und B für die Wellennut

$l_t = l_p - b$ bei Passfederform A für die Nabennut

Mit Sicherheit v_S gegenüber der Streckgrenze R_e oder $R_{p0,2}$ (0,2-Dehngrenze) und v_B gegenüber der Bruchfestigkeit R_m des Wellen- oder Nabenwerkstoffs setzt man je nach Betriebsweise (Stoßanfall):

$$p_{zul} = \frac{R_e}{v_S} \quad \text{für Stahl und Stahlguss mit } v_S = 1,3 \dots 2,5$$

$$p_{zul} = \frac{R_m}{v_B} \quad \text{für Gusseisen mit } v_B = 3 \dots 4$$



$$-M + F_{uW} \left(\frac{d}{2} - \frac{t_1}{2} \right) = 0$$

$$F_{uW} = \frac{M}{\frac{d}{2} - \frac{t_1}{2}}$$

$$p_W = \frac{F_{uW}}{A_W} = \frac{F_{uW}}{l_t t_1}$$

$$p_W = \frac{2M}{(d - t_1) l_t t_1} \approx \frac{2M}{d l_t t_1}$$

$$M - F_{uN} \left(\frac{d}{2} + \frac{h - t_1}{2} \right) = 0$$

$$F_{uN} = \frac{M}{\frac{d}{2} + \frac{h - t_1}{2}}$$

$$p_N = \frac{F_{uN}}{A_N} = \frac{F_{uN}}{l_t (h - t_1)}$$

$$p_N = \frac{2M}{(d + h - t_1) l_t (h - t_1)}$$

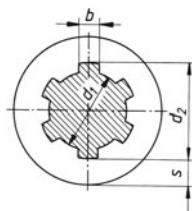
$$p_N = \frac{2M}{d l_t (h - t_1)}$$

Maschinenelemente

Nabenverbindungen

10.5.13 Keilwellenverbindung

Nennmaße für Welle und Nabe
 (Auswahl aus ISO 14: Keilwellenverbindung mit geraden Flanken, Übersicht)



Innendurchmesser d_1 in mm	Außendurchmesser d_2 in mm	Anzahl der Keile z	Keilbreite b in mm
18	22	6	5
21	25	6	5
23	28	6	6
26	32	6	6
28	34	6	7
32	38	8	6
36	42	8	7
42	48	8	8
46	54	8	9
52	—	—	—
62	72	8	12
82	—	—	—
92	102	10	14
102	112	10	16
112	125	10	18

Nabendicke s in mm
 (M in Nm einsetzen)

$$s = (2,6 \dots 3,2) \sqrt[3]{M} \quad \text{für Gusseisen-Nabe}$$

$$s = (2,2 \dots 3) \sqrt[3]{M} \quad \text{für Stahl- und Stahlguss-Nabe}$$

$$M = 9550 \frac{P}{n}$$

M	P	n
Nm	kW	min ⁻¹

Nabenlänge l in mm
 (M in Nm einsetzen)

$$l = (4,5 \dots 6,5) \sqrt[3]{M} \quad \text{für Gusseisen-Nabe}$$

$$l = (2,8 \dots 4,5) \sqrt[3]{M} \quad \text{für Stahl- und Stahlguss-Nabe}$$

Flächenpressung p

$$p = \frac{2M}{0,75 z h_1 l d_m} \leq p_{zul}$$

P	M	h_1, l, d_m	z
$\frac{N}{mm^2}$	Nmm	mm	1

Faktor 0,75 (nach Versuchen tragen nur etwa 75 % der Mitnehmerflächen)

$$h_1 = 0,8 \frac{d_2 - d_1}{2}$$

$$d_m = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

Zulässige Flächenpressung p_{zul}

$$p_{zul} = \frac{R_e(\text{Nabe})}{S} \quad \text{für Stahl-Nabe}$$

$$p_{zul} = \frac{R_m(\text{Nabe})}{S} \quad \text{für Gusseisen-Nabe}$$

R_e ($R_{p0,2}$) und R_m aus den Dauerfestigkeitsdiagrammen.
 Für stoßfrei wechselnde Betriebslast wird bei Befestigungsnaben:
 $S = 2,5$ (1,7)

- für unbelastet verschobene Verschiebenaben: $S = 8$ (5)
- für unbelastet verschobene Verschiebenaben: $S = 15$
- für Stahl-Nabe und (3) für Gusseisen-Nabe
- Klammerwerte bei gehärteten oder vergüteten Sitzflächen der Welle

10.6 Zahnradgetriebe

Normen (Auswahl)

DIN 780	Modulreihe für Zahnräder
DIN 867	Bezugsprofil für Stirnräder mit Evolventenverzahnung
DIN 868	Allgemeine Begriffe und Bestimmungsgrößen für Zahnräder
DIN 3960	Begriffe und Bestimmungsgrößen für Stirnräder und Stirnradpaare
DIN 3971	Begriffe und Bestimmungsgrößen für Kegelräder und Kegelradpaare
DIN 3975	Begriffe und Bestimmungsgrößen für Zylinderschneckengetriebe
DIN 3990	Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern
DIN 3991	Tragfähigkeitsberechnung von Kegelrädern

10.6.1 Kräfte am Zahnrad

10.6.1.1 Benennung

P	Leistung	α_0	Herstell-Eingriffswinkel (bei Normverzahnung ist $\alpha_0 = 20^\circ$)
M_T	Drehmoment	α_n	Eingriffswinkel im Normalschnitt am Teilkreis
F_{bn}	Zahnnormalkraft normal zur Berührungslinie	α_t	Eingriffswinkel im Stirnschnitt am Teilkreis
F_{bt}	Zahnnormalkraft im Stirnschnitt	α_{wt}	Betriebseingriffswinkel im Stirnschnitt
F_t	Umfangskraft bei Stirnrädern im Teilkreis im Stirnschnitt	β	Schrägungswinkel am Teilkreis
F_{tn}	Umfangskraft im Normalschnitt	β_m	Schrägungswinkel am Teilkreis in Mitte Zahnbreite bei Kegelrädern
F_{tm}	Umfangskraft bei Kegelrädern im Teilkreis in Mitte Zahnbreite	β_b	Schrägungswinkel am Grundkreis
d	Teilkreisdurchmesser	δ	Teilkegelwinkel
d_w	Betriebswälzkreisdurchmesser	Σ	Achsenwinkel
d_m	mittlerer Teilkreisdurchmesser bei Kegelrädern (bezogen auf Mitte Zahnbreite)	γ_m	mittlerer Steigungswinkel der Schnecke
		ϱ'	Reibwinkel
		m_n	Normalmodul
		m_t	Stirnmodul

Maschinenelemente

Zahnradgetriebe

Indizes	bezogen auf	Indizes	bezogen auf
kein Index	Teilkreis	t	Stirnschnitt
a	Kopfkreis	v	Ergänzungskegel bei Kegelrädern
b	Grundkreis	w	Betriebswälzkreis
f	Fußkreis	C	Wälzpunkt
m	Mitte Zahnbreite bei Kegelrädern	1	Ritzel
n	Normalschnitt oder Ersatz-Geradstirnrad	2	Rad

10.6.1.2 Einheiten

Zur Berechnung des Drehmoments M_{T1} in Nmm aus der Leistung P in kW und der Drehzahl n_1 in min^{-1} ($= 1/\text{min} = U/\text{min}$) wird die bekannte Zahlenwertgleichung benutzt:

$$M_{T1} = 9,55 \cdot 10^6 \frac{P}{n_1} \qquad \frac{M_{T1}}{\text{Nmm}} \mid \frac{P}{\text{kW}} \mid \frac{n_1}{\text{min}^{-1}}$$

Für alle folgenden Gleichungen zweckmäßig:
Drehmoment M_{T1} in Nmm, Kräfte F in N, sämtliche Längen (Durchmesser, Modul) in mm.

10.6.1.3 Geradstirnrad

Umfangskraft F_t am Teilkreis

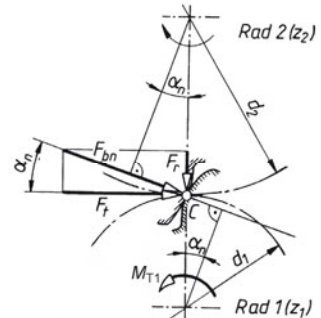
$$F_t = \frac{2M_{T1}}{d_1} = \frac{2M_{T1}}{z_1 m_n}$$

Normalkraft F_{bn} normal zur Berührungslinie

$$F_{bn} = \frac{F_t}{\cos \alpha_n}$$

Radialkraft F_r

$$F_r = F_t \tan \alpha_n = 0,364 F_t$$



10.6.1.4 Schrägstirnrad

Umfangskraft F_t am Teilkreis

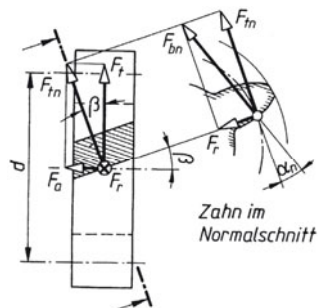
$$F_t = \frac{2M_{T1}}{d_1} = \frac{2M_{T1} \cos \beta}{z_1 m_n}$$

Radialkraft F_r

$$F_r = \frac{F_t \tan \alpha_n}{\cos \beta}$$

Axialkraft F_a

$$F_a = F_t \tan \beta$$



10.6.1.5 Geradzahn-
Kegelrad

Umfangskraft F_{tm} im Teil-
kreis in Mitte Zahnbreite

$$F_{tm} = \frac{2M_{T1}}{d_{m1}}$$

Radialkraft F_r
(für Achsenwinkel
 $\Sigma = 90^\circ$ ist $F_{r1} = F_{a2}$ und
 $F_{r2} = F_{a1}$)

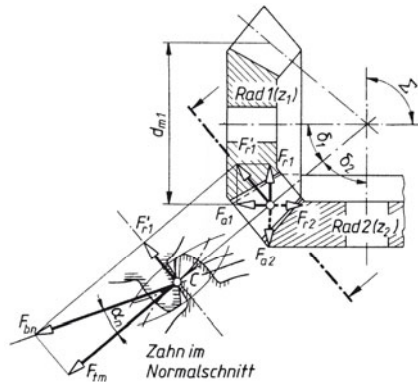
$$F_{r1} = F_{tm} \tan \alpha_n \cos \delta_1$$

$$F_{r2} = F_{tm} \tan \alpha_n \cos \delta_2$$

Axialkraft F_a
(für Achsenwinkel
 $\Sigma = 90^\circ$ ist $F_{a1} = F_{r2}$ und
 $F_{a2} = F_{r1}$)

$$F_{a1} = F_{tm} \tan \alpha_n \sin \delta_1$$

$$F_{a2} = F_{tm} \tan \alpha_n \sin \delta_2$$



10.6.1.6 Schrägzahn-
Kegelrad

Umfangskraft F_{tm} im Teil-
kreis in Mitte Zahnbreite

$$F_{tm} = \frac{2M_{T1}}{d_{m1}}$$

Radialkraft F_r
(für Achsenwinkel
 $\Sigma = 90^\circ$ ist $F_{r1} = F_{a2}$ und
 $F_{r2} = F_{a1}$)

$$F_{r1}^{1)} = F_{tm} \left(\tan \alpha_n \frac{\cos \delta_1}{\cos \beta_m} \mp \tan \beta \sin \delta_1 \right)$$

$$F_{r2}^{2)} = F_{tm} \left(\tan \alpha_n \frac{\cos \delta_2}{\cos \beta_m} \pm \tan \beta \sin \delta_2 \right)$$

Axialkraft F_a

$$F_{a1}^{3)} = F_{tm} \left(\tan \alpha_n \frac{\sin \delta_1}{\cos \beta_m} \pm \tan \beta \cos \delta_1 \right)$$

$$F_{a2}^{4)} = F_{tm} \left(\tan \alpha_n \frac{\sin \delta_2}{\cos \beta_m} \mp \tan \beta \cos \delta_2 \right)$$

1) (-) bei gleicher, (+) bei entgegengesetzter Spiral- und Drehrichtung

2) (+) bei gleicher, (-) bei entgegengesetzter Spiral- und Drehrichtung

3) (+) bei gleicher, (-) bei entgegengesetzter Spiral- und Drehrichtung

4) (-) bei gleicher, (+) bei entgegengesetzter Spiral- und Drehrichtung

10.6.1.7 Schnecke und
Schneckenrad

Umfangskraft F_t

$$F_{t1} = F_{a2} = \frac{2M_{T1}}{d_{m1}}$$

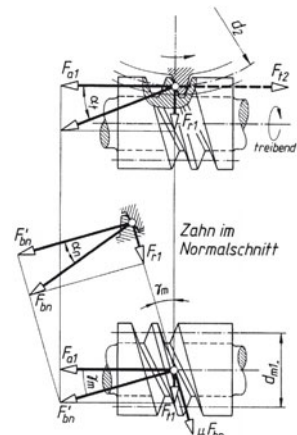
Radialkraft F_r

$$F_{r1} = F_{r2} = F_{t1} \frac{\tan \alpha_n \cos \varrho'}{\sin(\gamma_m + \varrho')}$$

Axialkraft F_a

$$F_{a1} = F_{t2} \frac{2M_{T2}}{d_2}$$

$$F_{a1} = F_{t2} = \frac{F_{t1}}{\tan(\gamma_m + \varrho')}$$



Maschinenelemente

Zahnradgetriebe

10.6.2 Einzelrad- und Paarungsgleichungen für Gerad- und Schrägstriräder

Die Berechnungsgleichungen gelten für den allgemeinen Fall des Schrägstrirad-V-Getriebes.

Für die Sonderfälle ist zu setzen:

Schrägstrirad-Nullgetriebe: $x_1 = x_2 = 0$

Schrägstrirad-V-Nullgetriebe: $x_2 = -x_1$

Geradstrirad-Nullgetriebe: $\beta = 0^\circ, x_1 = x_2 = 0$

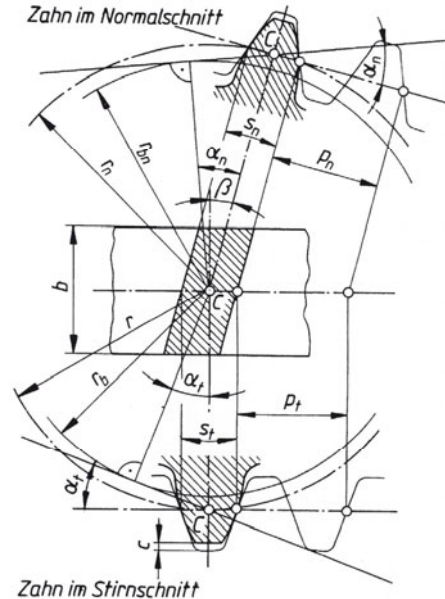
Geradstrirad-V-Nullgetriebe: $\beta = 0^\circ, x_2 = -x_1$

Geradstrirad-V-Getriebe: $\beta = 0^\circ$, also $\cos \beta = 1$

Für das DIN-Verzahnungssystem ist der Herstell-Eingriffswinkel $\alpha_n = 20^\circ$, also

$$\cos \alpha_n = 0,93969 \quad \tan \alpha_n = 0,36397$$

$$\sin \alpha_n = 0,34202 \quad \text{ev } \alpha_n = 0,01490$$



Die Berechnungsgleichungen gelten auch für *Innengetriebe*. Dafür sind

die Zahnzahl z_2 des Innenrades, alle Durchmesser des Innenrades, das Zahnzahlverhältnis $u = z_2/z_1$ und der Achsabstand a mit *negativem* Vorzeichen einzusetzen.

Außerdem ist festgelegt: Die Profilverschiebung ist *positiv*, wenn durch sie die Zahndicke *vergrößert* wird.

- b Zahnbreite
 - c Kopfspiel
 - p_t, p_n Teilkreisteilung
 - r, r_n Teilkreisradius
 - r_b, r_{bn} Grundkreisradius
 - s_t, s_n Zahndicke
 - α_t, α_n Eingriffswinkel am Teilkreis
 - β Schrägungswinkel am Teilkreis
- Index t für Stirnschnitt
Index n für Normalschnitt

Übersetzung i

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_{b2}}{d_{b1}}$$

Ersatzzahnzahl z_n

$$z_n = \frac{z}{\cos^2 \beta_b \cos \beta} \approx \frac{z}{\cos^3 \beta}$$

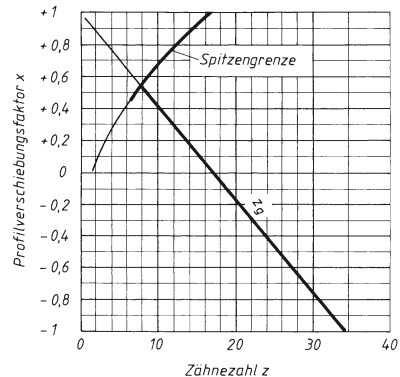
β_b siehe Schrägungswinkel

Grenzzahnzahl z_g

$$z_g = 17 \cos^3 \beta$$

Profilverschiebungsfaktor x für $z < z_g$

$$x \geq \frac{17 - \frac{z}{\cos^3 \beta}}{17}$$



Grenzzahnzahl z_g der DIN-Geradverzahnung ($\beta = 0$)

**Achsabstand a_d ohne
Profilverschiebung
(Rechengröße)**

$$a_d = \frac{m_n}{2 \cos \beta} (z_1 + z_2)$$

**Eingriffswinkel im Stirn-
schnitt am Teilkreis α_t**

$$\tan \alpha_t = \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}$$

bei Geradverzahnung ist $\beta = 0$
und damit $\alpha_t = \alpha_n = 20^\circ$

Stirnmodul m_t

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$$

Für Geradstirnrad ist: $m_t = m_n = m$
 m_n Normalmodul

**Teilkreisteilung im
Stirnschnitt p_t**

$$p_t = \frac{\pi d}{z} = \pi m_t = \frac{\pi m_n}{\cos \beta}$$

**Teilkreisteilung
im Normalschnitt p_n**

$$p_n = \pi m_n = \pi m_t \cos \beta$$

**Eingriffsteilung im
Stirnschnitt p_{et}**

$$p_{et} = p_t \cos \alpha_t = \pi m_t \cos \alpha_t = \frac{p_{en}}{\cos \beta} = \frac{\pi d_b}{z}$$

**Eingriffsteilung
im Normalschnitt p_{en}**

$$p_{en} = p_n \cos \alpha_n = \pi m_n \cos \alpha_n$$

**Schrägungswinkel am
Grundkreis β_b**

$$\tan \beta_b = \tan \beta \cos \alpha_t$$

$$\sin \beta_b = \sin \beta \cos \alpha_n$$

Teilkreisdurchmesser d

$$d_1 = \frac{z_1 m_n}{\cos \beta} = z_1 m_t \quad d_2 = \frac{z_2 m_n}{\cos \beta} = z_2 m_t$$

Grundkreisdurchmesser d_b

$$d_{b1} = d_1 \cos \alpha_t = z_1 \frac{m_n}{\cos \beta} \cos \alpha_t$$

$$d_{b2} = d_2 \cos \alpha_t = z_2 \frac{m_n}{\cos \beta} \cos \alpha_t$$

Kopfkreisdurchmesser d_a

$$d_{a1} = 2(a + m_n - x_2 m_n) - d_2 = 2[a + m_n(1 - x_2)] - \frac{z_2 m_n}{\cos \beta}$$

$$d_{a2} = 2(a + m_n - x_1 m_n) - d_1 = 2[a + m_n(1 - x_1)] - \frac{z_1 m_n}{\cos \beta}$$

**erforderliche
Kopfkürzung $k m_n$**

$$k m_n = \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} + (x_1 + x_2) m_n - a$$

Fußkreisdurchmesser d_f

$$d_{f1} = d_1 - 2(h_{fP} - x_1 m_n)$$

$$d_{f2} = d_2 - 2(h_{fP} - x_2 m_n)$$

**Evolutenfunktion des
Winkels α**

$$\operatorname{inv} \alpha = \tan \alpha - \operatorname{arc} \alpha = \tan \alpha - \left(\pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \right)$$

Maschinenelemente

Zahnradgetriebe

Betriebseingriffswinkel
im Stirnschnitt α_{wt} und
im Normalschnitt α_{wn}

$$\text{inv } \alpha_{wt} = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \tan \alpha_n + \text{inv } \alpha_t$$

$$\cos \alpha_{wt} = \frac{d_{b1}}{d_{w1}} = \frac{d_{b2}}{d_{w2}} \quad \left(\text{inv } \alpha_t = \tan \alpha_t - \frac{\pi \cdot \alpha_t}{180^\circ} \right)$$

$$\sin \alpha_{wn} = \sin \alpha_{wt} \cdot \frac{\sin \alpha_n}{\sin \alpha_t}$$

Betriebseingriffswinkel
im Stirnschnitt α_{wt} bei
vorgeschriebenem
Achsabstand a

$$\cos \alpha_{wt} = \frac{m_n (z_1 + z_2)}{2a} \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \beta} = \frac{a_d}{a} \cos \alpha_t$$

Betriebswälzkreis-
durchmesser d_w

$$d_{w1} = \frac{d_{b1}}{\cos \alpha_{wt}} = z_1 m_t \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}}$$

$$d_{w2} = \frac{d_{b2}}{\cos \alpha_{wt}} = z_2 m_t \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}}$$

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$$

Achsabstand a

$$a = \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}}$$

Kopfspiel einer
Radpaarung c

$$c = a - \frac{d_{a1} + d_{f2}}{2} = a - \frac{d_{a2} + d_{f1}}{2}$$

Summe der Profil-
verschiebungsfaktoren
 $x_1 + x_2$

$$x_1 + x_2 = \frac{(z_1 + z_2)(\text{inv } \alpha_{wt} - \text{inv } \alpha_t)}{2 \tan \alpha_n} \quad \left(\text{inv } \alpha = \tan \alpha - \frac{\pi \alpha}{180^\circ} \right)$$

Zahnkopfhöhe des
Werkzeugs h_{fP} für
Bezugsprofil I, II, III, IV

$$\text{I: } h_{fP} = 1,167 m_n$$

$$\text{II: } h_{fP} = 1,25 m_n$$

$$\text{III: } h_{fP} = 1,25 m_n + 0,25 \sqrt[3]{m_n}$$

$$\text{IV: } h_{fP} = 1,25 m_n + 0,6 \sqrt[3]{m_n}$$

Schrägungswinkel am
Betriebswälzkreis β_w

$$\tan \beta_w = \frac{2a \tan \beta}{m_t (z_1 + z_2)} \quad m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$$

Profilüberdeckung ε_α

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} - a \sin \alpha_{wt}}{\pi m_t \cos \alpha_t}$$

Minuszeichen gilt für Innengetriebe, dabei ist a mit negativem Vorzeichen einzusetzen.

Sprungüberdeckung ε_β

$$\varepsilon_\beta = \frac{b \tan \beta}{\pi m_t} = \frac{b \sin \beta}{\pi m_n}$$

Gesamtüberdeckung ε

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$$

Zahndickennenmaß,
Stirnschnitt s_t

$$s_{t1} = m_t \left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \tan \alpha_n \right) \quad s_{t2} = m_t \left(\frac{\pi}{2} + 2x_2 \tan \alpha_n \right)$$

Zahndickennenmaß im Normalschnitt s_n

$$s_{n1} = m_n \left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \tan \alpha_n \right) \quad s_{n2} = m_n \left(\frac{\pi}{2} + 2x_2 \tan \alpha_n \right)$$

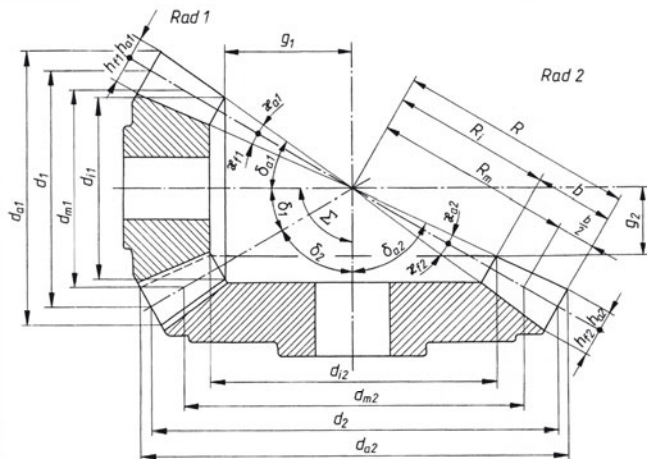
Zahndicke auf dem Kopfkreis s_a

$$s_a = d_a \left[\frac{1}{z} \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha_n \right) - (\text{inv } \alpha_{ta} - \text{inv } \alpha_t) \right]$$

$$\cos \alpha_{ta} = \frac{d}{d_a} \cos \alpha_t$$

10.6.3 Einzelrad- und Paarungsgleichungen für Kegelräder

Die Gleichungen gelten, wenn nicht anders angegeben, für Kegelräder mit schrägen Zähnen, die unter dem Achsenwinkel von 90° als V-Nullgetriebe arbeiten: Schrägungswinkel in Mitte Zahnweite β_m , Achsenwinkel $\Sigma = 90^\circ$, Profilverschiebungsfaktor $x_2 = -x_1$, Profilverschiebung $v_2 = -v_1$. Für Kegelräder mit geraden Zähnen ist in den Gleichungen $\beta_m = 0$ zu setzen, für Nullgetriebe $x = 0$.



Übersetzung i

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}$$

Zähnezahlverhältnis u

$$u = \frac{Z_{\text{Rad}}}{Z_{\text{Ritzel}}} \geq 1$$

Achsenwinkel Σ

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2$$

Teilkegelwinkel δ

$$\left. \begin{aligned} \text{für } \Sigma = 90^\circ : \tan \delta_1 &= \frac{1}{u} = \frac{z_1}{z_2} \\ \text{für } \Sigma < 90^\circ : \tan \delta_1 &= \frac{\sin \Sigma}{u + \cos \Sigma} \\ \text{für } \Sigma > 90^\circ : \tan \delta_1 &= \frac{\sin(180^\circ - \Sigma)}{u - \cos(180^\circ - \Sigma)} \end{aligned} \right\} \delta_2 = \Sigma - \delta_1$$

Maschinenelemente

Zahnradgetriebe

Teilkreisdurchmesser d

$$d_1 = z_1 m_t \quad d_2 = z_2 m_t \quad m_t \text{ Stirnmodul}$$

Bei Geradzahn-Kegelrädern ist der Stirnmodul zugleich der Normalmodul (Stirnschnitt = Normalschnitt), er wird als Normmodul festgelegt: $m_t = m_n = m$.

Teilkegellänge R (außen)
und Zahnbreite b

$$R = \frac{d_1}{2 \sin \delta_1} = \frac{d_2}{2 \sin \delta_2} \quad b \leq \frac{R}{3} \text{ ausführen}$$

Teilkegellänge R_i (innen)

$$R_i = R - b$$

mittlere Teilkegellänge R_m

$$R_m = R - \frac{b}{2}$$

Teilkreisdurchmesser in
Mitte Zahnbreite d_m

$$d_{m1} = d_1 - b \sin \delta_1 \quad d_{m2} = d_2 - b \sin \delta_2$$

äußerer Normalmodul m_{na}

$$m_{na} = m_t \cos \beta_m$$

Normalmodul in Mitte
Zahnbreite m_{nm}

$$m_{nm} = m_t \cos \beta_m \frac{R_m}{R} \quad m_{nm} \text{ ist identisch mit dem Normalmodul der Ergänzungs- und der Ersatzverzahnung}$$

$$m_{nm} = \frac{d_{m1}}{z_1} \cos \beta_m = \frac{d_{m2}}{z_2} \cos \beta_m$$

Ergänzungszähnezahl z_v

$$z_{v1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1} \quad z_{v2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2}$$

Ersatzzähnezahl z_n

$$z_{n1} \approx \frac{z_{v1}}{\cos^3 \beta_m} \quad z_{n2} \approx \frac{z_{v2}}{\cos^3 \beta_m}$$

Bei Geradzahn-Kegelrädern ist mit $\beta_m = 0^\circ$ und $\cos \beta_m = 1$
 $z_{n1} = z_{v1}$ und $z_{n2} = z_{v2}$.

Zähnezahl des
Planrades z_p

$$z_p = \frac{z_2}{\sin \delta_2}$$

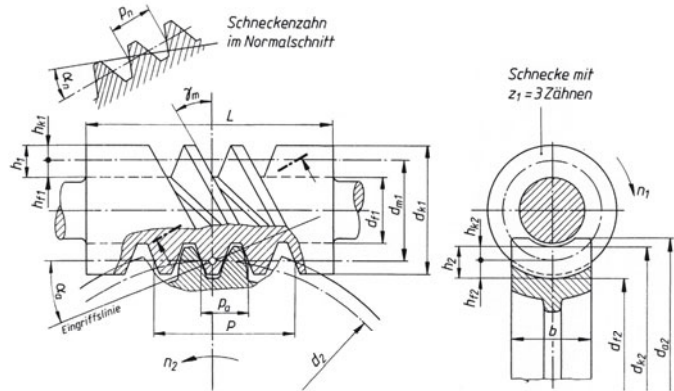
Zahnkopfhöhe h_a
(außen)

$$h_{a1} = (1 + x) m_{na} \quad h_{a2} = (1 - x) m_{na} = 2 m_{na} - h_{a1}$$

Kopfspiel c

$$c = y m_{na} \quad y = 0,167 \text{ oder } y = 0,2$$

10.6.4 Einzelrad- und Paarungsgleichungen für Schneckengetriebe



Index 1 gilt für die Schnecke, 2 für das Schneckenrad, Index n für die Größe im Normalschnitt, Index a im Achsschnitt

Übersetzung i
(m Achsmodul, z_1 Gangzahl der Schnecke)

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{m z_1} = \frac{d_2}{d_{m1} \tan \gamma_m} \quad i \text{ möglichst keine ganze Zahl bei mehrgängiger Schnecke}$$

$$M_{T1} = \frac{M_{T2}}{i \eta_{ges}} \quad \eta_{ges} \text{ Gesamtwirkungsgrad des Schneckengetriebes}$$

Erfahrungswerte für i , Gangzahl z_1 und η_{ges}

i	≥ 30	15 ... 29	10 ... 14	6 ... 9
z_1	1	2	3	4
η_{ges}	0,7	0,8	0,85	0,9

Zähnezahl z_2 des Schneckenrades

$$z_2 = i z_1 \quad z_2 \text{ möglichst } \geq 25 \text{ Zähne}$$

Steigungshöhe der Schnecke P

$$P = z_1 p_a = z_1 m \pi = d_{m1} \pi \tan \gamma_m \quad p_a \text{ Achsteilung, } m \text{ Achsmodul}$$

mittlerer Steigungswinkel γ_m

$$\tan \gamma_m = \frac{m z_1}{d_{m1}} = \frac{z_1}{z_F} \quad \cos \gamma_m = \frac{m_n}{m}$$

Formzahl z_F

$$z_F = \frac{d_{m1}}{m}$$

Zahnfußhöhe h_f

$$h_{f1} = 2 m_{na} - h_{a1} + c \quad h_{f2} = 2 m_{na} - h_{a2} + c \quad c \text{ Kopfspiel } c = 0,2 m$$

Kopfkreisdurchmesser d_{k1} der Schnecke

$$d_{k1} = d_{m1} + 2 h_{k1}$$

Maschinenelemente

Zahnradgetriebe

Kopfwinkel κ_a

$$\tan \kappa_{a1} = \frac{h_{a1}}{R}$$

$$\tan \kappa_{a2} = \frac{h_{a2}}{R}$$

Fußwinkel κ_f

$$\tan \kappa_{f1} = \frac{h_{f1}}{R}$$

$$\tan \kappa_{f2} = \frac{h_{f2}}{R}$$

Kopfkegelwinkel δ_a

$$\delta_{a1} = \delta_1 + \kappa_{a1}$$

$$\delta_{a2} = \delta_2 + \kappa_{a2}$$

**innerer Kopfkreis-
durchmesser d_i**

$$d_{i1} = d_{a1} - 2 \frac{b \sin \delta_{a1}}{\cos \kappa_{a1}}$$

$$d_{i2} = d_{a2} - 2 \frac{b \sin \delta_{a2}}{\cos \kappa_{a2}}$$

Innenkegelhöhe g

$$g_1 = \frac{d_{i1}}{2 \tan \delta_{a1}}$$

$$g_2 = \frac{d_{i2}}{2 \tan \delta_{a2}}$$

**Mittlenkreisdurch-
messer d_{m2}**

$$d_{m2} = d_2 \pm 2 x m = 2 a - d_{m1}$$

**Kopfkreisdurch-
messer d_{k2}**

$$d_{k2} = d_2 \pm 2 x m + 2 h_{k2}$$

$$d_{k2} = d_2 + 2 h_{k2}$$

**Fußkreisdurch-
messer d_{f2}**

$$d_{f2} = d_{k2} - (4 m + c)$$

$$c = 0,2 m$$

$$d_{f2} = d_2 - 2 h_{f2}$$

c Kopfspiel

**Außendurch-
messer d_{a2}**

$$d_{a2} = d_{k2} + m$$

**Profilverschiebung
erforderlich bei**

$$z_2 < z_g = \frac{2 h_{kf}}{m \sin^2 \alpha_a}$$

h_{kf} Kopfhöhe des Fräasers

α_a Eingriffswinkel im Achsschnitt

**Mindest-Profilver-
schiebungsfaktor**

$$x_{min} = \frac{z_g - z_2}{z_g}$$

$$z_g = 17 \text{ bei } \alpha_a = 20^\circ$$

**Achsabstand a
(z_F Formzahl)**

$$a = \frac{d_{m1} + d_2}{2} \pm x m = \frac{m}{2} (z_F + z_2 \pm 2 x)$$

Zahnbreite b

$$b = (0,4 \dots 0,5) (d_{k1} + 4 m)$$

für Bronzerad

$$b = (0,4 \dots 0,5) (d_{k1} + 4 m) + 1,8 m$$

für Leichtmetallrad

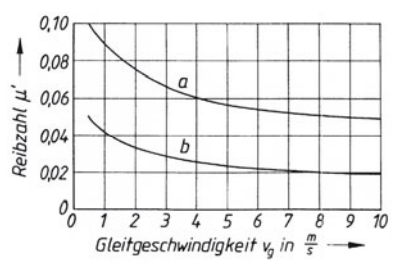
**Wirkungsgrad η_z der
Verzahnung
($\mu' = \tan \varrho'$ Gleitreibungs-
zahl)**

$$\eta_z = \frac{\tan \gamma_m}{\tan(\gamma_m + \varrho')}$$

bei treibender Schnecke

$$\eta_z = \frac{\tan(\gamma_m - \varrho')}{\tan \gamma_m}$$

bei treibendem
Schneckenrad



a Schnecke auf Drehmaschine
geschliffen, vergütet

b Schnecke gehärtet, geschliffen

Gesamtwirkungsgrad η_{ges}

$$\eta_{ges} = \eta_z \eta_L \quad \eta_L = \eta_{L1} \eta_{L2} = \text{Wirkungsgrad der Lagerung}$$

η_{L1} für Schneckenwelle
 η_{L2} für Schneckenrad
 $\eta_{L1} = \eta_{L2} \approx 0,97$ bei Wälzlagern
 $\eta_{L1} = \eta_{L2} \approx 0,94$ bei Gleitlagern

**Normalteilung p_n
Normalmodul m_n**

$$p_n = p_a \cos \gamma_m \quad m_n = m \cos \gamma_m \quad m = m_a = \text{Achsmodul}$$

Modul für Schnecke und Schneckenrad (DIN 780) in mm: 1, 1,25, 1,6, 2, 2,5, 3,15, 4, 5, 6,3, 8, 10, 12,5, 16, 20

Für Schnecken wird der Modul im Achsschnitt (Achsmodul) $m_a = m$ als Normmodul gewählt;
 m_a ist zugleich Modul für das Schneckenrad im Stirnschnitt

Mittlenkreisdurchmesser d_{m1} der Schnecke

$$d_{m1} = \frac{z_1 m}{\tan \gamma_m} = \frac{z_1 m_n}{\sin \gamma_m} = z_F m \quad d_{m1} \text{ ist eine Rechengröße}$$

**Zahnhöhen h
Kopfhöhen h_k
Fußhöhen h_f
in Abhängigkeit von γ_m**

	$\gamma_m \leq 15^\circ$	$\gamma_m > 15^\circ$
$h_1 = h_2 =$	2,2 m	2,2 m _n
$h_{k1} =$	m	m _n
$h_{k2} =$	m ± xm	m _n ± xm _n
$h_{f1} =$	$h_1 - h_{k1}$ $h_2 - h_{k2}$	
$h_{f2} =$		

Eingriffswinkel im Normal- und Achsschnitt

$$\tan \alpha_a = \frac{\tan \alpha_n}{\cos \gamma_m}$$

Richtwerte für α_n				
γ_m	bis 15°	15 ... 25°	25 ... 35°	über 35°
α_{n0}	20°	22,5°	25°	30°

Kopfkreisdurchmesser d_{k1} der Schnecke

$$d_{k1} = d_{m1} + 2h_{k1}$$

Profilverschiebung hat keinen Einfluss auf die Schnecken-Abmessungen

Fußkreisdurchmesser d_{f1} der Schnecke

$$d_{f1} = d_{k1} - 2h_1$$

Schneckenlänge L in mm

$$L \approx 2m(1 + \sqrt{z_2})$$

$$L \approx 2m\sqrt{2z_2 - 4}$$

für normale Belastung

für hohe Belastung

Umfangsgeschwindigkeit v (Zahlenwertgleichung)

$$v_1 = \frac{\pi d_{m1} n_1}{60000} \quad v_2 = \frac{\pi d_{m2} n_2}{60000}$$

v_1, v_2	d_{m1}, d_{m2}	n_1, n_2
$\frac{m}{s}$	mm	min ⁻¹

Gleitgeschwindigkeit v_g

$$v_g = \frac{v_1}{\cos \gamma_m}$$

Teilkreisdurchmesser d_2

$$d_2 = z_2 m = \frac{z_2 m_n}{\cos \gamma_m}$$

Maschinenelemente

Zahnradgetriebe

10.6.5 Wirkungsgrad, Kühlöldurchsatz und Schmierarten der Getriebe

Gesamtwirkungsgrad η_{ges} in einer Getriebestufe

$\eta_{ges} = 0,96 \dots 0,98$
bei Schneckengetrieben
gesondert berechnen
nach 10.6.4

enthält Verzahnungsverluste,
Lagerverluste, Plantschverluste bei
Ölfüllung bis Zahnfuß, Verluste durch
Wellenabdichtungen

erforderlicher Kühlöldurchsatz \dot{V}_k bei Ölumlaufkühlung

$$\dot{V}_k = P_1 \frac{1 - \eta_{ges}}{c \rho (\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$

\dot{V}_k	P_1	ρ	ϑ	η_{ges}, c
$\frac{m^3}{s}$	W	$\frac{kg}{m^3}$	$^{\circ}C$	1

P_1 Antriebsleistung

c spezifische Wärmekapazität des Öls für Maschinenöl ist:

$$c = 1675 \frac{J}{kgK} \quad (1 K = 1 ^{\circ}C)$$

ρ Dichte des Öls $\approx 900 \frac{kg}{m^3}$ (Maschinenöl)

ϑ_1, ϑ_2 Temperatur des zu- und abfließenden Öls

erforderliche Schmierarten

Teilkreisgeschwindigkeit in m/s	Art der Schmierung
0 ... 0,8	Fett auftragen
0,8 ... 4	Fett- oder Öltauchschmierung,
4 ... 12	Öltauchschmierung
12 ... 60	Spritzschmierung

Normen (Auswahl)¹⁾

DIN 884 Walzenfräser, DIN 885 Scheibenfräser
 DIN 1412 Spiralbohrer aus Schnellarbeitsstahl, Anschliffformen
 DIN 1415 Räumwerkzeuge; Einteilung, Benennung, Bauarten
 DIN 1416 Räumwerkzeuge; Gestaltung von Schneidzahn und Spankammer
 DIN 1417 Räumwerkzeuge; Runde und eckige Schäfte
 DIN 1418 Räumwerkzeuge; Schafthalter und Endstückhalter für Räumwerkzeuge
 DIN 1836 Werkzeug-Anwendungsgruppen zum Zerspanen
 DIN 4951 Gerade Drehmeißel mit Schneiden aus Hartmetall
 DIN 4971 Gerade Drehmeißel mit Schneidplatte aus Hartmetall
 DIN ISO 5419 Spiralbohrer, Benennungen, Definitionen und Formen
 DIN 6580 Begriffe der Zerspantechnik, Bewegungen und Geometrie des Zerspanvorgangs
 DIN 6581 Begriffe der Zerspantechnik, Bezugssysteme und Winkel am Schneidteil des Werkzeugs
 DIN 6582 Begriffe der Zerspantechnik, Ergänzende Begriffe am Werkzeug
 DIN 6583 Begriffe der Zerspantechnik, Standbegriffe
 DIN 6584 Begriffe der Zerspantechnik; Kräfte, Energie, Arbeit, Leistungen
 DIN 6588 Fertigungsverfahren Zerteilen
 DIN 6589 Fertigungsverfahren Spanen; Teil 0: Allgemeines; Einordnung, Unterteilung, Begriffe
 Teil 1: Drehen, Teil 2: Bohren, Teil 3: Fräsen, Teil 4: Hobeln und Stoßen, Teil 5: Räumen,
 Teil 6: Sägen, Teil 7: Feilen und Raspeln, Teil 8: Bürstspanen, Teil 9: Schaben und Meißeln,
 Teil 11: Schleifen mit rotierendem Werkzeug, Teil 12: Bandschleifen, Teil 13: Hubschleifen,
 Teil 14: Honen, Teil 15: Läppen, Teil 17: Gleitspanen
 DIN 69120 Gerade Schleifscheiben

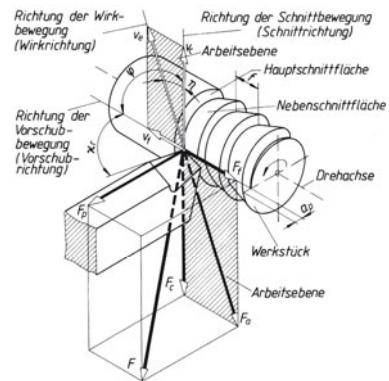
1) Nähere Angaben in <http://beuth.de>

11.1 Drehen und Grundbegriffe der Zerspantechnik

11.1.1 Bewegungen, Kräfte, Schnittgrößen und Spanungsgrößen

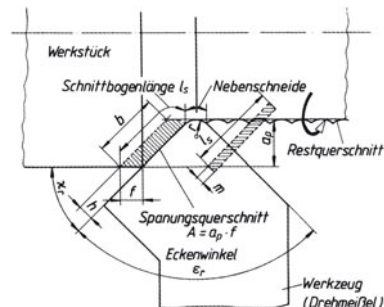
Bewegungen, Geschwindigkeiten und Kräfte beim Drehen (Außendrehen)

- F Zerspankraft (Kräfte in Bezug auf das Werkzeug)
- F_a Aktivkraft
- F_c Schnittkraft
- F_f Vorschubkraft
- F_p Passivkraft
- v_c Schnittgeschwindigkeit
- v_f Vorschubgeschwindigkeit
- v_e Wirkgeschwindigkeit
- f Vorschub
- a_p Schnitttiefe
- κ_r Einstellwinkel
- φ Vorschubrichtungswinkel (beim Drehen 90°)
- η Wirkrichtungswinkel



Schnittgrößen und Spanungsgrößen

- f Vorschub
- a_p Schnitttiefe
- b Spannungsbreite
- h Spannungsdicke
- A Spannungsquerschnitt
- l_s Schnittbogenlänge
- m Bogenspanndicke



Zerspantechnik

Drehen und Grundbegriffe der Zerspantechnik

Schnitttiefe a_p

Tiefe des Eingriffs der Hauptschneide.
 Berechnung der erforderlichen Schnitttiefe $a_{p\text{erf}}$ für eine ökonomische Nutzung der Motorleistung beim Runddrehen:

$$a_{p\text{erf}} = \frac{6 \cdot 10^4 P_m \eta_g}{f k_c v_c}$$

$a_{p\text{erf}}$	P_m	f	k_c	v_c
mm	kW	$\frac{\text{mm}}{\text{U}}$	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\frac{\text{m}}{\text{min}}$

- P_m Motorleistung
- η_g Getriebewirkungsgrad
- f Längsvorschub der Maschine
- k_c spezifische Schnittkraft
- v_c Schnittgeschwindigkeit

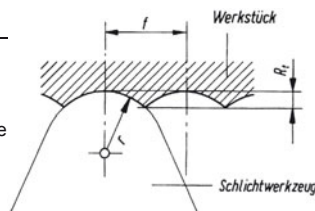
Vorschub f

Weg, den das Werkzeug während einer Umdrehung (U) des Werkstücks in Vorschubrichtung zurücklegt.
 Für eine vorgegebene Rautiefe R_t gilt bei $r > 0,67 f$:

$$f_{\text{erf}} = \sqrt{8r R_t}$$

f_{erf}	r, R_t
$\frac{\text{mm}}{\text{U}}$	mm

- r Radius der gerundeten Schneidenecke des Zerspanwerkzeugs
- R_t vorgegebene Rautiefe



Vorschübe f nach DIN 803 (Auszug)

0,01	0,0315	0,1	0,315	1	3,15
0,0112	0,0355	0,112	0,355	1,12	3,55
0,0125	0,04	0,125	0,4	1,25	4
0,014	0,045	0,14	0,45	1,4	4,5
0,016	0,05	0,16	0,5	1,6	5
0,018	0,056	0,18	0,56	1,8	5,6
0,02	0,063	0,2	0,63	2	6,3
0,0224	0,071	0,224	0,71	2,24	7,1
0,025	0,08	0,25	0,8	2,5	8
0,028	0,09	0,28	0,9	2,8	9

Die angegebenen Vorschübe sind gerundete Nennwerte der Grundreihe R 20 (Normzahlen) in mm/U mit dem Stufensprung $\varphi = 1,12$.

Für größere Vorschubstufungen kann von 1 ausgehend wahlweise jeder 2., 3., 4. oder 6. Zahlenwert der Grundreihe zu Vorschubreihen mit den Stufensprüngen $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ und φ^6 zusammengestellt werden.

Spannungsdicke h

$$h = f \sin \kappa_r$$

Spannungsbreite b

$$b = \frac{a_p}{\sin \kappa_r}$$

Spannungsquerschnitt A

$$A = b h = a_p f$$

Spannungsverhältnis ϵ_s

$$\epsilon_s = \frac{b}{h} = \frac{a_p}{f \sin^2 \kappa_r}$$

**Schnittgeschwindigkeit v_c
(Richtwerte in 11.1.2)**

Momentanbewegung des Werkzeugs in Schnittrichtung relativ zum Werkstück

$$v_c = \frac{d \pi n}{1000}$$

d Werkstückdurchmesser
 n Drehzahl des Werkstücks

v_c	d	n
$\frac{m}{min}$	mm	min^{-1}

Umrechnung der Richtwerte v_c auf abweichende Standzeitvorgaben bei sonst unveränderten Spanungsbedingungen:

$$v_{c1} = v_c \left(\frac{T}{T_1} \right)^y$$

v_{c1} Schnittgeschwindigkeit, auf T_1 umgerechnet
 v_c empfohlene Schnittgeschwindigkeit nach 11.1.3
 T Standzeit, die bei v_c erreicht wird
 T_1 vorgegebene Standzeitforderung (z. B. T_2 oder T_k)
 y Standzeitexponent (nach 1.8)

v_{c1}, v_c	T, T_1	y
$\frac{m}{min}$	min	1

**erforderliche Drehzahl
 n_{erf} des Werkstücks**

$$n_{erf} = \frac{1000 v_c}{d \pi}$$

v_c empfohlene Schnittgeschwindigkeit (nach 11.1.3)
 d Werkstückdurchmesser

n_{erf}	v_c	d
min^{-1}	$\frac{m}{min}$	mm

Maschinendrehzahl n

Bei der Festlegung der Werkstückdrehzahl sind bei Stufengetrieben die einstellbaren Maschinendrehzahlen zu beachten:
Drehzahlen n (Lastdrehzahlen) nach DIN 804 in min^{-1}

10	31,5	100	315	1000	3150
11,2	35,5	112	355	1120	3550
12,5	40	125	400	1250	4000
14	45	140	450	1400	4500
16	50	160	500	1600	5000
18	56	180	560	1800	5600
20	63	200	630	2000	6300
22,4	71	224	710	2240	7100
25	80	250	800	2500	8000
28	90	280	900	2800	9000

Die angegebenen Drehzahlen sind Lastdrehzahlen (Abtriebsdrehzahlen bei Nennbelastung des Motors) als gerundete Nennwerte der Grundreihe R 20 (Normzahlen) mit dem Stufensprung $\varphi = 1,12$.

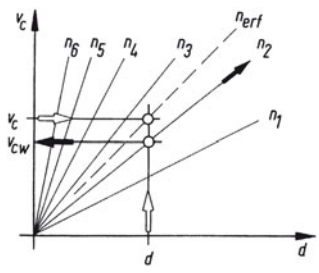
Für größere Drehzahlstufungen kann wahlweise jeder 2., 3., 4. oder 6. Zahlenwert der Grundreihe zu Drehzahlreihen mit den Stufensprüngen $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ und φ^6 zusammengestellt werden.

Aus dem Drehzahlangebot der Maschine wird die Drehzahl gewählt, die der erforderlichen Drehzahl (n_{erf}) am nächsten liegt.

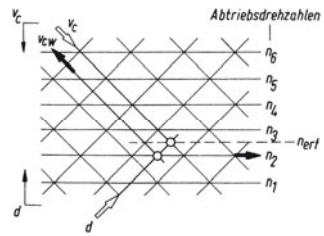
Zerspantechnik

Drehen und Grundbegriffe der Zerspantechnik

Ist eine Mindeststandzeit gefordert, so wird die nächstkleinere Maschinendrehzahl gewählt (Maschinendiagramm).



Maschinendiagramm mit einfach geteilten Koordinatenachsen



Maschinendiagramm mit logarithmisch geteilten Koordinatenachsen

wirkliche Schnittgeschwindigkeit v_{cw}

$$v_{cw} = \frac{d \pi n}{10^3}$$

v_{cw}	d	n
$\frac{m}{min}$	mm	min^{-1}

d Werkstückdurchmesser
 n gewählte Maschinendrehzahl

wirkliche Standzeit T_w

$$T_w = T \left(\frac{v_c}{v_{cw}} \right)^y$$

T_w, T	v_c, v_{cw}	y
min	$\frac{m}{min}$	1

v_c, T vorgegebenes zusammengehörendes Wertepaar (nach 11.1.3)
 v_{cw} wirkliche Schnittgeschwindigkeit
 y Standzeitexponent (nach 11.1.7)

Vorschubgeschwindigkeit v_f

Momentangeschwindigkeit des Werkzeugs in Vorschubrichtung:

$$v_f = f n$$

v_f	f	n
$\frac{mm}{min}$	$\frac{mm}{U}$	min^{-1}

f Vorschub in mm/U
 n Drehzahl des Werkstücks

Wirkgeschwindigkeit v_e

Momentangeschwindigkeit des betrachteten Schneidenpunkts (Bezugspunkt) in Wirkrichtung relativ zum Werkstück:

$$v_e = \sqrt{v_c^2 + v_f^2} \quad \text{bei } \varphi = 90^\circ$$

$$v_e = \frac{v_c}{\cos \eta} = \frac{v_f}{\sin \eta}$$

$$v_f \ll v_c \Rightarrow v_e \approx v_c$$

11.1.2 Richtwerte für die Schnittgeschwindigkeit v_c beim Drehen

Die Richtwerte sind von der Firma Gebr. Boehringer in Göppingen aus Versuchswerten von Prof. Kienzle, AWF 158 und allgemeinen Hinweisen aus dem Schrifttum abgeleitet worden.

Werkstoff	Zufließgeschwindigkeit $R_{p0,2}$ in N/mm ²	Schneidstoff ³⁾	Schnittgeschwindigkeit in v_c in m/min bei Vorschub f in mm/U und Einstellwinkel $\alpha_r^{1)2)}$														
			0,063	0,1	0,16	0,25	0,4	0,63	1	1,25	1,6	2	2,5	3,15			
E295	500... 600	HM	45°	70°	90°	45°	70°	90°	45°	70°	90°	45°	70°	90°	45°	70°	90°
		HSS	224	212	200	180	170	160	150	140	132	125	118	112	106	100	100
C35	600 ... 700	HM	475	560	400	375	350	335	315	280	265	250	236	224	200	190	180
		Keramik	212	200	190	170	160	150	140	132	125	118	112	106	100	100	95
C45	700... 850	HM	400	500	335	315	300	280	265	250	236	224	212	200	190	170	160
		Keramik	180	170	160	140	132	125	118	112	106	100	95	90	85	80	75
E360	850 ... 1000	HM	315	400	280	265	250	236	224	212	200	190	180	170	160	150	140
		Keramik	180	170	160	140	132	125	118	112	106	100	95	90	85	80	75
EN-GJL-150	850 ... 1000	HM	140	132	125	118	112	106	100	95	90	85	80	75	71	67	63
		Keramik	190	180	170	150	140	132	125	118	112	106	100	95	90	85	80
EN-GJL-250		HM	95	90	85	80	75	71	67	63	60	56	53	50	47,5	45	42,5
		Keramik	212	200	190	180	170	160	150	140	132	125	118	112	106	100	95
EN-GJL-600-15		HM	170	160	150	140	132	125	118	112	106	100	95	90	85	80	75
		Keramik	19	18	17	16	15	14	13,2	12,5	11,8	11,2	10,6	10	9,5	9	8,5
Leg. Gusseisen DIN EN 12513		HM	125	112	106	100	95	90	85	80	75	71	67	63	60	56	53
		Keramik	19	18	17	16	15	14	13,2	12,5	11,8	11,2	10,6	10	9,5	9	8,5
Cu Sn - Leg. DIN EN 1982		HM	315	300	280	265	250	236	224	212	200	190	180	170	160	150	140
		HSS	425	400	375	355	335	315	300	280	265	250	236	224	200	190	180
Cu Sn - Leg. DIN EN 12 163		HM	500	475	450	425	400	375	355	335	315	300	280	265	250	236	224
		HSS	224	212	200	190	180	170	160	150	140	132	125	118	112	106	100
Al-Gussleg. DIN EN 1 706		HM	1600	1500	1400	1320	1250	1180	1120	1060	1000	950	900	850	800	750	710
		HSS	850	800	750	710	670	630	600	560	530	500	475	450	425	400	

1) Die eingetragenen Werte gelten für Schnitttiefe a_p bis 2,24 mm. Über 2,24 bis 7,1 mm sind die Werte um 1 Stufe der Reihe R10 um angenähert 20 % und über 7,1 bis 22,4 mm um 1 Stufe der Reihe R5 um angenähert 40 % zu kürzen.

2) Die Werte v_c müssen beim Abdrehen einer Kruste, Gusshaut oder bei Sandeinschlüssen um 30 ... 50 % verringert werden.

3) Die Standzeit T beträgt für gelötete Drehmeißel (L) aus HM = 240 min; aus HSS = 60 min; für Wendeschneidplatten (W) aus HM und Keramik = 15 min.

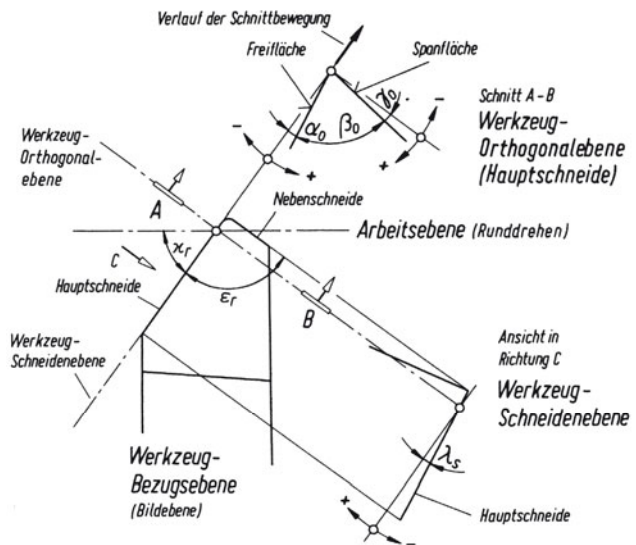
Zerspantechnik

Drehen und Grundbegriffe der Zerspantechnik

11.1.3 Werkzeugwinkel

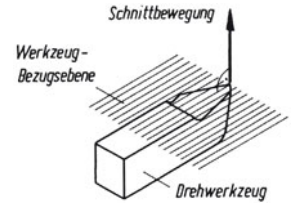
Werkzeug-Bezugssystem und Werkzeugwinkel am Drehwerkzeug (gerader, rechter Drehmeißel)

- α_o Orthogonalfreiwinkel
- β_o Orthogonalkeilwinkel
- γ_o Orthogonalspanwinkel
- $\alpha_o + \beta_o + \gamma_o = 90^\circ$
- κ_r Einstellwinkel
- ϵ_r Eckenwinkel
- λ_s Neigungswinkel



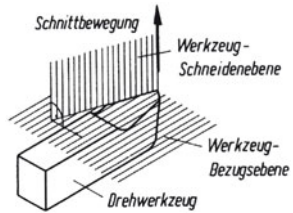
Werkzeug-Bezugsebene P_r

Ebene durch den betrachteten Schneidendenpunkt, rechtwinklig zur Richtung der Schnittbewegung und parallel zur Auflagefläche des Drehwerkzeugs.



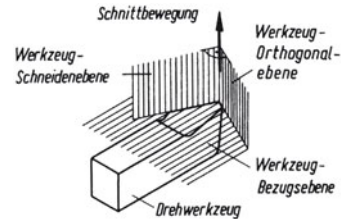
Werkzeug-Schneidenebene P_s

Ebene rechtwinklig zur Werkzeug-Bezugsebene. Sie enthält die (gerade) Hauptschneide.



Werkzeug-Orthogonal-ebene P_o

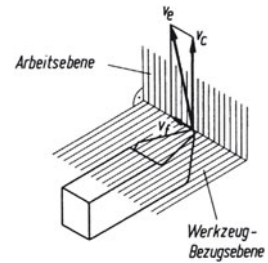
Ebene durch den betrachteten Schneidendenpunkt, rechtwinklig zur Werkzeug-Bezugsebene und rechtwinklig zur Werkzeug-Schneidenebene. In dieser Ebene werden die Winkel am Schneidkeil gemessen.



Arbeitsebene P_f

Ebene durch den betrachteten Schneidendenpunkt, rechtwinklig zur Werkzeug-Bezugsebene.

Sie enthält die Richtungen von Vorschub- und Schnittbewegung.



Orthogonalfreiwinkel α_o

Winkel zwischen Freifläche und Werkzeug-Schneidenebene, gemessen in der Werkzeug-Orthogonalebene.

Empfohlene Freiwinkel liegen im Bereich von $5^\circ \dots 12^\circ$.

Orthogonalkeilwinkel β_o

Winkel zwischen Freifläche und Spanfläche, gemessen in der Werkzeug-Orthogonalebene.

Er soll mit Rücksicht auf das Standverhalten des Werkzeugs möglichst groß sein.

$$\beta_o = 90^\circ - \alpha_o - \gamma_o$$

Orthogonalspanwinkel γ_o

Winkel zwischen Spanfläche und Werkzeug-Bezugsebene, gemessen in der Werkzeug-Orthogonalebene.

Empfohlene Spanwinkel liegen im Bereich von $0^\circ \dots 20^\circ$.

Bei höherer Belastung und größerem Wärmeaufkommen – (*Beispiel*: Schrumpferspannung) werden auch negative Spanwinkel (bis etwa -20°) angewendet. Der Schneidkeil ist dann mechanisch und thermisch höher belastbar und die Schneidkeilschwächung bei Kolkverschleiß geringer.

Einstellwinkel κ_r

Winkel zwischen Arbeitsebene und Werkzeug-Schneidenebene, gemessen in der Werkzeug-Bezugsebene.

Empfohlene Einstellwinkel liegen im Bereich von $45^\circ \dots 90^\circ$.

Eckenwinkel ε_r

Winkel zwischen den Werkzeug-Schneidenebenen zusammengehörender Haupt- und Nebenschneiden, gemessen in der Werkzeug-Bezugsebene.

Empfohlener Eckenwinkel für Vorschübe bis 1 mm/U : $\varepsilon_r = 90^\circ$ (bei größeren Vorschüben ist ε_r größer).

Neigungswinkel λ_s

Winkel zwischen Hauptschneide und Werkzeug-Bezugsebene, gemessen in der Werkzeug-Schneidenebene.

Empfohlene Neigungswinkel von $5^\circ \dots 20^\circ$ (positiv oder negativ).

Zerspantechnik

Drehen und Grundbegriffe der Zerspantechnik

11.1.4 Zerspankräfte

Schnittkraft F_c
(nach Kienzle)

$$F_c = a_p f k_c$$

a_p Schnitttiefe
 f Vorschub
 k_c spezifische Schnittkraft

F_c	a_p	f	k_c
N	mm	$\frac{\text{mm}}{\text{U}}$	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

spezifische Schnittkraft k_c

Richtwerte aus 11.1.5

spezifische Schnittkraft k_c
(rechnerisch)

$$k_c = \frac{k_{c1.1}}{h^z} K_v K_\gamma K_{ws} K_{wv} K_{ks} K_f$$

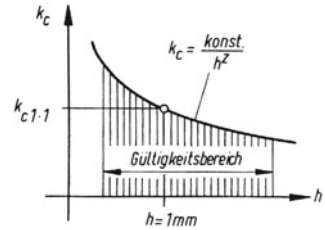
h Spanungsdicke nach 11.1.1
 z Spanungsdickenexponent
 K Korrekturfaktoren

$k_c, k_{c1.1}$	h	z	K
$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	mm	1	1

Hauptwert der spezifischen Schnittkraft $k_{c1.1}$ und Spanungsdickenexponent z

$k_{c1.1}$ ist die spezifische Schnittkraft für 1 mm² Spanungsquerschnitt (1 mm Spanungsdicke mal 1 mm Spanungsbreite)
 Richtwerte für $k_{c1.1}$ in N/mm² und Spanungsdickenexponent z

Werkstoff	$k_{c1.1}$	z
S 235 JR	1780	0,17
E295	1990	0,26
E335	2110	0,17
E360	2260	0,30
C15	1820	0,22
C35	1860	0,20
C45	2220	0,14
C60	2130	0,18
16 Mn Cr 5	2100	0,26
25 Cr Mo 4	2070	0,25
GE 240	1600	0,17
EN-GJL-200	1020	0,25
Messing	780	0,18
Gussbronze	1780	0,17



Tabellenwerte gelten für $h = 0,05 \dots 2,5 \text{ mm}$
 $\epsilon_s \approx 4$

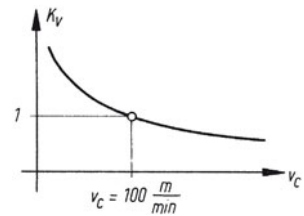
Schnittgeschwindigkeits-Korrekturfaktor K_v
für

$$v_c = 20 \dots 600 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$$K_v = \frac{2,023}{v_c^{0,153}} \text{ für } v_c < 100 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$$K_v = \frac{1,380}{v_c^{0,07}} \text{ für } v_c > 100 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$$K_v = 1 \text{ für } v_c = 100 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$



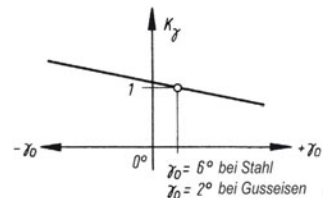
Spanwinkel-Korrekturfaktor K_γ

$$K_\gamma = 1,09 - 0,015 \gamma_0^\circ$$

für langspanende Werkstoffe (z. B. Stahl)

$$K_\gamma = 1,03 - 0,015 \gamma_0^\circ$$

für kurzspanende Werkstoffe (z. B. Gusseisen)

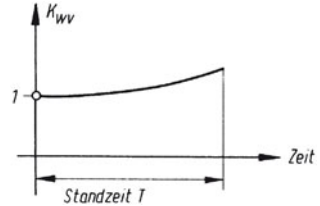


Schneidstoff-Korrekturfaktor K_{ws}

$K_{ws} = 1,05$ für Schnellarbeitsstahl
 $K_{ws} = 1$ für Hartmetall
 $K_{ws} = 0,9 \dots 0,95$ für Schneidkeramik

Werkzeugverschleiß-Korrekturfaktor K_{wv}

$K_{wv} = 1,3 \dots 1,5$ für Drehen, Hobeln und Räumen
 $K_{wv} = 1,25 \dots 1,4$ für Bohren und Fräsen
 $K_{wv} = 1$ bei scharfer Schneide



Kühlschmierungs-Korrekturfaktor K_{ks}

$K_{ks} = 1$ für trockene Zerspaltung
 $K_{ks} = 0,85$ für nicht wassermischbare Kühlschmierstoffe
 $K_{ks} = 0,9$ für Kühlschmier-Emulsionen

Werkstückform-Korrekturfaktor K_f

$K_f = 1$ für konvexe Bearbeitungsflächen
(Beispiel: Außendrehen)
 $K_f = 1,1$ für ebene Bearbeitungsflächen
(Beispiel: Hobeln, Räumen)
 $K_f = 1,2$ für konkave Bearbeitungsflächen
(Beispiel: Innendrehen, Bohren, Fräsen)

Vorschubkraft F_f

Komponente der Zerspankraft F in Vorschubrichtung.

Aktivkraft F_a

Resultierende aus Schnittkraft F_c und Vorschubkraft F_f :

$$F_a = \sqrt{F_c^2 + F_f^2}$$

Passivkraft F_p

Komponente der Zerspankraft F rechtwinklig zur Arbeitsebene. Sie verformt während der Zerspaltung das Werkstück in seiner Einspannung und verursacht dadurch Formfehler.

Drangkraft F_d

Resultierende aus Vorschubkraft F_f und Passivkraft F_p :

$$F_d = \sqrt{F_f^2 + F_p^2}$$

Zerspankraft F

Resultierende aus Schnittkraft F_c , Vorschubkraft F_f und Passivkraft F_p :

$$F = \sqrt{F_c^2 + F_f^2 + F_p^2}$$

11.1.5 Richtwerte für die spezifische Schnittkraft k_c beim Drehen

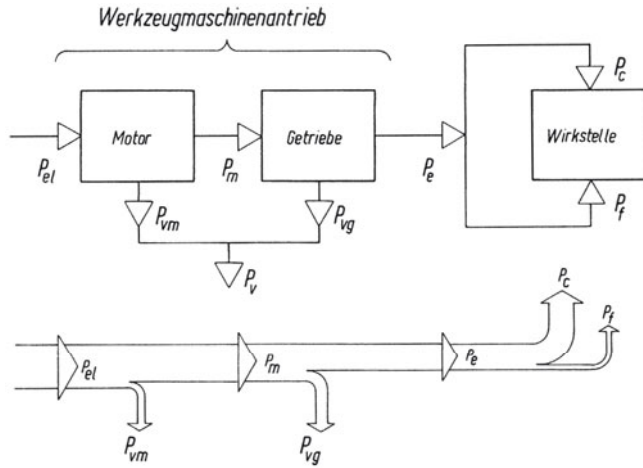
Die Richtwerte sind von der Firma Gebr. Boehring in Göppingen aus Versuchswerten von Prof. Kienzle, AWF 158 und allgemeinen Hinweisen aus dem Schrifttum abgeleitet worden.

Werkstoff	Zugfestig- keit R_m in N/mm ²	spez. Schnittkraft k_c in N/mm ² bei Vorschub f in mm/U und Einstellwinkel κ_T °																				
		0,063			0,1			0,16			0,25			0,4			0,63					
		45°	70°	90°	45°	70°	90°	45°	70°	90°	45°	70°	90°	45°	70°	90°	45°	70°	90°			
S275 JR	bis 500	3 010	2 860	2 820	2 760	2 635	2 600	2 550	2 400	2 435	2 400	2 360	2 265	2 240	2 200	2 085	2 060	1 945	1 920	1 890	1 810	1 800
E 295	520	4 470	4 180	4 100	3 980	3 690	3 610	3 500	3 260	3 190	3 100	2 880	2 830	2 740	2 550	2 430	2 280	2 280	2 240	2 180	2 040	1 990
E 335	620	3 620	3 430	3 380	3 300	3 130	3 080	3 010	2 870	2 830	2 780	2 650	2 620	2 560	2 470	2 440	2 400	2 300	2 270	2 220	2 130	2 110
E 360	720	5 660	5 260	5 150	4 980	4 610	4 580	4 350	4 010	3 920	3 800	3 500	3 410	3 300	2 060	2 990	2 900	2 670	2 600	2 520	2 310	2 280
C 45 E	670	3 450	3 300	3 260	3 200	3 060	3 040	2 990	2 870	2 840	2 800	2 690	2 660	2 620	2 530	2 500	2 460	2 370	2 340	2 310	2 240	2 220
C 60 E	770	3 690	3 500	3 450	3 380	3 200	3 150	3 100	2 960	2 920	2 860	2 730	2 700	2 650	2 530	2 490	2 450	2 330	2 300	2 260	2 160	2 130
16 Mn Cr 5	630	4 720	4 410	4 320	4 200	3 910	3 830	3 720	3 470	3 400	3 300	3 090	3 020	2 930	2 720	2 660	2 580	2 410	2 360	2 300	2 140	2 100
16 Cr-Ni 6	600	4 300	4 070	4 000	3 900	3 670	3 610	3 530	3 345	3 290	3 220	3 065	3 000	2 940	2 795	2 750	2 670	2 505	2 460	2 400	2 280	2 240
42 Cr-Mo 4	730	5 450	5 100	5 000	4 880	4 580	4 500	4 370	4 080	4 000	3 890	3 620	3 550	3 450	3 220	3 150	3 060	2 860	2 800	2 720	2 550	2 500
50 Cr-V 4	600	5 000	4 650	4 560	4 440	4 170	4 100	3 980	3 690	3 610	3 500	3 260	3 190	3 100	2 880	2 820	2 730	2 550	2 500	2 430	2 270	2 220
15 Cr-Mo 5	590	3 880	3 715	3 660	3 590	3 430	3 390	3 320	3 175	3 130	3 070	2 935	2 900	2 850	2 720	2 680	2 630	2 505	2 470	2 420	2 325	2 290
Mn ₂ -CrNi ₂	850 ... 1000	4 530	4 270	4 200	4 100	3 870	3 800	3 710	3 440	3 450	3 380	3 200	3 150	3 080	2 900	2 850	2 780	2 640	2 600	2 550	2 420	2 380
CrMo- u. a. leg. St.	1000 ... 1400	4 780	4 520	4 450	4 350	4 120	4 050	3 960	3 760	3 700	3 610	3 410	3 350	3 280	3 120	3 100	3 030	2 890	2 850	2 800	2 660	2 620
Nichtrost. St.	600 ... 700	4 500	4 270	4 200	4 120	3 910	3 850	3 770	3 560	3 530	3 460	3 300	3 250	3 180	3 040	3 000	2 940	2 820	2 780	2 730	2 610	2 580
Mn-Hartstahl		6 600	6 210	6 100	5 950	5 600	5 500	5 370	5 060	4 980	4 860	4 580	4 500	4 400	4 150	4 080	3 980	3 770	3 700	3 620	3 410	3 360
Hartguss		3 720	3 550	3 500	3 420	3 240	3 190	3 130	2 990	2 940	2 880	2 730	2 680	2 620	2 480	2 450	2 400	2 280	2 240	2 200	2 090	2 060
GE 240	300 ... 500	2 720	2 590	2 560	2 510	2 390	2 360	2 320	2 210	2 180	2 140	2 030	2 000	1 960	1 890	1 860	1 820	1 740	1 720	1 690	1 620	1 600
GE 260	500 ... 700	3 010	2 860	2 820	2 760	2 630	2 600	2 550	2 430	2 400	2 360	2 270	2 240	2 200	2 090	2 060	2 030	1 950	1 920	1 890	1 820	1 800
EN-GJL-150		1 800	1 700	1 670	1 630	1 530	1 510	1 480	1 390	1 370	1 340	1 270	1 250	1 220	1 160	1 120	1 050	1 040	1 020	960	950	
EN-GJL-250		2 570	2 410	2 360	2 300	2 150	2 120	2 060	1 910	1 870	1 820	1 690	1 660	1 610	1 500	1 470	1 430	1 320	1 300	1 280	1 190	1 160
Temperguss		2 440	2 280	2 240	2 180	2 040	2 000	1 950	1 830	1 800	1 750	1 630	1 600	1 560	1 490	1 460	1 420	1 340	1 320	1 290	1 220	1 200
GuSn-Gussleg.		3 010	2 860	2 820	2 760	2 630	2 600	2 550	2 430	2 400	2 360	2 270	2 240	2 200	2 090	2 060	2 030	1 950	1 920	1 890	1 820	1 800
CuSnZn-Gussleg.		1 360	1 270	1 250	1 220	1 140	1 120	1 090	1 020	1 000	980	910	900	880	810	800	780	720	710	700	660	650
CuZn-Knetleg.		1 380	1 310	1 300	1 280	1 210	1 200	1 180	1 110	1 100	1 080	1 010	1 000	980	880	810	800	780	710	700	660	650
Al - Gussleg	300 ... 420	1 360	1 270	1 250	1 220	1 140	1 120	1 090	1 020	1 000	980	910	900	880	810	800	780	710	710	700	660	650
Mg - Gussleg		490	475	470	455	435	430	420	405	400	390	365	360	350	335	330	320	305	300	300	285	280

11.1.6 Leistungsbedarf

Leistungsflussbild einer Drehmaschine

- P_c Schnittleistung
- P_f Vorschubleistung
- P_e Wirkleistung (Zerspanleistung)
- P_m Motorleistung
- P_{el} elektrische Motorleistung
- P_{vm} Verlustleistung im Motor
- P_{vg} Verlustleistung im Getriebe
- P_v Verlustleistung im Antrieb



Schnittleistung P_c

$$P_c = \frac{F_c v_c}{6 \cdot 10^4} = \frac{a_p f k_c v_c}{6 \cdot 10^4}$$

P_c	F_c	a_p	f	k_c	v_c
kW	N	mm	$\frac{\text{mm}}{\text{U}}$	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\frac{\text{m}}{\text{min}}$

Vorschubleistung P_f

$$P_f = \frac{F_f v_f}{6 \cdot 10^4} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline F_f & v_f & P_f \\ \hline \text{N} & \frac{\text{mm}}{\text{min}} & \text{W} \\ \hline \end{array}$$

- F_c Schnittkraft (11.1.4)
- v_c Schnittgeschwindigkeit (11.1.1)
- F_f Vorschubkraft
- v_f Vorschubgeschwindigkeit (11.1.1)

Bei der Berechnung des Leistungsbedarfs ist die Vorschubleistung P_f wegen der geringen Vorschubgeschwindigkeit v_f vernachlässigbar.

Motorleistung P_m

$$P_m = \frac{P_c}{\eta_g}$$

P_m, P_c	η_g
kW	1

- P_c Schnittleistung
- η_g Getriebewirkungsgrad $\eta_g = 0,7 \dots 0,85$

Zeitspannungsvolumen Q

Abzuspannendes Werkstoffvolumen (Spannungsvolumen V) je Zeiteinheit

$$Q = A \cdot v_c = a_p \cdot f \cdot v_c$$

$$Q = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot P_c}{k_c}$$

Q	A	a_p	f	v_c	P_c	k_c
$\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}$	mm^2	mm	$\frac{\text{mm}}{\text{U}}$	$\frac{\text{m}}{\text{min}}$	kW	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

- A Spannungsquerschnitt
- a_p Schnitttiefe
- f Vorschub
- v_c Schnittgeschwindigkeit
- P_c Schnittleistung
- k_c spezifische Schnittkraft

Zerspantechnik

Drehen und Grundbegriffe der Zerspantechnik

11.1.7 Standverhalten

Standgleichung

Für spanende Fertigung durch Außendrehen gilt bei bestimmtem Werkstoff und Schneidstoff:

$$v_c T^y f^p a_p^q (\sin \kappa_r)^{p-q} \approx K$$

v_c	T	f	a_p	κ_r	K, y, p, q
$\frac{m}{min}$	min	$\frac{mm}{U}$	mm	°	1

v_c Schnittgeschwindigkeit	K Konstante
T Standzeit	y Standzeitexponent
f Vorschub	p Spannungsdickenexponent
a_p Schnitttiefe	q Spanungsbreitenexponent
κ_r Einstellwinkel	

Richtwerte für Außendrehen

Richtwerte nach H. Hennermann, Werkstattblatt 576, Carl Hanser Verlag

Werkstoff	Schneidstoff	f mm/U	K	y	p	q
S 235 JR	P 10	0,1 ... 0,6	615	0,25	0,25	0,1
S 275 JR	M 20	0,1 ... 1,0	590	0,3	0,16	0,09
C 15						
E 295	P 10	0,1 ... 0,6	480	0,3	0,3	0,1
C 35	M 30	0,1 ... 1,2	410	0,3	0,2	0,08
E 335	P 10	0,1 ... 0,6	380	0,22	0,25	0,1
C 45	M 30	0,1 ... 1,2	380	0,3	0,19	0,08
E 360	P 10	0,1 ... 0,6	330	0,25	0,25	0,1
C 60	M 30	0,1 ... 1,2	330	0,31	0,2	0,08
16 Mn Cr 5	P 10	0,1 ... 0,6	300	0,3	0,25	0,1
25 Cr Mo 4	P 30	0,3 ... 1,5	180	0,27	0,3	0,1
GS 20	M 30	0,1 ... 1,2	400	0,3	0,2	0,1
GE 240	P 10	0,1 ... 0,6	240	0,3	0,3	0,1
EN-GJL-200	M 20	0,3 ... 0,6	245	0,5	0,18	0,11
Messing	K 20	0,1 ... 0,6	5000	0,59	0,18	0,1
Gussbronze	K 20	0,1 ... 0,6	1800	0,41	0,25	0,1

Die Tabellenwerte beziehen sich auf eine zulässige Verschleißmarkenbreite $VB_{zul} = 0,8$ mm und gelten für folgende Werkzeugwinkel:

	α_0	γ_0	λ_s
Stahl, Stahlguss	5° ... 8°	12°	- 4°
Gusseisen	5° ... 8°	0° ... 6°	0°
Messing, Bronze	8°	8° ... 12°	0°

Wird eine von $VB = 0,8$ mm abweichende maximal zulässige Verschleißmarkenbreite $VB' (< 0,8$ mm) vorgegeben, so wird für T die Größe T' in die Rechnung eingesetzt:

$$T' = \frac{0,8}{VB'} T$$

T, T'	VB'
min	mm

Berechnung der Standzeit T

$$T \approx \sqrt[y]{\frac{K}{V_c f^p a_p^q (\sin \kappa_r)^{p-q}}}$$

Berechnung der Standgeschwindigkeit v_{cT}

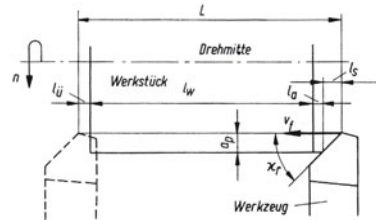
$$v_{cT} \approx \frac{K}{T^y f^p a_p^q (\sin \kappa_r)^{p-q}}$$

11.1.8 Hauptnutzungszeit

Hauptnutzungszeit t_h beim Runddrehen

$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_{\dot{u}} + l_s}{f n}$$

- L Werkzeugweg in Vorschubrichtung
- v_f Vorschubgeschwindigkeit (Längsvorschub)
- l_w Drehlänge am Werkstück
- l_a Anlaufweg, Richtwert: 1... 2 mm
- $l_{\dot{u}}$ Überlaufweg, Richtwert: 1 ... 2 mm
- l_s Schneidzugabe (werkzeugabhängig)

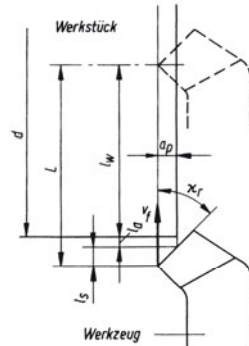


$$l_s = \frac{a_p}{\tan \kappa_r} \quad \begin{array}{l} a_p \text{ Schnitttiefe} \\ \kappa_r \text{ Einstellwinkel} \end{array}$$

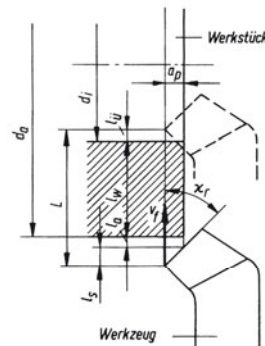
Hauptnutzungszeit t_h beim Plandrehen, n konstant

$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_s}{f n}$$

$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_{\dot{u}} + l_s}{f n}$$



Stirnfläche des Werkstücks ist ein Vollkreis



Stirnfläche des Werkstücks ist ein Kreisring

- L Werkzeugweg in Vorschubrichtung
- v_f Vorschubgeschwindigkeit (Planvorschub)
- l_w Drehlänge am Werkstück

$$l_w = \frac{d}{2} \text{ für Vollkreisfläche}$$

d Werkstückdurchmesser

$$l_w = \frac{d_a - d_i}{2} \text{ für Kreisringfläche}$$

d_a Außendurchmesser
 d_i Innendurchmesser

Zerspantechnik

Drehen und Grundbegriffe der Zerspantechnik

- l_a Anlaufweg, Richtwert: 1 ... 2 mm
- l_u Überlaufweg, Richtwert: 1 ... 2 mm
- l_s Schneidzugabe (werkzeugabhängig)

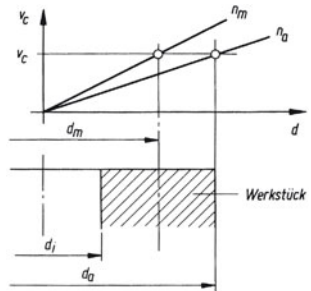
$$l_s = \frac{a_p}{\tan \kappa_r} \quad \begin{array}{l} a_p \text{ Schnitttiefe} \\ \kappa_r \text{ Einstellwinkel} \end{array}$$

Die Werkstückdrehzahl wird bei Stufengetrieben nach Berechnung der erforderlichen Drehzahl n_{erf} aus der Drehzahlreihe der Maschine gewählt:

$$n_{a\text{erf}} = \frac{v_c}{d_a \pi} \quad \text{bei kleinerem Drehdurchmesserbereich}$$

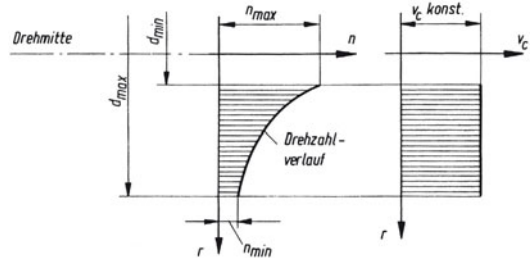
$$n_{m\text{erf}} = \frac{v_c}{d_m \pi} \quad \text{bei größerem Drehdurchmesserbereich}$$

- v_c Schnittgeschwindigkeit
- d_a Außendurchmesser des Werkstücks
- d_m mittlerer Werkstückdurchmesser
- $d_m = \frac{d_a + d_i}{2}$ für Kreisringfläche
- $d_m = \frac{d}{2}$ für Vollkreisfläche



Hauptnutzungszeit t_h beim Plandrehen, $v_c = \text{konstant}$

Da der stufenlose Antrieb immer nur einen durch endliche Drehzahlwerte begrenzten Abtriebsdrehzahlbereich ($n_{\text{min}} \dots n_{\text{max}}$) erzeugen kann, ist der mit $v_c = \text{konstant}$ überarbeitbare Durchmesserbereich ebenfalls begrenzt. Eine Plandrehbearbeitung mit $v_c = \text{konstant}$ ist daher nur möglich, wenn die Durchmesser der Bearbeitungsfläche (Drehdurchmesser D_a und D_i) innerhalb des Grenzdurchmesserbereichs $d_{\text{min}} \dots d_{\text{max}}$ liegen.



Grenzdurchmesser:

$$d_{\text{min}} = \frac{v_c}{\pi n_{\text{max}}} \quad d_{\text{max}} = \frac{v_c}{\pi n_{\text{min}}}$$

- d_{min} kleinstmöglicher Drehdurchmesser für $v_c = \text{konstant}$
- d_{max} größtmöglicher Drehdurchmesser für $v_c = \text{konstant}$ (größte Umlaufdurchmesser der Maschine beachten)
- n_{max} größte Abtriebsdrehzahl des Antriebs
- n_{min} kleinste Abtriebsdrehzahl des Antriebs

Plandrehen einer Kreisringfläche

(bei $D_i \geq d_{\min}$ und $D_a \leq d_{\max}$)

Zerspaltung von D_a bis D_i mit $v_c = \text{konstant}$.

$$t_h = \frac{(D_a^2 - D_i^2)\pi}{4f v_c}$$

D_a größter Drehdurchmesser:

$$D_a = d_a + 2(l_a + l_s)$$

d_a Außendurchmesser des Werkstücks

l_a Anlaufweg (Richtwert: 1 ... 2 mm)

l_s Schneidzugabe (werkzeugabhängig)

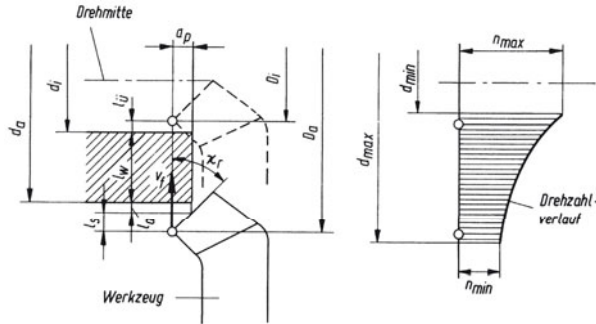
$$l_s = \frac{a_p}{\tan \kappa_r} \quad a_p \text{ Schnitttiefe} \quad \kappa_r \text{ Einstellwinkel}$$

D_i kleinster Drehdurchmesser:

$$D_i = d_i - 2l_u$$

d_i Innendurchmesser des Werkstücks

l_u Überlaufweg (Richtwert: 1 ... 2 mm)



Plandrehen einer Kreisringfläche

(bei $D_i < d_{\min}$ und $D_a \leq d_{\max}$)

Zerspaltung von D_a bis d_{\min}

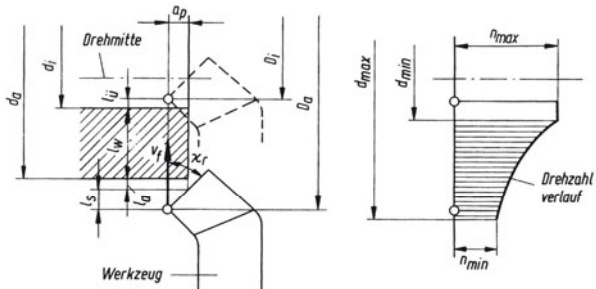
mit $v_c = \text{konstant}$ und

von d_{\min} bis D_i mit

$n_{\max} = \text{konstant}$.

$$t_h = \frac{(D_a^2 + d_{\min}^2 - 2d_{\min}D_i)\pi}{4f v_c}$$

d_{\min} Grenzdurchmesser, kleinstmöglicher Drehdurchmesser für $v_c = \text{konstant}$



Plandrehen einer Vollkreisfläche

(bei $D_i = 0 (< d_{\min})$ und

$D_a \leq d_{\max}$)

Zerspaltung von D_a

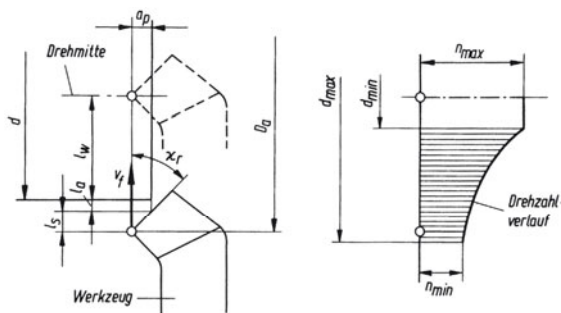
bis d_{\min} mit $v_c = \text{konstant}$

und von d_{\min} bis $D_i = 0$ mit

$n_{\max} = \text{konstant}$.

$$t_h = \frac{(D_a^2 + d_{\min}^2)\pi}{4f v_c}$$

d_{\min} Grenzdurchmesser, kleinstmöglicher Drehdurchmesser für $v_c = \text{konstant}$



Zerspantechnik

Drehen und Grundbegriffe der Zerspantechnik

Hauptnutzungszeit t_h beim Abstechdrehen

Rohteilstange als Vollmaterial

$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_s}{f n}$$

l_w Drehlänge am Werkstück

$$l_w = \frac{d}{2} \quad d \text{ Stangendurchmesser}$$

l_a Anlaufweg (Richtwert: 1 mm)

l_s Schneidenzugabe:

$$l_s = 0,2 \cdot b \text{ für } \alpha = 11^\circ$$

b Einstechbreite:

$$b = 0,05 \cdot d + 1,7$$

(b und d in mm)

Abstimmung auf marktgängige Werkzeugbreiten

Rohteilstange als Rohrmaterial

$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_u + l_s}{f n}$$

l_w Drehlänge am Werkstück

$$l_w = \frac{d_a - d_i}{2}$$

d_a Außendurchmesser

d_i Innendurchmesser

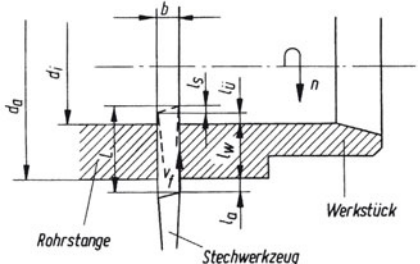
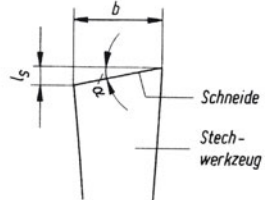
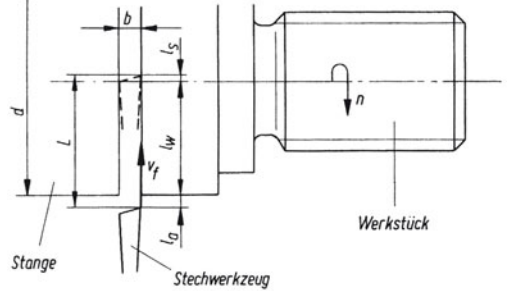
l_a Anlaufweg (Richtwert: 1 mm)

l_u Überlaufweg (Richtwert: 1 mm)

l_s Schneidenzugabe

Berechnung von b :

$d = d_a$ einsetzen



Richtwerte für Vorschub f des Stechwerkzeugs

Werkstoff	Schneidstoff	f in $\frac{\text{mm}}{\text{U}}$
Stahl unlegiert bis 200 HB	P 40	0,05 ... 0,25
Stahl unlegiert bis 250 HB	P 40	0,05 ... 0,2
Stahl legiert bis 325 HB	P 40	0,05 ... 0,2
Stahl legiert über 325 HB	P 40	0,05 ... 0,16
Gusseisen bis 300 HB	K 10	0,1 ... 0,3
Messing unbegrenzt	K 10	0,05 ... 0,4
Bronze unbegrenzt	K 10	0,05 ... 0,25

Richtwerte für Schnittgeschwindigkeit v_c beim Abstechdrehen

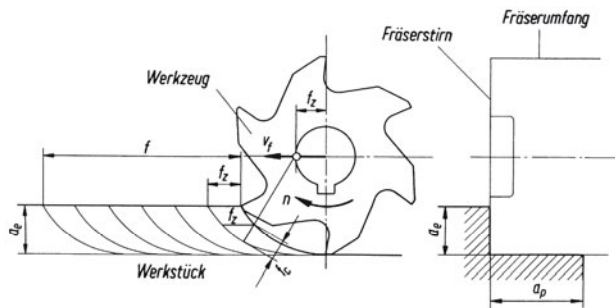
Werkstoff		Schneidstoff	v_c in $\frac{m}{min}$
Stahl unlegiert	bis 200 HB	P 40	75 ... 110
	bis 250 HB	P 40	70 ... 90
Stahl legiert	bis 250 HB	P 40	70 ... 90
	bis 325 HB	P 40	55 ... 80
Gusseisen	über 325 HB	P 40	45 ... 60
	bis 200 HB	K 10	70 ... 95
	bis 300 HB	K 10	45 ... 65
Messing	unbegrenzt	K 10	bis 250
Bronze	unbegrenzt	K 10	bis 130

11.2 Fräsen

11.2.1 Schnittgrößen und Spanungsgrößen

Schnittgrößen und Spanungsgrößen beim Fräsen (Umfangsfräsen im Gegenlaufverfahren)

- a_p Schnitttiefe oder Schnittbreite
- a_e Arbeitseingriff
- f Vorschub
- f_z Vorschub pro Schneide
- f_c Schnittvorschub



Schnitttiefe oder Schnittbreite a_p

Tiefe (Stirnfräsen) oder Breite (Umfangsfräsen) des Eingriffs der Hauptschneide am Fräserumfang, gemessen rechtwinklig zur Arbeitsebene

Arbeitseingriff a_e

Breite (Stirnfräsen) oder Tiefe (Umfangsfräsen) des Eingriffs der Hauptschneide an der Fräserstirn, gemessen in der Arbeitsebene und rechtwinklig zur Vorschubrichtung.

Vorschub f

Weg, den das Werkstück während einer Umdrehung (U) in Vorschubrichtung zurücklegt:

$$f = z f_z \quad \begin{array}{l} z \text{ Anzahl der Werkzeugschneiden am Fräswerkzeug} \\ f_z \text{ Vorschub je Schneide} \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} f & f_z & z \\ \hline \frac{mm}{U} & mm & 1 \end{array}$$

Richtwerte für z für Fräswerkzeuge aus Schnellarbeitsstahl

Werkzeug	Fräserdurchmesser in mm								
	50	60	75	90	110	130	150	200	300
Walzenfräser	6	6	6	8	8	10	10		
Walzenstirnfräser	8	8	10	12	12	14	16		
Scheibenfräser	8	8	10	12	12	14	16	18	
Messerkopf					8	10	10	12	16

Zerspantechnik
Fräsen

Vorschub f_z je Schneide

Vorschub je Fräserzahn (Zahnvorschub)

$$f_z = \frac{f}{z}$$

f Vorschub des Werkzeugs in mm/U
 z Anzahl der Werkzeugschneiden

Richtwerte für Zahnvorschub f_z

Werkzeug		Werkstoff		
		Stahl	Gusseisen	Al-Legierung ausgehärtet
Walzenfräser, Walzenstirnfräser (Schnellarbeitsstahl)	f_z	0,10 ... 0,25	0,10 ... 0,25	0,05 ... 0,08
	v_c	10 ... 25	10 ... 22	150 ... 350
Formfräser, hinterdreht (Schnellarbeitsstahl)	f_z	0,03 ... 0,04	0,02 ... 0,01	0,02
	v_c	15 ... 24	10 ... 20	150 ... 250
Messerkopf (Schnellarbeitsstahl)	f_z	0,3	0,10 ... 0,30	0,1
	v_c	15 ... 30	12 ... 25	200 ... 300
Messerkopf (Hartmetall)	f_z	0,2	0,30 ... 0,40	0,06
	v_c	100 ... 200	30 ... 100	300 ... 400

f_z Vorschub je Schneide (Zahnvorschub) in mm/Schneidzahl
 v_c Schnittgeschwindigkeit in m/min für Gegenlaufverfahren
Für das Gleichlaufverfahren können die angegebenen Richtwerte um 75 % erhöht werden.

Größere Richtwerte für v_c gelten jeweils für Schlichtzerspanung.
Kleinere Richtwerte für v_c gelten jeweils für Schruppzerspanung.

Richtwerte gelten für Arbeitseingriffe a_e (Umfangsfräsen) oder Schnitttiefen a_p (Stirnfräsen):

- 3 mm bei Walzenfräsern
- 5 mm bei Walzenstirnfräsern
- bis 8 mm bei Messerköpfen

Schnittvorschub f_c

Abstand zweier unmittelbar nacheinander entstehender Schnittflächen, gemessen in der Arbeitsebene rechtwinklig zur Schnittrichtung:

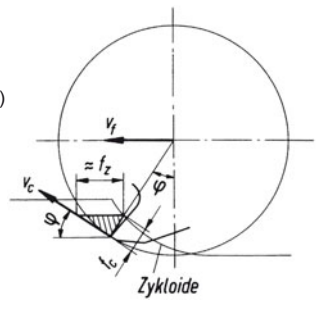
$$f_c \approx f_z \sin \varphi$$

f_z Vorschub je Schneide
 φ Vorschubrichtungswinkel (veränderlich)

genauer:

$$f_c = f_z \sin \varphi + \frac{f_z^2 \cos \varphi}{d}$$

d Fräserdurchmesser



Spannungsbreite b

Umfangsfräsen: $b = a_p$

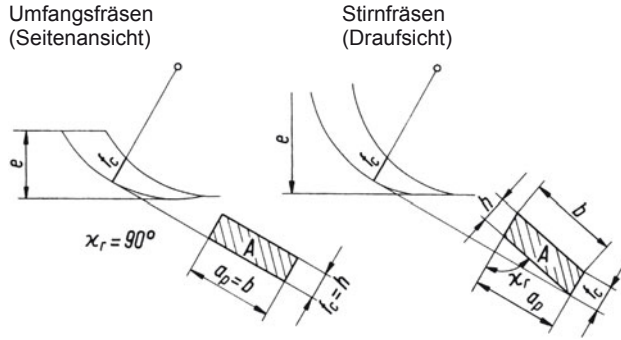
Stirnfräsen: $b = \frac{a_p}{\sin \kappa_r}$

Spannungsquerschnitt A

$$A = bh = f_c a_p$$

Spanungsdicke h
(nicht gleich bleibend)

Umfangsfräsen: $h = f_c$
Stirnfräsen: $h = f_c \sin \kappa_f$
Mittenspannungsdicke siehe 11.2.4

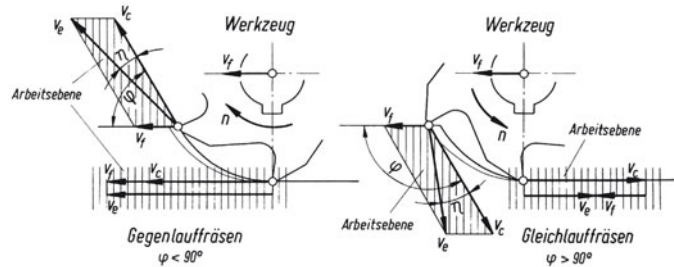


Spanungsverhältnis ϵ_s

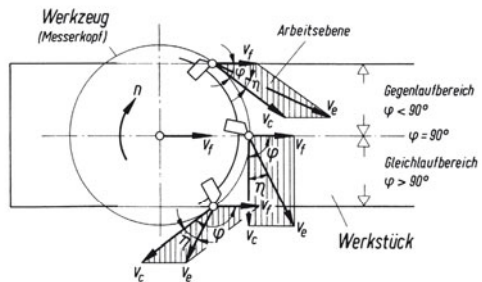
$$\epsilon_s = \frac{b}{h} = \frac{a_p}{f_c \sin^2 \kappa_f}$$

11.2.2 Geschwindigkeiten

Umfangsfräsen
(Seitenansicht)



Stirnfräsen (Draufsicht)



- v_c Schnittgeschwindigkeit
- v_f Vorschubgeschwindigkeit
- v_e Wirkgeschwindigkeit
- η Wirkrichtungswinkel
- φ Vorschubrchtungswinkel

Schnittgeschwindigkeit v_c
(Richtwerte in 11.2.1)

$$v_c = \frac{d \pi n}{1000}$$

v_c	d	n
$\frac{m}{min}$	mm	min^{-1}

Zerspantechnik

Fräsen

erforderliche Werkzeugdrehzahl n_{erf}

$$n_{\text{erf}} = \frac{1000 v_c}{d \pi}$$

n_{erf}	v_c	d
min^{-1}	$\frac{\text{m}}{\text{min}}$	mm

v_c empfohlene Schnittgeschwindigkeit
 d Werkzeugdurchmesser (Fräserdurchmesser)

Vorschubgeschwindigkeit v_f

Momentangeschwindigkeit des Werkstücks in Vorschubrichtung:

$$v_f = f n = f_z z n$$

v_f	f	n	f_z	z
$\frac{\text{mm}}{\text{min}}$	$\frac{\text{mm}}{\text{U}}$	min^{-1}	mm	1

f Vorschub in mm/U
 f_z Vorschub je Schneide (Zahnvorschub)

z Anzahl der Werkzeugschneiden
 n Werkzeugdrehzahl (Fräserdrehzahl)

Wirkgeschwindigkeit v_e

Momentangeschwindigkeit des betrachteten Schneidenpunkts in Wirkrichtung.

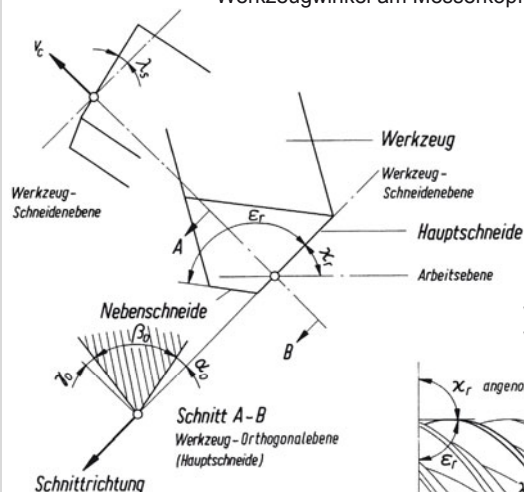
Die Wirkgeschwindigkeit ist die Resultierende aus Schnittgeschwindigkeit v_c und Vorschubgeschwindigkeit v_f :

$$v_e = \frac{v_c \sin \varphi}{\sin(\varphi - \eta)} = \frac{v_f + v_c \cos \varphi}{\cos(\varphi - \eta)}$$

$$v_f \leq v_c \Rightarrow v_e \approx v_c$$

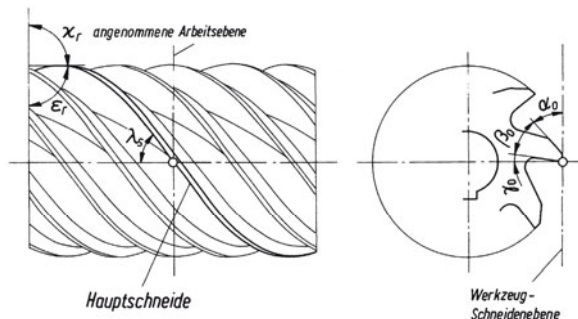
11.2.3 Werkzeugwinkel

Werkzeugwinkel am Messerkopf



- α_0 Orthogonalfreiwinkel
- β_0 Orthogonalkeilwinkel
- γ_0 Orthogonalspanwinkel
- $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 90^\circ$
- κ_r Einstellwinkel
- ϵ_r Eckenwinkel
- λ_s Neigungswinkel

Werkzeugwinkel am drallverzahnten zylindrischen Walzenfräser



Orthogonalfreiwinkel α_o
(siehe auch 11.1.3)

Richtwertel:

Walzenfräser $\alpha_o = 5^\circ \dots 8^\circ$
(Schnellarbeitsstahl)

Messerkopf $\alpha_o = 3^\circ \dots 8^\circ$
(Hartmetall)

Richtwerte gelten für Gegenlaufverfahren
(für Gleichlaufverfahren gelten etwa doppelt so große Richtwerte).

Orthogonalkeilwinkel β_o
(siehe 11.1.3)

Orthogonalspanwinkel γ_o
(siehe auch 11.1.3)

Richtwerte:

Walzenfräser $\gamma_o = 10^\circ \dots 15^\circ$
(Schnellarbeitsstahl)

Formfräser, hinterdreht $\gamma_o = 0^\circ \dots 5^\circ$
(Schnellarbeitsstahl)

Messerkopf $\gamma_o = 6^\circ \dots 15^\circ$
(Hartmetall)

Richtwerte gelten für Gegenlaufverfahren
(für Gleichlaufverfahren gelten etwa doppelt so große Richtwerte).

Einstellwinkel κ_r
(siehe auch 11.1.3)

Bei zylindrischen Walzenfräsern ist $\kappa_r = 90^\circ$
Richtwert für normale Messerköpfe $\kappa_r = 60^\circ$
Weitwinkelfräsen bei günstigstem Standverhalten des
Messerkopfs nach M. Kronenberg mit $\kappa_r \leq 20^\circ$

Eckenwinkel ε_r
(siehe auch 11.1.3)

Bei zylindrischen Walzenfräsern ist $\varepsilon_r = 90^\circ$

Neigungswinkel λ_s
(siehe auch 11.1.3)

Richtwerte für Werkzeuge aus Schnellarbeitsstahl:

drallverzahnte Walzenfräser $\lambda_s = 35^\circ \dots 40^\circ$

geradverzahnte Walzenfräser $\lambda_s = 0^\circ$

Scheibenfräser $\lambda_s = 45^\circ$

Messerkopf $\lambda_s = 7^\circ \dots 9^\circ$

Der Neigungswinkel ist bei drallverzahnten Fräsern der Drallwinkel.

λ_s negativ: Fräser hat Linksdrall

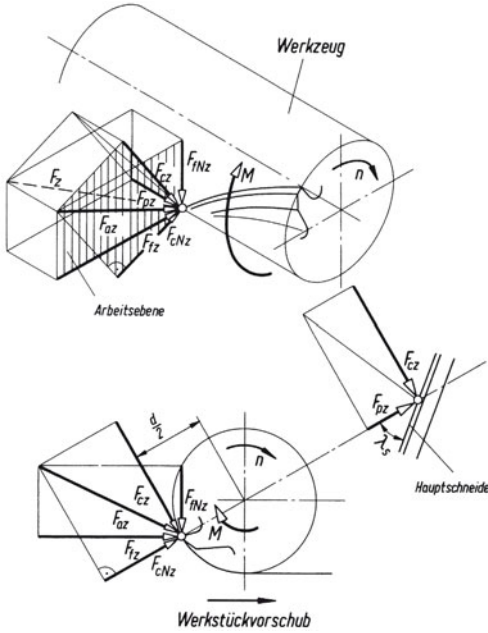
λ_s positiv: Fräser hat Rechtsdrall

Zerspantechnik

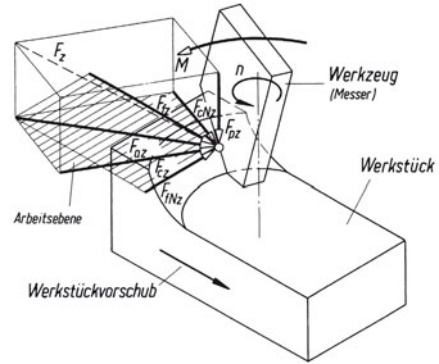
Fräsen

11.2.4 Zerspankräfte

Zerspankräfte beim Umfangsfräsen mit drallverzahntem Walzenfräser im Gegenlaufverfahren (Kräfte bezogen auf das Werkzeug)



Zerspankräfte beim Stirnfräsen mit Messerkopf (Kräfte bezogen auf das Werkzeug)



- F_{cz} Schnittkraft an der Einzelschneide (leistungsführend)
- F_{fz} Vorschubkraft an der Einzelschneide (leistungsführend)
- F_{az} Aktivkraft an der Einzelschneide
- F_{cNz} Schnitt-Normalkraft an der Einzelschneide
- F_{fNz} Vorschub-Normalkraft an der Einzelschneide
- F_{pz} Passivkraft an der Einzelschneide
- F_z Zerspankraft an der Einzelschneide
- M Drehmoment der Schnittkräfte an allen gleichzeitig im Schnitt stehenden Werkzeugschneiden

Schnittkraft F_{czm} beim Umfangsfräsen (Mittelwert)

$$F_{czm} = a_p h_m k_c$$

F_{czm}	a_p, h_m	k_c
N	mm	$\frac{N}{mm^2}$

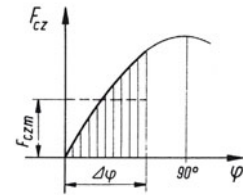
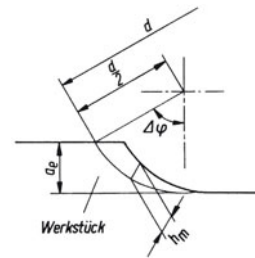
a_p Schnittbreite
 h_m Mittenspannungsdicke:

$$h_m = \frac{360^\circ}{\pi \Delta\varphi} \cdot \frac{a_e}{d} f_z$$

$\Delta\varphi$ Eingriffswinkel:

$$\cos \Delta\varphi = 1 - \frac{2a_e}{d}$$

- a_e Arbeitseingriff
- d Fräserdurchmesser
- f_z Vorschub je Schneide (Zahnvorschub)
- k_c spezifische Schnittkraft



theoretischer Schnittkraftverlauf

spezifische Schnittkraft k_c

$$k_c = \frac{k_{c1.1}}{h_m^z} K_v K_y K_{ws} K_{wv} K_{ks} K_f$$

$k_{c1.1}$ Hauptwert der spezifischen Schnittkraft (1.5 Nr. 4)
 z Spannungsdickenexponent (11.1.4)
 K Korrekturfaktoren (11.1.4)

$k_c, k_{c1.1}$	h	z	K
$\frac{N}{\text{mm}^2}$	mm	1	1

Schnittkraft F_{czm} beim Stirnfräsen (Mittelwert)

$$F_{czm} = a_p h_m k_c$$

a_p Schnitttiefe
 h_m Mittenspannungsdicke:

$$h_m = \frac{360^\circ}{\pi \Delta \varphi} \cdot \frac{a_e}{d} f_z \sin \kappa_r$$

$\Delta \varphi$ Eingriffswinkel für außermittiges Stirnfräsen:

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

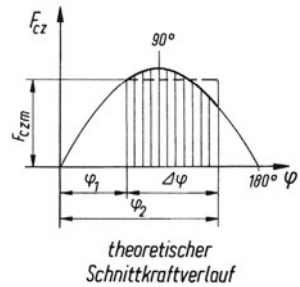
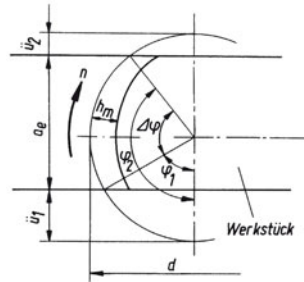
$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{2 \dot{u}_1}{d} \quad \text{wenn } \varphi > 90^\circ, \quad \cos \varphi \text{ negativ ansetzen}$$

$$\cos \varphi_2 = 1 - \frac{2 \dot{u}_2}{d}$$

für mittiges Stirnfräsen:

$$\sin \frac{\Delta \varphi}{2} = \frac{a_e}{d}$$

\dot{u} Fräserüberstand
 a_e Arbeitseingriff
 d Fräserdurchmesser
 f_z Vorschub je Schneide (Zahnvorschub)
 κ_r Einstellwinkel
 k_c spezifische Schnittkraft



Vorschubkraft F_{fz}

Komponente der Aktivkraft F_{az} in Vorschubrichtung

Aktivkraft F_{az}

Komponente der Zerspankraft F_z in der Arbeitsebene:

$$F_{az} = \sqrt{F_{fz}^2 + F_{fNz}^2}$$

Vorschub-Normalkraft F_{fNz}

Komponente der Aktivkraft F_{az} in der Arbeitsebene, rechtwinklig zur Vorschubrichtung:

$$F_{fNz} = \sqrt{F_{az}^2 - F_{fz}^2}$$

Passivkraft F_{pz}

Komponente der Zerspankraft F_z rechtwinklig zur Arbeitsebene:

$$F_{pz} = \sqrt{F_z^2 - F_{az}^2}$$

Zerspankraft F_z

Gesamtkraft, die während der Zerspaltung auf die Einzelschneide einwirkt.

Zerspantechnik Fräsen

11.2.5 Leistungsbedarf

Schnittleistung P_c

$$P_c = \frac{F_{czm} z_e v_c}{6 \cdot 10^4}$$

P_c	F_{czm}	z_e	v_c
kW	N	1	$\frac{m}{min}$

F_{czm} Schnittkraft (Mittelwert) nach 11.2.4
 z_e Anzahl der gleichzeitig im Schnitt stehenden Werkzeugschneiden:

$$z_e = \frac{\Delta \varphi z}{360^\circ}$$

$\Delta \varphi$ Eingriffswinkel; z Anzahl der Werkzeugschneiden
 v_c Schnittgeschwindigkeit nach 11.2.2

Motorleistung P_m

$$P_m = \frac{P_c}{\eta_g} \quad \eta_g \text{ Getriebewirkungsgrad}$$

$\eta_g = 0,6 \dots 0,8$

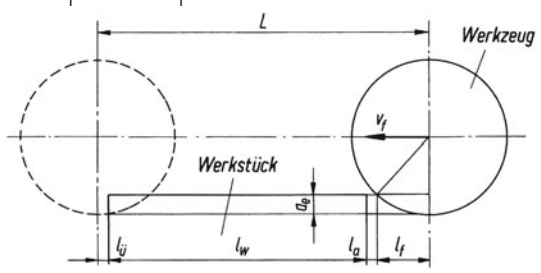
11.2.6 Hauptnutzungszeit

**Hauptnutzungszeit t_h beim
Umfangsfräsen**

Umfangsfräsen (Schruppen und Schichten)
Umfangsstirnfräsen (Schruppen)

$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_{\bar{u}} + l_f}{v_f}$$

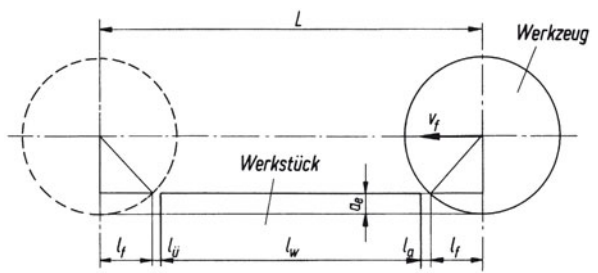
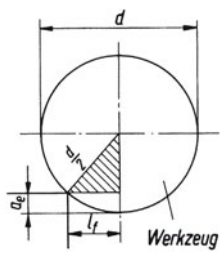
- l_w Werkstücklänge in Fräsrichtung
 - l_a Anlaufweg (Richtwert: 1 ... 2 mm)
 - $l_{\bar{u}}$ Überlaufweg (Richtwert: 1 ... 2 mm)
 - v_f Vorschubgeschwindigkeit
 - l_f Fräserzugabe:
- $$l_f = \sqrt{a_e (d - a_e)}$$
- a_e Arbeitseingriff
 - d Fräserdurchmesser (Richtwert: $d > 4 a_e$)



Darstellung der Werkzeugbewegung relativ zum Werkstück

Umfangsstirnfräsen (Schichten)

$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_{\bar{u}} + 2l_f}{v_f}$$



Darstellung der Werkzeugbewegung relativ zum Werkstück

Hauptnutzungszeit t_h
beim außermittigen
Stirnfräsen $x \neq 0$

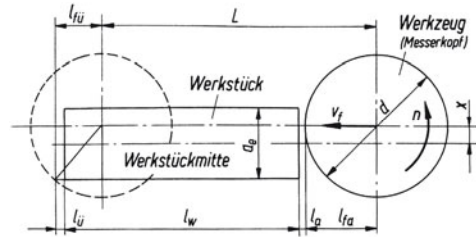
Stirnfräsen (Schruppen)

- l_w Werkstücklänge in Fräsrichtung
- l_a Anlaufweg (Richtwert: 1 ... 2 mm)
- $l_{\bar{u}}$ Überlaufweg (Richtwert: 1 ... 2 mm)
- v_f Vorschubgeschwindigkeit

für $0 < x \leq \frac{a_e}{2}$ und $\frac{d}{2} > a_e$ gilt:

$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_{\bar{u}} + l_{fa} - l_{f\bar{u}}}{v_f}$$

Darstellung der
Werkzeug-
bewegung relativ
zum Werkstück

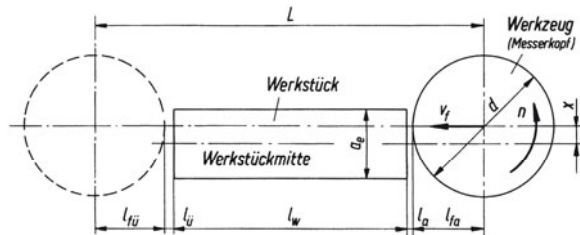


Stirnfräsen (Schichten)

für $0 < x \leq \frac{a_e}{2}$ und $\frac{d}{2} > a_e$ gilt:

$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_{\bar{u}} + l_{fa} + l_{f\bar{u}}}{v_f}$$

Darstellung der
Werkzeugbewegung
relativ zum Werkstück



l_{fa} Fräserzugabe (Anlaufseite):

$$l_{fa} = \frac{d}{2}$$

d Fräserdurchmesser

$l_{f\bar{u}}$ Fräserzugabe (Überlaufseite):

$$l_{f\bar{u}} = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(\frac{a_e}{2} + x\right)^2} \quad \text{für Schruppen}$$

$$l_{f\bar{u}} = \frac{d}{2} \quad \text{für Schichten}$$

d Fräserdurchmesser

a_e Arbeitseingriff

x Mitterversatz des Fräasers

Zerspantechnik

Fräsen

Hauptnutzungszeit t_h
beim mittigen Stirnfräsen
 $x = 0$

- l_w Werkstücklänge in Fräsrichtung
- l_a Anlaufweg (Richtwert: 1 ... 2 mm)
- $l_{\bar{u}}$ Überlaufweg (Richtwert: 1 ... 2 mm)
- l_{fa} Fräserzugabe (Anlaufseite):

$$l_{fa} = \frac{d}{2}$$
- $l_{f\bar{u}}$ Fräserzugabe (Überlaufseite):

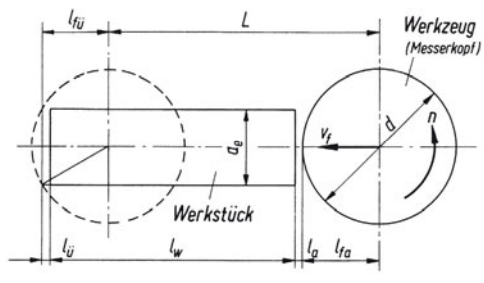
$$l_{f\bar{u}} = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - a_e^2}$$
 für Schruppen

$$l_{f\bar{u}} = \frac{d}{2}$$
 für Schlichten
- d Fräserdurchmesser
- a_e Arbeitseingriff
- v_f Vorschubgeschwindigkeit

Stirnfräsen (Schruppen)

für $d > a_e$ gilt:

$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_{\bar{u}} + l_{fa} - l_{f\bar{u}}}{v_f}$$

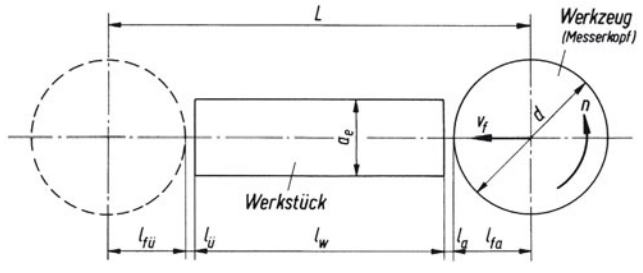


Darstellung der Werkzeugbewegung relativ zum Werkstück

Stirnfräsen (Schlichten)

für $d > a_e$ gilt:

$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_{\bar{u}} + l_{fa} + l_{f\bar{u}}}{v_f}$$



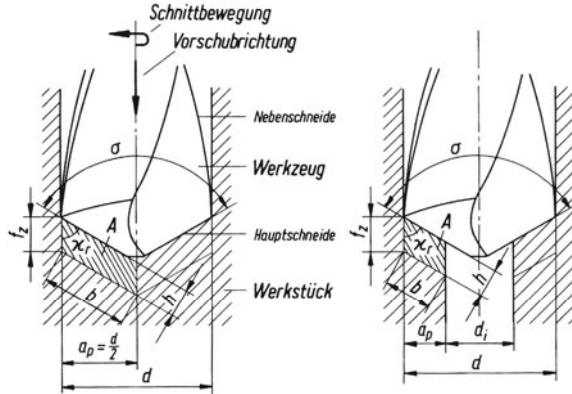
Darstellung der Werkzeugbewegung relativ zum Werkstück

11.3 Bohren

11.3.1 Schnittgrößen und Spanungsgrößen

Schnittgrößen und Spanungsgrößen beim Bohren

- d Bohrerdurchmesser (Nenndurchmesser)
- d_i Durchmesser der Vorbohrung (beim Aufbohren)
- f_z Vorschub je Schneide
- z Anzahl der Schneiden (Spiralbohrer $z = 2$)
- a_p Schnitttiefe
- b Spanungsbreite
- h Spanungsdicke
- A Spanungsquerschnitt
- κ_r Einstellwinkel
- σ Spitzenwinkel



Schnitttiefe a_p (Schnittbreite)

Tiefe oder Breite des Eingriffs rechtwinklig zur Arbeitsebene

$$a_p = \frac{d}{2} \text{ beim Bohren ins Volle}$$

$$a_p = \frac{d - d_i}{2} \text{ beim Aufbohren}$$

Vorschub f

Weg, den das Werkzeug während einer Umdrehung (U) in Vorschubrichtung zurücklegt.

Richtwerte nach 11.3.3

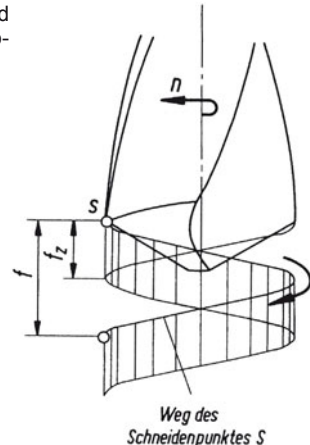
Vorschub f_z je Schneide

$$f_z = \frac{f}{z}$$

f Vorschub
 z Anzahl der Werkzeugschneiden

Für zweischneidige Spiralbohrer ist

$$f_z = \frac{f}{2}$$



Zerspantechnik

Bohren

Spannungsbreite b

$$b = \frac{d}{2 \sin \kappa_r}$$

Spannungsdicke h

$$h = \frac{f \sin \kappa_r}{2} = f_z \sin \kappa_r \quad \left. \begin{array}{l} \text{Bohren ins Volle} \\ \text{Bohren ins Volle} \end{array} \right\}$$

Spanungsquerschnitt A

$$A = \frac{df}{4} = \frac{df_z}{2}$$

Spannungsbreite b

$$b = \frac{d - d_i}{2 \sin \kappa_r}$$

Spannungsdicke h

$$h = \frac{f \sin \kappa_r}{2} f_z \sin \kappa_r \quad \left. \begin{array}{l} \text{Aufbohren} \\ \text{Aufbohren} \end{array} \right\}$$

Spanungsquerschnitt A

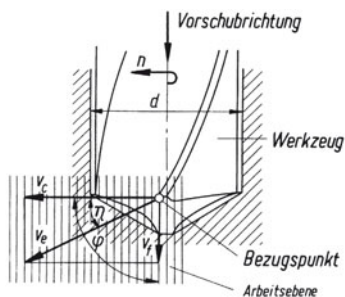
$$A = \frac{d - d_i}{4} f$$

$$A = \frac{d - d_i}{2} f_z$$

11.3.2 Geschwindigkeiten

Geschwindigkeiten beim Bohren relativ zum Werkstück

- v_c Schnittgeschwindigkeit
- v_f Vorschubgeschwindigkeit
- v_e Wirkgeschwindigkeit
- η Wirkrichtungswinkel
- φ Vorschubrichtungswinkel (beim Bohren 90°)



Schnittgeschwindigkeit v_c (Richtwerte in 11.3.3)

$$v_c = \frac{d \pi n}{1000}$$

v_c	d	n
$\frac{m}{min}$	mm	min^{-1}

d Bohrerdurchmesser
 n Werkzeugdrehzahl

Umrechnung der Schnittgeschwindigkeit v_{cL2000} (Bohrarbeitskennziffer)

Schnittgeschwindigkeitsempfehlungen beziehen sich beim Bohren meist auf eine Standlänge (L , gesamter Standweg des Bohrers in Vorschubrichtung), die unter den in der Richtwerttabelle genannten Spanungsbedingungen erreicht wird. Dabei verwendet man als Bezugsgröße häufig eine Gesamtbortiefe von 2000 mm. Die auf diese Standlänge bezogene Schnittgeschwindigkeit ist die Bohrarbeitskennziffer v_{cL2000} .

Umrechnung der Richtwerte (v_{cL2000}) auf abweichende Standlängen bei sonst unveränderten Spannungsbedingungen:

$$v_c = v_{cL2000} \left(\frac{2000}{L} \right)^z$$

v_{cL2000}	Schnittgeschwindigkeit für $L = 2000$ mm (Bohrarbeitskennziffer)	Richtwerte für Spiralbohrer aus Schnellarbeitsstahl nach M. Kronenberg	
L	vorgegebene Standlänge in mm	Werkstoff	z
z	Standlängenexponent	E 295	0,114
		E 360	0,06

Die Verknüpfung von Schnittgeschwindigkeit und vorgegebenem Standweg ist beim Bohren verfahrensbedingt unsicher. Genauere Zuordnung von Standwegen und Standgeschwindigkeiten erfordern eine spezielle Untersuchung des vorliegenden Einzelfalls.

Standzeit T

Berechnung der Standzeit T aus der Standlänge L

$$T = \frac{Ld\pi}{fv_c}$$

- d Bohrerdurchmesser
- f Vorschub
- v_c Schnittgeschwindigkeit (Standgeschwindigkeit für Standlänge L)

erforderliche Werkzeugdrehzahl n_{eff}

$$n_{\text{eff}} = \frac{1000 v_c}{d\pi}$$

n_{eff}	v_c	d
min^{-1}	$\frac{\text{m}}{\text{min}}$	mm

- v_c empfohlene Schnittgeschwindigkeit nach 4.3 oder umgerechnet
- d Bohrerdurchmesser

Bei der Festlegung der Werkzeugdrehzahl sind die einstellbaren Maschinendrehzahlen (Drehzahlen an der Bohrspindel) zu beachten. Bohrmaschinen mit gestuftem Hauptgetriebe erzeugen Normdrehzahlen nach DIN 804 (11.1.1).

Vorschubgeschwindigkeit v_f

$$v_f = f n$$

$$v_f = z f_z n$$

v_f	f	f_z	z	n
$\frac{\text{mm}}{\text{min}}$	$\frac{\text{mm}}{\text{U}}$	mm	1	min^{-1}

- f Vorschub
- f_z Vorschub je Schneide
- z Anzahl der Werkzeugschneiden
- n Werkzeugdrehzahl

Wirkgeschwindigkeit v_e

Momentangeschwindigkeit des betrachteten äußeren Schneidenschnitts (Bezugspunkt) der Hauptschneide in Wirkrichtung:

$$v_e = \sqrt{v_c^2 + v_f^2} \text{ bei } \varphi = 90^\circ$$

$$v_e = \frac{v_c}{\cos \eta} = \frac{v_f}{\sin \eta}$$

$$v_f \leq v_c \Rightarrow v_e \approx v_c$$

Zerspantechnik

Bohren

11.3.3 Richtwerte für die Schnittgeschwindigkeit v_c und den Vorschub f beim Bohren

Werkstoff	Zugfestigkeit R_m in N/mm ²	Schneid- werkzeug	Schnitt- geschwindig- keit v_c in m/min	Vorschub f in mm/U bei Bohrerdurchmesser			
				bis 4	> 4...10	> 10...25	> 25...63
S 235 JR, C22 S 275 JQ	bis 500	S S P 30	35 ... 30 80... 75	0,18 0,1	0,28 0,12	0,36 0,16	0,45 0,2
E 295, C 35	500 ... 600	S S P 30	30 ... 25 75 ... 70	0,16 0,08	0,25 0,1	0,32 0,12	0,40 0,16
E335, C45	600 ... 700	S S P 30	25 ... 20 70 ... 65	0,12 0,06	0,2 0,08	0,25 0,1	0,32 0,12
E 360, C 60	700 ... 850	S S P 30	20 ... 15 65 ... 60	0,11 0,05	0,18 0,06	0,22 0,08	0,28 0,01
Mn-, Cr Ni-Cr Mo- und andere legierte Stähle	700 ... 850	S S P 30	18 ... 14 40 ... 30	0,1 0,025	0,16 0,03	0,02 0,04	0,25 0,05
	850 ... 1 000	S S P 30	14 ... 12 30 ... 25	0,09 0,02	0,14 0,025	0,18 0,03	0,22 0,04
	1 000 ... 1 400	S S P 30	12 ... 8 25 ... 20	0,06 0,016	0,1 0,02	0,16 0,025	0,2 0,03
EN-GJL-150	150 ... 250	S S K 20	35 ... 25 90 ... 70	0,16 0,05	0,25 0,08	0,4 0,12	0,5 0,16
EN-GJL-250	250 ... 350	S S K 10	25 ... 20 40 ... 30	0,12 0,04	0,2 0,06	0,3 0,1	0,4 0,12
Temperguss		S S K 10	25 ... 18 60 ... 40	0,1 0,03	0,16 0,05	0,25 0,08	0,4 0,12
Cu Sn Zn-Leg.		S S	75 ... 50	0,12	0,18	0,25	0,36
Cu Sn-Guss-Leg.		K 20	85 ... 60	0,06	0,08	0,1	0,12
Cu Zn-Guss-Leg.		S S	60 ... 40	0,1	0,14	0,2	0,28
		K20	100 ... 75	0,06	0,08	0,1	0,12
Al-Guss-Leg.		S S	200 ... 150	0,16	0,25	0,3	0,4
		K20	300 ... 250	0,06	0,08	0,1	0,12

SS Schnellarbeitsstahl

P 30, K 10, K 20 Hartmetalle

Die Richtwerte sind von der Firma Gebr. Boehringer in Göppingen aus „Betriebstechnisches Praktikum“ von Thiele-Staelin abgeleitet worden.

11.3.4 Richtwerte für spezifische Schnittkraft k_c beim Bohren

Die Richtwerte sind von der Firma Gebr. Boehrer in Göppingen aus Versuchswerten von Prof. Kienzle, AWF 158 und allgemeinen Hinweisen aus dem Schrifttum abgeleitet worden.

Werkstoff	Zugfestig- keit R_{m0} in N/mm ²	spez. Schnittkraft k_c in N/mm ² bei Vorschub f in mm/U und Einstellwinkel κ_r																											
		0,063			0,1			0,16			0,25			0,4			0,63			1									
		30°	45°	60°	90°	30°	45°	60°	90°	30°	45°	60°	90°	30°	45°	60°	90°	30°	45°	60°	90°								
S 275 JR	bis 500	3200	3010	2880	2820	2960	2710	2550	2460	2400	2500	2360	2240	2320	2200	2100	2060	2150	2030	1960	1920	2000	1830	1600					
E295	520	4900	4470	4220	4100	4350	3980	3730	3610	3850	3500	3300	3190	3400	3100	2900	2830	3000	2740	2580	2430	2300	2240	2360	2180	2060	1990		
E335	620	3950	3620	3460	3380	3540	3300	3150	3080	3230	3010	2890	2830	2950	2780	2670	2620	2730	2580	2480	2400	2310	2270	2350	2220	2140	2110		
E360	720	6300	5680	5320	5150	5500	4980	4660	4500	4820	4350	4060	3920	4200	3900	3650	3410	3660	3300	3100	2990	3200	2900	2700	2600	2800	2620	2420	
C 45, C 45 E	670	3600	3450	3320	3260	3380	3200	3100	3040	3150	2990	2890	2840	2940	2800	2700	2660	2750	2620	2540	2500	2580	2460	2380	2340	2420	2310	2250	2220
C 60, C 60 E	770	3950	3690	3530	3450	3610	3380	3230	3150	3300	3100	2980	2920	3040	2860	2750	2700	2810	2650	2560	2490	2600	2450	2350	2300	2400	2260	2180	2130
16MnCr5	770	5150	4720	4450	4320	4590	4200	3950	3830	4080	3720	3500	3400	3610	3300	3120	3020	3210	2930	2750	2660	2840	2580	2440	2360	2510	2300	2160	2100
16CrNi6	630	6300	5680	5320	5150	5500	4980	4660	4500	4820	4350	4060	3920	4200	3900	3650	3410	3660	3300	3100	3000	3200	2900	2700	2590	2800	2620	2420	
34 Cr Mo 4	600	4650	4300	4100	4000	4200	3900	3700	3610	3800	3530	3370	3290	3450	3220	3080	3000	3150	2940	2820	2750	2880	2670	2530	2460	2600	2400	2300	2240
42 Cr Mo 4	730	6000	5450	5150	5000	5300	4880	4620	4500	4750	4370	4120	4000	4250	3980	3660	3550	3780	3450	3250	3150	3350	3060	2890	2800	2980	2720	2580	2500
50 Cr V 4	600	5460	5000	4700	4560	4850	4440	4210	4100	4330	3980	3730	3610	3860	3500	3300	3190	3400	3100	2910	2820	3000	2730	2580	2500	2650	2430	2290	2220
15CrMo5	590	4120	3880	3740	3660	3810	3590	3450	3390	3520	3320	3200	3130	3260	3070	2950	2900	3010	2850	2740	2820	2790	2630	2520	2470	2580	2420	2340	2290
Mn-, Cr Ni	850 ... 1000	4900	4530	4310	4200	4420	4100	3900	3800	4000	3710	3440	3450	3620	3380	3220	3150	3300	3080	2920	2850	3000	2780	2660	2600	2720	2550	2440	2380
CrMo-walleg. St.	1000 ... 1400	5150	4780	4560	4450	4670	4350	4150	4050	4250	3960	3790	3700	3880	3610	3440	3350	3520	3280	3160	3100	3220	3030	2940	2840	2970	2800	2680	2620
Nichtrost. St.	600 ... 700	4800	4500	4300	4200	4400	4120	3940	3850	4030	3770	3610	3530	3690	3460	3320	3250	3390	3180	3060	3000	3120	2940	2840	2780	2890	2730	2630	2580
Mn-Hartstahl		7150	6600	6270	6100	6440	5950	5650	5500	5800	5370	5100	4980	5240	4860	4620	4500	4740	4400	4180	4080	4290	3980	3800	3700	3890	3620	3440	3360
Hartguss		3950	3720	3570	3500	3640	3420	3270	3190	3340	3130	3010	2940	3070	2860	2750	2680	2810	2620	2500	2450	2560	2400	2300	2240	2350	2200	2110	2050
GE240	300 ... 500	2920	2720	2610	2560	2670	2510	2410	2360	2460	2320	2220	2180	2270	2140	2040	2000	2090	1960	1900	1860	1930	1820	1750	1720	1790	1690	1630	1600
GE260	500 ... 700	3200	3010	2880	2820	2950	2760	2650	2600	2710	2550	2460	2400	2500	2360	2280	2240	2320	2200	2100	2060	2150	2030	1960	1920	2000	1890	1830	1800
EN-GJL-150		1940	1800	1710	1670	1760	1630	1550	1510	1590	1480	1400	1370	1440	1340	1280	1250	1310	1220	1170	1140	1200	1120	1060	1040	1090	1020	970	950
EN - GJL - 250		2900	2570	2430	2360	2500	2300	2180	2120	2240	2060	1930	1870	2000	1820	1710	1660	1760	1600	1520	1470	1560	1430	1340	1300	1380	1280	1200	1160
Temperguss		2650	2440	2300	2240	2370	2180	2060	2000	2120	1950	1850	1800	1900	1750	1650	1600	1700	1560	1500	1460	1530	1420	1350	1320	1390	1290	1230	1200
Cu Sn-Gussleg.		3200	3010	2880	2820	2950	2760	2650	2600	2710	2550	2450	2400	2500	2360	2280	2240	2320	2200	2100	2060	2150	2030	1960	1920	2000	1890	1830	1800
CuSnZn-Gussleg.		1480	1360	1280	1250	1320	1220	1150	1120	1180	1090	1030	1000	1060	980	920	900	950	880	820	800	850	780	730	710	750	700	670	650
Cu Sn Zn-Knetleg.		1500	1380	1320	1300	1350	1280	1220	1200	1250	1180	1120	1100	1150	1080	1020	1000	1050	980	940	920	960	890	840	820	860	800	780	
Al-Gussleg.	300 ... 420	1480	1360	1280	1250	1320	1220	1150	1120	1180	1090	1030	1000	1060	980	920	900	950	880	820	800	850	780	730	710	750	700	670	
Mg-Gussleg.		520	490	475	470	480	455	435	430	440	420	405	400	410	390	370	360	380	350	335	330	340	320	305	300	310	300	285	280

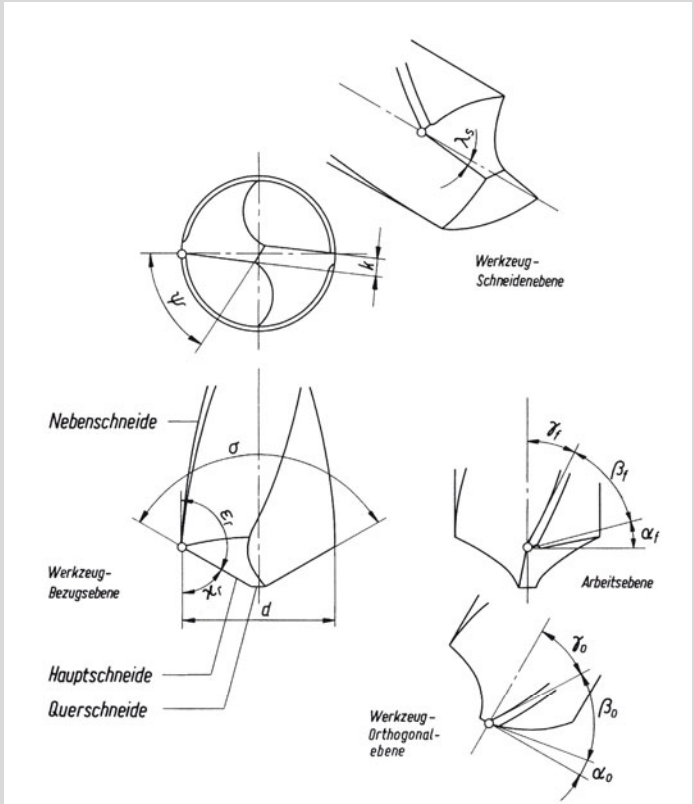
Zerspantechnik

Bohren

11.3.5 Werkzeugwinkel

Werkzeugwinkel am Bohrwerkzeug (Spiralbohrer)

- α_o Orthogonalfreiwinkel
- β_o Orthogonalkeilwinkel
- γ_o Orthogonalspanwinkel
- α_f Seitenfreiwinkel
- β_f Seitenkeilwinkel
- γ_f Seitenspanwinkel
- κ_r Einstellwinkel
- σ Spitzenwinkel
- λ_s Neigungswinkel
- ϵ_r Eckenwinkel
- ψ_f Querschneidenwinkel
- k Dicke des Bohrkerns (an der Bohrspitze)



Orthogonalfreiwinkel α_o
(siehe auch 11.1.3)

Der Winkel nimmt bei Kegelmantelschliff vom Außendurchmesser zum Bohrkern hin zu.
Bohren von Stahl: $\alpha_o = 8^\circ$ (außen) bis 30° (innen)

Orthogonalkeilwinkel β_o
(siehe auch 11.1.3)

Der Winkel ist über die ganze Länge der Hauptschneide praktisch konstant.

Orthogonalspanwinkel γ_o
(siehe auch 11.1.3)

Der Winkel nimmt durch die Form der Spannute vom Außendurchmesser zum Bohrkern hin bis zu negativen Werten (im Bereich der Querschneide bis -60°) ab.

$$\gamma_o = \arctan \frac{\tan \gamma_f + \cos \kappa_r \cdot \tan \lambda_s}{\sin \kappa_r}$$

- γ_f Seitenspanwinkel
- κ_r Einstellwinkel
- λ_s Neigungswinkel

Seitenfreiwinkel α_f ,
gemessen in der Arbeitsebene

$$\alpha_f = \text{arccot}(\sin \kappa_r \cdot \cot \alpha_o - \cos \kappa_r \cdot \tan \lambda_s)$$

- κ_r Einstellwinkel
- α_o Orthogonalfreiwinkel
- λ_s Neigungswinkel

Richtwerte für Werkzeug-Anwendungsgruppen N, H, W

Werkstoff	Gruppe	α_f
Stahl, Stahlguss, Gusseisen	N	$6^\circ \dots 15^\circ$
Messing, Bronze	H	$8^\circ \dots 18^\circ$
Al-Legierung	W	$8^\circ \dots 18^\circ$

Seitenkeilwinkel β_f ,
gemessen in der
Arbeitsebene

$$\beta_f = 90^\circ - \alpha_f - \gamma_f$$

α_f Seitenfreiwinkel
 γ_f Seitenspanwinkel

Seitenspanwinkel γ_f ,
gemessen in der
Arbeitsebene

Der Seitenspanwinkel ist der Neigungswinkel der Nebenschneide (Komplementwinkel des äußeren Steigungswinkels) und damit der Drallwinkel des Spiralbohrers.

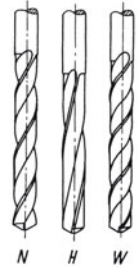
$$\gamma_f = \arctan \frac{d \pi}{h_n}$$

d Bohrerdurchmesser (Schneidendurchmesser an der Bohrerspitze)

h_n Steigung der Nebenschneide

Richtwerte

Werkstoff	Gruppe	γ_f
Stahl, Stahlguss, Gusseisen	N	16° ... 30°
Messing, Bronze	H	10° ... 13°
Al-Legierung	W	35° ... 40°



Werkzeug-
Anwendungsgruppen

Anwendungsgruppe

N für normale Werkstoffe
H für harte und spröde Werkstoffe
W für weiche und zähe Werkstoffe

Einstellwinkel κ_r
(siehe auch 11.1.3)

$$\kappa_r = \frac{\sigma}{2} \quad \sigma \text{ Spitzenwinkel}$$

Spitzenwinkel σ

Hüllkegelwinkel der beiden Hauptschnitten des Spiralbohrers:

$$\sigma = 2 \kappa_r \quad \kappa_r \text{ Einstellwinkel}$$

Richtwerte

Werkstoff	Gruppe	σ
Stahl, Stahlguss, Gusseisen	N	118°
Messing, Bronze	H	118° ... 140°
Al-Legierung	W	140°

Neigungswinkel λ_s

Der Neigungswinkel ergibt sich aus der Kerndicke des Spiralbohrers an der Bohrerspitze.

$$\tan \lambda_s = \frac{k \sin \kappa_r}{d}$$

k Kerndicke des Spiralbohrers an der Bohrerspitze
Mindestwert $k_{\min} = 0,197 \cdot d^{0,839}$

κ_r Einstellwinkel

d Bohrerdurchmesser
(Schneidendurchmesser an der Bohrerspitze)

Eckenwinkel ε_r
(siehe auch 11.1.3)

$$\varepsilon_r = 180^\circ - \kappa_r = \frac{360^\circ - \sigma}{2} \quad \begin{array}{l} \kappa_r \text{ Einstellwinkel} \\ \sigma \text{ Spitzenwinkel} \end{array}$$

Querschneidenwinkel ψ

Winkel zur Bestimmung der Lage der Querschneide zur Hauptschneide. Der Querschneidenwinkel ist von der Art des Hinterschliffs der Freifläche abhängig und beträgt im Normalfall (bei $\alpha_f = 6^\circ$ außen) $\psi = 55^\circ$.

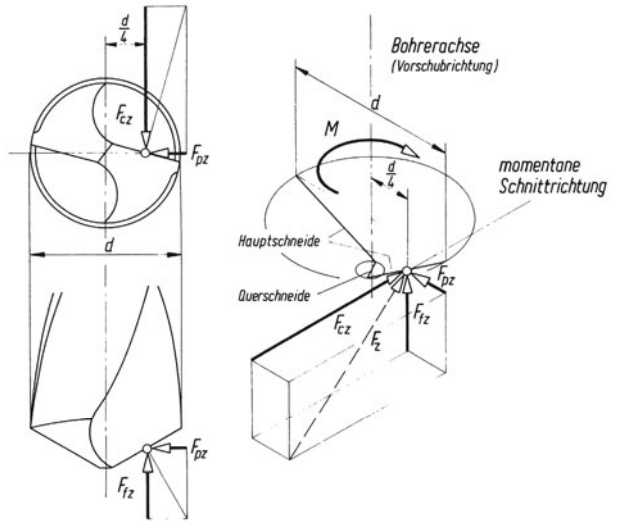
Zerspantechnik

Bohren

11.3.6 Zerspankräfte

Zerspankräfte beim Bohren bezogen auf das Werkzeug

- F_{cz} Schnittkraft an der Einzelschneide (leistungsführend)
- F_{tz} Vorschubkraft an der Einzelschneide (leistungsführend)
- F_{pz} Passivkraft an der Einzelschneide
- F_z Zerspankraft an der Einzelschneide
- M Schnittmoment



Schnittkraft F_{cz} je Einzelschneide

$$F_{cz} = \frac{df}{4} k_c S \quad \text{beim Bohren ins Volle}$$

$$F_{cz} = \frac{d - d_i}{4} f k_c S \quad \text{beim Aufbohren}$$

F_{cz}	d, d_i, f	k_c	S
N	mm	$\frac{N}{mm^2}$	1

- d Bohrerdurchmesser
- d_i Durchmesser der Vorbohrung (beim Aufbohren)
- f Vorschub
- k_c spezifische Schnittkraft
- S Verfahrensfaktor
- $S = 1$ für Bohren ins Volle
- $S = 0,95$ für Aufbohren

spezifische Schnittkraft k_c

Ermittlung entweder als Richtwert nach 11.3.4 oder rechnerisch:

$$k_c = \frac{k_{c1.1}}{h^z} K_{ws} K_{wv}$$

$k_c, k_{c1.1}$	h	z	K
$\frac{N}{mm^2}$	mm	1	1

- $k_{c1.1}$ Hauptwert der spezifischen Schnittkraft (11.1.4)
- h Spanungsdicke
- z Spanungsdickenexponent (11.1.4)
- K Korrekturfaktoren (11.1.4)

Vorschubkraft F_t

Die Vorschubkraft wird besonders durch die Länge der Querschneide an der Bohrerspitze beeinflusst und beansprucht das Bohrwerkzeug auch auf Knickung (Ausspitzung der Querschneide).

Die bisher bekannten Berechnungsverfahren für F_t ergeben keine ausreichende Übereinstimmung. Daher wird hier auf die Ermittlung der Vorschubkraft verzichtet.

Schnittmoment M

Drehmoment des aus beiden Schnittkräften F_{cz} nach 11.3.6 gebildeten Kräftepaars.

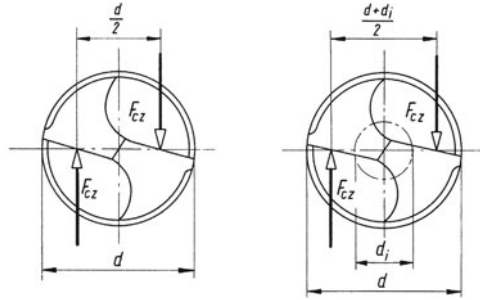
Bohren ins Volle

$$M = F_{cz} \frac{d}{2}$$

Aufbohren

$$M = F_{cz} \frac{d + d_i}{2}$$

M	F_{cz}	d, d_i
Nm	N	m



11.3.7 Leistungsbedarf

Schnittleistung P_c

$$P_c = \frac{2\pi M n}{6 \cdot 10^4} = \frac{M n}{9550}$$

P_c	M	n
kW	Nm	min ⁻¹

M Schnittmoment
 n Werkzeugdrehzahl

$$P_c = \frac{F_{cz} v_c}{6 \cdot 10^4} \quad \text{Bohren ins Volle}$$

$$P_c = \frac{F_{cz} v_c \left(1 + \frac{d_i}{d}\right)}{6 \cdot 10^4} \quad \text{Aufbohren}$$

P_c	F_{cz}	v_c	d, d_i
kW	N	$\frac{m}{\text{min}}$	mm

F_{cz} Schnittkraft an der Einzelschneide
 v_c Schnittgeschwindigkeit (außen)
 d Bohrerdurchmesser
 d_i Durchmesser der Vorbohrung (beim Aufbohren)

Vorschubleistung P_f

Bei der Berechnung des Bedarfs an Wirkleistung ist die Vorschubleistung wegen der geringen Vorschubgeschwindigkeit vernachlässigbar.

Motorleistung P_m

$$P_m = \frac{P_c}{\eta_g} \quad \eta_g \text{ Getriebewirkungsgrad}$$

$\eta_g = 0,75 \dots 0,9$

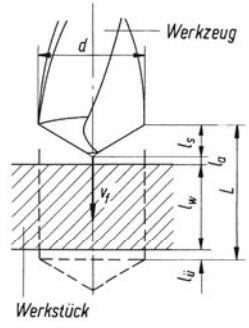
Zerspantechnik
Bohren

11.3.8 Hauptnutzungszeit

Hauptnutzungszeit t_h beim Bohren ins Volle

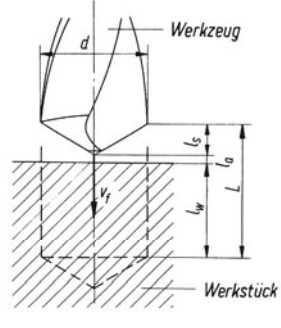
$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_u + l_s}{f n}$$

Durchgangsbohrung



- l_w Länge des zylindrischen Bohrungsteils
- l_a Anlaufweg (Richtwert: 1 mm)
- l_u Überlaufweg
Richtwerte: $l_u = 2$ mm bei Durchgangsbohrungen
 $l_u = 0$ bei Grundbohrungen

Grundbohrung

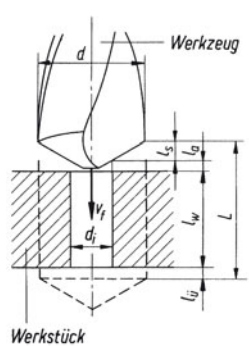


- l_s Schneidenzugabe (werkzeugabhängig)
$$l_s = \frac{d}{2 \tan \kappa_r} = \frac{d}{2 \tan \frac{\sigma}{2}}$$
- κ_r Einstellwinkel σ Spitzenwinkel
 $l_s \approx 0,3 d$ für Werkzeug-Anwendungsgruppe N mit $\sigma = 118^\circ \dots 120^\circ$
- f Vorschub n Werkzeugdrehzahl

Hauptnutzungszeit t_h beim Aufbohren

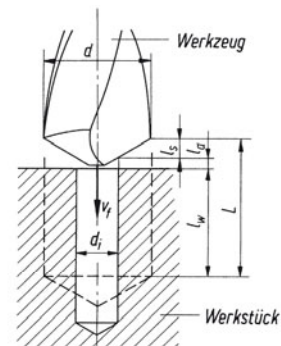
$$t_h = \frac{L}{v_f} = \frac{l_w + l_a + l_u + l_s}{f n}$$

Durchgangsbohrung



- l_w Länge des zylindrischen Bohrungsteils
- l_a Anlaufweg (Richtwert: 1 mm)
- l_u Überlaufweg
Richtwerte: $l_u = 2$ mm bei Durchgangsbohrungen
 $l_u = 0$ bei Grundbohrungen

Grundbohrung



- l_s Schneidenzugabe (werkzeugabhängig)
$$l_s = \frac{d - d_i}{2 \tan \kappa_r} = \frac{d - d_i}{2 \tan \frac{\sigma}{2}}$$
- κ_r Einstellwinkel σ Spitzenwinkel
 $l_s \approx 0,3 (d - d_i)$ für Werkzeug-Anwendungsgruppe N mit $\sigma = 118^\circ \dots 120^\circ$
- f Vorschub n Werkzeugdrehzahl

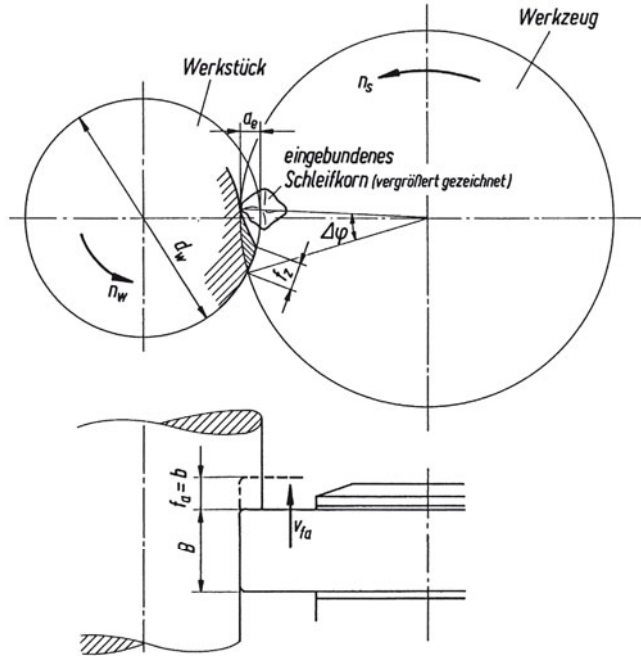
11.4 Schleifen

11.4.1 Schnittgrößen

Schnittgrößen beim Umfangsschleifen als Längsschleifen

Beim Umfangsschleifen als Einstechschleifen wird der Axialvorschub durch den Radialvorschub ersetzt.

- a_e Arbeitseingriff
- f_a Axialvorschub
- f_z Vorschub je Einzelkorn (Rundvorschub)
- d_w Werkstückdurchmesser
- B Schleifscheibenbreite



Arbeitseingriff a_e

Beim Umfangslängsschleifen die Tiefe des Eingriffs des Werkzeugs, gemessen in der Arbeitsebene rechtwinklig zum Rundvorschub. Der Arbeitseingriff wird durch Werkzeugzustellung direkt eingestellt.

Richtwerte für a_e in mm:

	Schruppen	Schichten
Stahl	0,003 ... 0,04	0,002 ... 0,013
Gusseisen	0,006 ... 0,04	0,004 ... 0,020

Ausfeuern ohne Zustellung ($a_e = 0$) verbessert Genauigkeit und Oberflächengüte.

Axialvorschub f_a (Seitenvorschub)

Beim Umfangslängsschleifen der Weg, den das Werkzeug während einer Umdrehung des Werkstücks in Vorschubrichtung zurücklegt:

Richtwerte: Schruppschleifen $f_a = 0,60 \dots 0,75 \cdot B$
 Schlichtschleifen $f_a = 0,25 \dots 0,50 \cdot B$

Zerspantechnik

Schleifen

Vorschub f_z je Einzelkorn (Rundvorschub)

Beim Umfangsschleifen der Weg, den ein Punkt auf dem Werkstückumfang während des Eingriffs eines Einzelkorns durch den Rundvorschub zurücklegt:

$$f_z = \frac{\lambda_{ke}}{q}$$

f_z	λ_{ke}	q
mm	mm	1

λ_{ke} effektiver Kornabstand
 q Geschwindigkeitsverhältnis

effektiver Kornabstand λ_{ke}

statistischer Mittelwert (nach J. Peklenik)

$\lambda_{ke} \approx c - 0,928 a_e$	λ_{ke}	a_e	Körnung	c
	mm	μm		
			60	41,5
			80	49,5
			100	57,5
			120	62,8
			150	66,5

a_e Arbeitseingriff
 c Konstante, berücksichtigt die Körnung des Schleifwerkzeugs:

Geschwindigkeitsverhältnis q

$$q = \frac{v_c}{v_w}$$

v_c Schnittgeschwindigkeit
 v_w Umfangsgeschwindigkeit des Werkstücks

Richtwerte für q

	Stahl	Gusseisen	Al-Legierung
Außenrundscheifen	125	100	50
Innenrundscheifen	80	63	32
Flachscheifen	80	63	32

Radialvorschub f_r

Beim Umfangseinstechschleifen der Weg, den das Werkzeug während einer Umdrehung des Werkstücks in Vorschubrichtung zurücklegt:

Richtwerte für f_r in $\frac{\text{mm}}{\text{U}}$

	Schuppen	Schlichten
Stahl	0,002 ... 0,024	0,0004 ... 0,0050
Gusseisen	0,006 ... 0,030	0,0012 ... 0,0060

11.4.2 Geschwindigkeiten

- n_s Drehzahl der Schleifscheibe
- v_s Umfangsgeschwindigkeit der Schleifscheibe
- n_w Drehzahl des Werkstücks
- v_w Umfangsgeschwindigkeit des Werkstücks
- v_c Schnittgeschwindigkeit
- v_{fa} Axialvorschubgeschwindigkeit (beim Längsschleifen)
- v_{fr} Radialvorschubgeschwindigkeit (beim Einstechschleifen)

Umfangsgeschwindigkeit v_s der Schleifscheibe

$$v_s = \frac{d \pi n_s}{6 \cdot 10^4}$$

v_s	d	n_s
$\frac{m}{s}$	mm	min^{-1}

- d Durchmesser der Schleifscheibe
- n_s Drehzahl der Schleifscheibe

Da $n_s \geq n_w$, ist die Umfangsgeschwindigkeit der Schleifscheibe praktisch die Schnittgeschwindigkeit (siehe 11.4.1) beim Schleifen.

Umfangsgeschwindigkeit v_w des Werkstücks

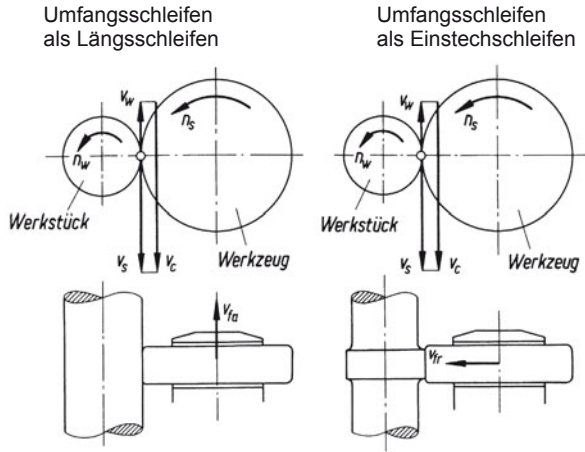
$$v_w = \frac{d_w \pi n_w}{1000}$$

v_w	d_w	n_w
$\frac{m}{\text{min}}$	mm	min^{-1}

- d_w Durchmesser des Werkstücks
- n_w Drehzahl des Werkstücks (Rundvorschubbewegung)

Richtwerte für v_w in $\frac{m}{\text{min}}$

	Stahl unlegiert	Stahl legiert	Gusseisen	Al-Legierung
Außenrundscheifen (Schruppen)	12 ... 18	15 ... 18	12 ... 15	30 ... 40
Außenrundscheifen (Schlichten)	8 ... 12	10 ... 14	9 ... 12	24 ... 30
Innenrundscheifen	18 ... 24	20 ... 25	21 ... 24	30 ... 40



Zerspantechnik

Schleifen

Schnittgeschwindigkeit v_c

$v_c = v_s + v_w$ beim Gegenlaufschleifen
 $v_c = v_s - v_w$ beim Gleichlaufschleifen
 v_s Umfangsgeschwindigkeit der Schleifscheibe
 v_w Umfangsgeschwindigkeit des Werkstücks
 $v_s \geq v_w \Rightarrow v_c \approx v_s$ d Durchmesser der Schleifscheibe
 $v_c \approx v_s = d \pi n_s$ n_s Drehzahl der Schleifscheibe

Richtwerte für v_c in m/s

	Stahl	Gusseisen	Al-Legierung
Außenrundschleifen	32	25	16
Innenrundschleifen	25	20	12
Flachschleifen (Umfangsschleifen)	32	25	16

Zulässige Höchstgeschwindigkeiten für Schleifkörper (Unfallverhütungsvorschriften) nur nach Angaben der Hersteller einstellen.

Aus den hohen Schnittgeschwindigkeiten und dem geringen Arbeitsingriff ergeben sich für das Einzelkorn sehr kurze Eingriffszeiten von 0,03 ms ... 0,15 ms (hohe örtliche Erwärmung an der Wirkstelle).

Axialvorschubgeschwindigkeit v_{fa}

$v_{fa} = f_a n_w$

v_{fa}	f_a	n_w
$\frac{mm}{min}$	$\frac{mm}{U}$	min^{-1}

f_a Axialvorschub (Seitenvorschub)
 n_w Drehzahl des Werkstücks

Radialvorschubgeschwindigkeit v_{fr}

$v_{fr} = f_r n_w$

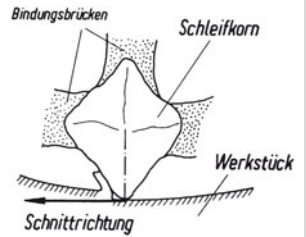
v_{fr}	f_r	n_w
$\frac{mm}{min}$	$\frac{mm}{U}$	min^{-1}

f_r Radialvorschub
 n_w Drehzahl des Werkstücks

11.4.3 Werkzeugwinkel

Die im Schleifwerkzeug fest eingebundenen Schleifmittelkörner bilden Schneidteile mit geometrisch unbestimmten Schneidkeilen. Eine definierbare und beeinflussbare Schneidkeilgeometrie liegt daher nicht vor.

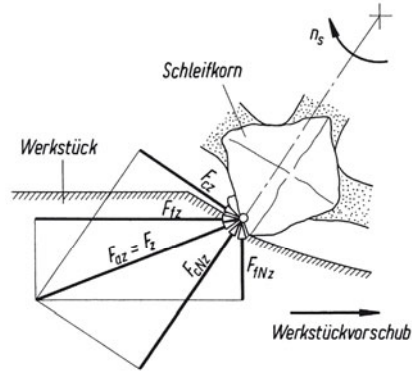
Nach statistischen Untersuchungen der Schleifscheibentopografie kann eine mittlere Kornschneide mit einem Schneidkeil verglichen werden, dessen Spanwinkel zwischen -30° und -80° liegt.



11.4.4 Zerspankräfte

Zerspankräfte beim Umfangsschleifen bezogen auf das Werkzeug

- F_{cz} Schnittkraft am Einzelkorn
- F_{cNz} Schnitt-Normalkraft am Einzelkorn
- F_{az} Aktivkraft am Einzelkorn
- F_{fz} Vorschubkraft am Einzelkorn
- F_{fNz} Vorschub-Normalkraft am Einzelkorn
- F_z Zerspankraft am Einzelkorn



Schnittkraft F_{czm}

Komponente (Mittelwert) der Zerspankraft F_z in Schnittrichtung:

$$F_{czm} = b \cdot h_m \cdot k_c \cdot S$$

F_{czm}	b, h_m	k_c	S
N	mm	$\frac{N}{mm^2}$	1

- b wirksame Schleifbreite
- $b = f_a$ beim Außenrundlängsschleifen
- f_a Axialvorschub (Seitenvorschub)

Mittenspannungsdicke h_m

$$h_m = \frac{\lambda_{ke}}{q} \sqrt{a_e \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d_w} \right)}$$
 Außenrundlängsschleifen

$$h_m = \frac{\lambda_{ke}}{q} \sqrt{a_e \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_w} \right)}$$
 Innenrundlängsschleifen

$$h_m = \frac{\lambda_{ke}}{q} \sqrt{\frac{a_e}{d}}$$
 Flachsleifen

- λ_{ke} effektiver Kornabstand (siehe 11.4.1)
- q Geschwindigkeitsverhältnis (11.4.1)
- a_e Arbeitseingriff (11.4.1)
- d Durchmesser der Schleifscheibe
- d_w Durchmesser des Werkstücks

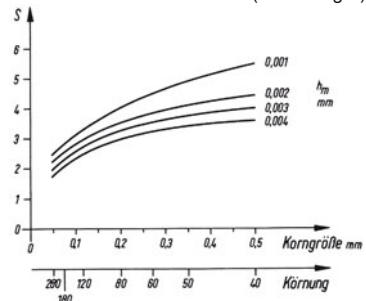
spezifische Schnittkraft k_c

$$k_c = \frac{k_{c1 \cdot 1}}{h_m^z}$$

$k_c, k_{c1 \cdot 1}$	h	z
$\frac{N}{mm^2}$	mm	1

- $k_{c1 \cdot 1}$ Hauptwert der spezifischen Schnittkraft (11.1.4)
- z Spannungsdickenexponent (11.1.4)

Verfahrensfaktor S (nach Preger)



Zerspantechnik Schleifen

11.4.5 Leistungsbedarf

Schnittleistung P_c

$$P_c = \frac{F_{czm} z_e v_c}{10^3}$$

P_c	F_{czm}	z_e	v_c
kW	N	1	$\frac{m}{s}$

F_{czm} Schnittkraft (Mittelwert) nach 11.4.4
 v_c Schnittgeschwindigkeit nach 11.4.2

Anzahl der gleichzeitig
schneidenden
Schleifkörner z_e

$$z_e = \frac{d \pi \Delta \varphi^o}{\lambda_{ke} 360^o}$$

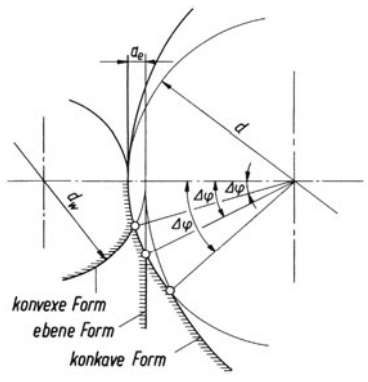
z_e	d	$\Delta \varphi$	λ_{ke}
1	mm	°	mm

d Durchmesser der Schleifscheibe
 λ_{ke} effektiver Kornabstand nach 11.4.1

Eingriffswinkel $\Delta \varphi$ für
Außenrundsleifen
(konvexe Oberfläche)

$$\Delta \varphi^o \approx \frac{360^o}{\pi} \sqrt{\frac{a_e}{d \left(1 + \frac{d}{d_w}\right)}}$$

a_e Arbeitseingriff nach 11.4.1
 d Durchmesser der Schleifscheibe
 d_w Durchmesser des Werkstücks



Eingriffswinkel $\Delta \varphi$ für
Innenrundsleifen
(konkave Oberfläche)

$$\Delta \varphi^o \approx \frac{360^o}{\pi} \sqrt{\frac{a_e}{d \left(1 - \frac{d}{d_w}\right)}}$$

Eingriffswinkel $\Delta \varphi$ für
Flachsleifen
(ebene Oberfläche)

$$\Delta \varphi^o \approx \frac{360^o}{\pi} \sqrt{\frac{a_e}{d}}$$

Motorleistung P_m

$$P_m = \frac{P_c}{\eta_g}$$

P_c Schnittleistung
 η_g Getriebewirkungsgrad
 $\eta_g = 0,4 \dots 0,6$ je nach Bauart und Belastungsgrad der Maschine

11.4.6 Hauptnutzungszeit

Hauptnutzungszeit t_h
beim Rundsleifen
(Längssleifen)
zwischen Spitzen

$$t_h = \frac{L}{v_{fa}} i = \frac{l_w - B}{f_a n_w} i$$

l_w Werkstücklänge in Schleifrichtung (Längsrichtung)
 B Schleifscheibenbreite
 f_a Axialvorschub
 n_w Drehzahl des Werkstücks

$$n_w = \frac{v_w}{d_w \pi} \quad u_w \text{ Umfangsgeschwindigkeit des Werkstücks}$$

$$d_w \text{ Durchmesser des Werkstücks}$$

i Anzahl der erforderlichen Zustellschritte (Schleifhübe):

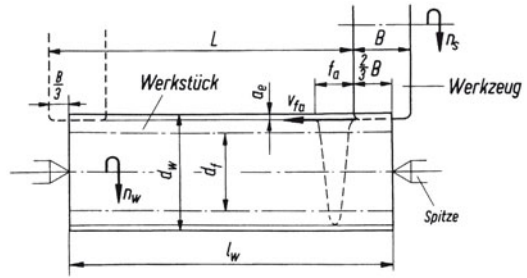
$$i = \frac{d_w - d_f}{2a_e} \quad \text{Außenrunds Schleifen}$$

$$i = \frac{d_f - d_w}{2a_e} \quad \text{Innenrunds Schleifen}$$

d_w Durchmesser des Werkstücks (Ausgangsdurchmesser)

d_f Fertigdiameter des Werkstücks

a_e Arbeitseingriff



Darstellung gilt sinngemäß auch für das Innenrunds Schleifen

Hauptnutzungszeit t_h beim Runds Schleifen (Einstechschleifen) zwischen Spitzen

$$t_h = \frac{L}{v_{fr}} = \frac{d_w - d_f}{2 f_r n_w} + l_a$$

d_w Durchmesser des Werkstücks (Ausgangsdurchmesser)

d_f Fertigdiameter des Werkstücks

l_a Anlaufweg (Richtwert: 0,1 ... 0,3 mm)

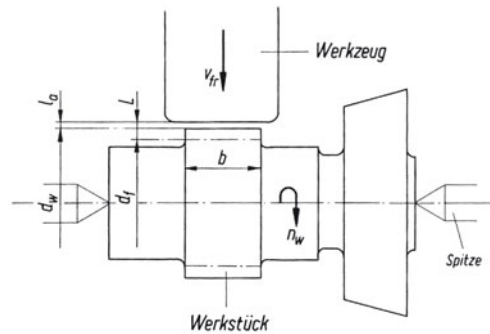
f_r Radialvorschub

n_w Drehzahl des Werkstücks

$$n_w = \frac{v_w}{d_w \pi}$$

v_w Umfangsgeschwindigkeit des Werkstücks

d_w Durchmesser des Werkstücks



Hauptnutzungszeit t_h beim spitzenlosen Runds Schleifen (Durchgangsschleifen)

$$t_h = \frac{L}{v_{fa}} = \frac{i_w l_w + B}{0,95 d_r \pi n_r \sin \alpha}$$

B Schleifscheibenbreite

d_r Durchmesser der Regelscheibe

n_r Drehzahl der Regelscheibe

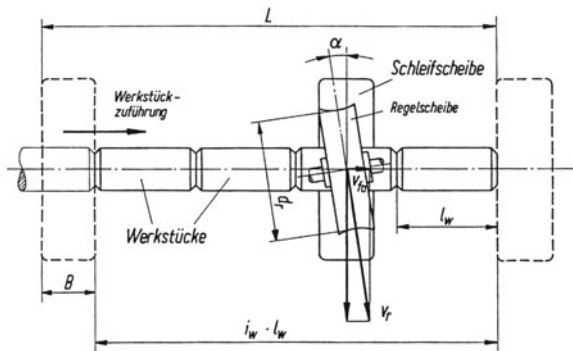
α Verstellwinkel der Regelscheibe

Richtwert für Längsschleifen: $\alpha = 3^\circ \dots 5^\circ$

i_w Anzahl der aufeinander folgenden

Werkstücke beim Durchgangsschleifen

l_w Länge des einzelnen Werkstücks



Zerspantechnik

Schleifen

Hauptnutzungszeit t_h
beim spitzenlosen
Rundschleifen
(Einstechschleifen)

$$t_h = \frac{L}{v_{fr}} = \frac{\frac{d_w - d_f}{2} + l_a}{f_r n_w}$$

d_w Durchmesser des Werkstücks
 (Ausgangsdurchmesser)

d_f Fertigdurchmesser des Werkstücks

l_a Anlaufweg (Richtwert: 0,1 ... 0,3 mm)

f_r Radialvorschub

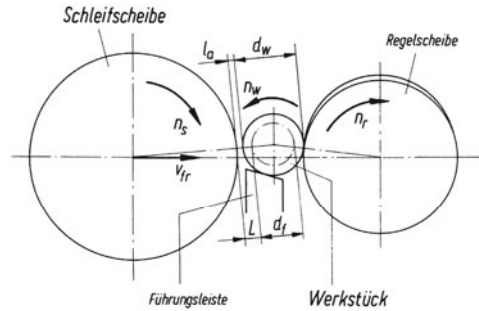
n_w Drehzahl des Werkstücks

$$n_w = 0,95 n_r \frac{d_r}{d_w}$$

n_r Drehzahl der Regelscheibe

d_r Durchmesser der Regelscheibe

d_w Durchmesser des Werkstücks



Sachwortverzeichnis

- ω , t -Diagramm 193
 0,2-Dehngrenze 95
- Abgleichbedingung** 124
Ableitung 37
Abmaße, Grenzmaße, Toleranzen 247
Abscherbeanspruchung 235
Abscheren und Torsion 235, 236, 291
Abscherfestigkeit 235
Abscher-Hauptgleichung 235
Abscherspannung, vorhandene 235
 –, zulässige 235
absolut schwarzer Körper 176
Absolutwert 1
Abstechdrehen, Hauptnutzungszeit 342
Abszissen 29
Abtriebsdrehzahl 340
Abtriebsdrehzahlbereich 340
Abtriebsmoment 200
Abziehhülse 296
Achsabstand 320
 – ohne Profilverschiebung 319
Achsen 287
 –, Normen (Auswahl) 286
Achsenabschnittsform der Geraden 27
Achsenwinkel 321
Achsmodul 323
Achsschnitt, Eingriffswinkel 324
Achteck 14
 –, regelmäßiges 52
Additionstheoreme 21, 24 ff.
adiabate (isentrop) Zustandsänderung 169
Admittanz 141
Aktivkraft 335, 349
Aliphaten 74
Alkalimetalle 67
allgemeine Linearform der Geradengleichung 27
Allgemeintoleranzen für Fasen und Rundungs-
halbmesser nach DIN ISO 2768-1 249
 – – Form und Lage nach DIN ISO 2768-2 249
 – – Längenmaße nach DIN ISO 2768-1 249
 – – Winkelmaße nach DIN ISO 2768-1 249
Aluminium und Aluminiumlegierungen, Bezeich-
nung 104
Aluminiumgusslegierungen 105
Aluminiumknetlegierungen 105
 A_L -Wert 129, 136
Amplitude 195
Analytische Geometrie 26
Anfangsgeschwindigkeit 191
Anfangsparameter 45
Anfangswinkelgeschwindigkeit 194
Ängström 60
Anhaltswert 273
 – für die zulässige ideale Schubspannung 276
- Ankreis** 17
Anlaufweg 340, 342, 350, 352, 362, 369
Anpresskraft 187
Anstrengungsverhältnis 239, 288
Anströmwinkel 207
Antiparallelschaltung 158
Antriebsmoment 200
Antriebswelle 297
Anziehdrehmoment 186
 –, erforderliches 264
Anziehungsfaktor 263
 –, Richtwerte 263
Äquivalent 1
 –, elektrochemisches 86
Äquivalentmenge 88
Äquivalentmengenkonzentration 89
Arbeit 56, 204
 – der Gewichtskraft 199
 – der konstanten Kraft 199
 – einer veränderlichen Kraft 199
 –, äußere 167 ff.
 –, elektrische 117
 –, konstantes Drehmoment 200
 –, technische 167 ff.
 –, verrichtete 199
Arbeitsebene 333
Arbeitseingriff 343, 351, 363, 364
Arbeitspunkt 118, 151, 153
Arbeitssatz (Wuchtsatz) 204
Archimedische Spirale 12, 46
Arcusfunktion 23
Areafunktion 26
Argument 7
Arithmetische Reihen, Definition 32
Arithmetisches Mittel 4
Aromaten 77
Asymptoten 31, 43, 48
Atmosphärendruck, umgebender 161, 205
atmosphärische Druckdifferenz, Überdruck 161
Atombindung 70
 –, polarisierte 70
Atomkern 63
Atommasse, relative 63
Aufbohren 353 f., 361
Auflagereibungsmoment 186
Aufnahmekegel 305
Auftrieb 206
Ausfeuern 363
Ausflusszahl 208
Ausflusszeit 209
Ausknicken 277
Auslenkung 194 f.
 –, maximale 195
Auslenkung-Zeit-Diagramm 195
Ausnutzungsgrad 257 ff.

- Ausschlagfestigkeit 257, 265, 267, 275
 Ausschlagkraft 265
 Ausschlagspannung 257 f., 265, 267
 Außendreher 335, 338
 –, Richtwerte 338
 Außendurchmesser 324
 Außenleiter 148
 Außenpressung 243
 Außenrundlängsschleifen 367
 Außenrundscheifen 365, 369
 Ausspitzung 360
 Avogadro-Konstante 59, 87
 axiale Flächenmomente 226
 – –, Widerstandsmomente, Flächeninhalte,
 Trägheitsradius 225, 227
 Axialkraft 296, 316, 317
 –, Bezeichnungen 289
 Axialkraftanteil 262
 –, in den verspannten Platten (Plattenzusatz-
 kraft) 262
 Axialsicherungsring 297
 Axialspannung 241
 Axialvorschub 363
 – (Seitenvorschub), Richtwerte 363
 Axialvorschubgeschwindigkeit 366
- Backenbremse** 188
 – mit tangentialem Drehpunkt 189
 – mit unterzogenem Drehpunkt 189
 Bahnpunkt, Geschwindigkeit 192
 bainitisches Gusseisen 104
 Ballungsregel 134
 Bandbremse, einfache 189
 Bandbremszaum 189
 Base 78
 Basis 6
 Baustahl 99, 291
 –, vergütet 292
 Bauteil-Ausschlagfestigkeit 291
 Bauteil-Fließgrenze 294
 –, Biegebeanspruchung 295
 –, Ermittlung 295
 –, Torsionsbeanspruchung 295
 Bauteil-Wechselfestigkeit, Berechnung 293
 –, Gleichungen 293
 Bauverhältnisse (Anhaltswerte) 311
 Beanspruchung 288
 –, zusammengesetzte 238, 239
 Befestigungsnahe 314
 Belastung, dynamische 218
 –, quasistatische 282
 –, schwingende 277
 –, zulässige 217 f., 235
 Belastungsfall 233, 288
 Belastungsnachweis 217 f., 235, 236
 Beleuchtungsstärke 59
 Berechnung axial belasteter Schrauben ohne
 Vorspannung 257
 – einer vorgespannten Schraubenverbindung
 bei axial wirkender Betriebskraft 258
 – vorgespannter Schraubenverbindungen bei
 Aufnahme einer Querkraft 265
- Berechnungsgleichungen für die Einzeltellerfeder
 Kennwerte K 280
 Bernoulli'sche Druckgleichung 207
 Beschleunigung 55, 190 f., 195, 201, 204
 Beschleunigungsarbeit 200 ff.
 Beschleunigungskraft 204
 Beschleunigungsmoment 204
 –, resultierendes 202
 Beschleunigung-Zeit-Diagramm 196
 Bestimmung des maximalen Biegemomentes
 219
 Betrag 1
 Betriebsbelastung 294
 Betriebseingriffswinkel 320
 – im Normalschnitt 320
 – im Stirnschnitt 320
 Betriebskraft, axiale 260, 262, 265
 –, dynamische 265
 –, gegebene 257
 Betriebslast 314
 Betriebswäzlkreis 316
 Betriebswäzlkreisdurchmesser 320
 Bewegung, drehende (rotatorische) 204
 –, geradlinige (translatorische) 204
 –, geradlinige gleichmäßig beschleunigte
 (verzögerte) 190
 Bewegungsschraube, Berechnung 266
 –, zulässige Flächenpressung, Richtwerte 267
 Bezugsprofil 320
 Biegebeanspruchung 218, 221
 –, Sicherheit 294
 Biegefeder 271
 Biegelinie 222
 Biegemoment 235, 239, 287 f., 290
 –, maximales 222, 289
 Biegemomentenfläche 219
 Biegespannung 274
 –, vorhandene 218, 287
 –, zulässige 273, 288
 Biegeweichsefestigkeit 292
 Biegung und Torsion 240
 Bildungs- und Verbrennungswärme 92
 Bildungsenthalpie 91
 Bindigkeit 71
 Bindungswertigkeit 71
 Binomische Formeln, Polynome 3
 bipolare Transistoren 155 f.
 Blattfeder 271
 –, geschichtete 274
 Blindfaktor 141
 Blindgröße, Blindwiderstand 141 ff.
 Blindleistungskompensation 147
 Blocklänge 276
 Bodenkraft 205
 Bogenanschluss 53
 Bogenelement 43
 Bogenhöhe 13
 Bogenlänge, mittlere 13
 Bogenmaß 19, 188, 195
 – des ebenen Winkels 19
 Bohren 335, 353, 356 f.
 – ins Volle 353 f., 361

- , Geschwindigkeiten 354
- , Schnittgrößen und Spanungsgrößen 353
- , Zerspankräfte 360
- Bohrerkern 358
- Bohrerspitze 358
- Bohrung, Toleranzfeld 303
- Bohrungsmaße 246
- Boltzmann-Konstante 59
- Brechung magnetischer Feldlinien 130
- Breitenverhältnis 274
- Bremse 188
- Bremskraft 188
- Bremsmoment 188
- Bremszaun 189
- Brennpunkt 30
- Brennstrahl 30
- Brennstrahlenlänge 31
- Bruchdehnung 95
- , Zerreiversuch 216
- Brüche 3
- Brucheinschnürung 95
- Bruchfestigkeit 313
- Brückenschaltung 124

- Candela** 59
- Carnot'scher Kreisprozess 171
- Celsiustemperatur 163
- Coulomb 125
- Coulomb'sches Gesetz 126
- CrNiMo-Einsatzstähle 292
- Culmann'sche Gerade 180

- d'Alembert'scher Satz** 201
- Dämpfung, prozentuale 285
- Darstellung, goniometrische 7
- Dauerbeanspruchung 275
- Dauerbruch, Sicherheitsnachweis 291
- Dauerfestigkeit 292
- , Nachweis 282
- , Sicherheitsnachweis 291
- Dauerfestigkeitsdiagramm (Goodman-Diagramme) 282, 299, 310, 314
- Dauerhaltbarkeit 277
- Dauerhubfestigkeit 277 f.
- Dauerkurzschlussstrom 138
- Dehnung 215 f.
- Dehnungshypothese (C. Bach) 239
- Diac 158, 160
- diamagnetisch 128
- Dichte 56, 176
- von Wasser 211
- Dichtebestimmung von Gasen 209
- Dielektrikum 126 f.
- Dielektrizitätskonstante 125
- Dielektrizitätszahl 125
- differentieller Widerstand 151, 153 f.
- Differenzbremse 189
- Differenzial 2
- Differenzial- und Integralrechnung, Anwendungen 42
- Differenzialgleichung der freien ungedämpften Schwingung 195
- Differenzialquotient 2
- Differenzialrechnung 35
- , Ableitungen elementarer Funktionen 36
- , Grundregeln 35
- DIN-Geradverzahnung 318
- DIN-Verzahnungssystem 318
- Diode 151 f.
- Dipol 71
- Diskriminante 11, 29
- Dissoziation, elektrolytische 83
- Dissoziationsgrad 83
- Dissoziationskonstanten 83
- Drahtdurchmesser, Entwurfsberechnung 275 f.
- Drallwinkel 347, 359
- Drangkraft 335
- Drehachse 202
- Drehbewegung, gleichförmige 192
- Drehen 327
- , Bewegungen 327
- , Geschwindigkeiten 327
- , Kräfte 327
- Drehenergie (Drehwucht) 202
- Drehfeder (Schenkelfeder) 275
- Drehfrequenz 55
- Drehimpulsänderung 204
- Drehmaschine, Leistungsflussbild 337
- Drehmeißel, gerader, rechter 332
- Drehmoment 56, 199 f.
- , resultierendes 202
- , stoartiges 296
- , zu übertragendes 266
- Dreh Schub 285, 286
- Drehstabfeder 271 f., 275, 297
- Drehstromnetz 148
- Drehstromtechnik 148 ff.
- Drehwinkel 193 ff., 200, 204, 271
- , berstrichener 193
- Drehwucht 204
- Drehzahl 55, 202
- , erforderliche 329
- Drehzahlwerte 340
- Dreieck 13
- , gleichseitiges 13, 51
- , schiefwinkliges 18
- Dreieck-Blattfeder 273
- Dreiecksfläche 182
- Dreieckschaltung 148 ff.
- Dreiecksspannung 148
- Dreiecksumfang 182
- Drei-Kräfteverfahren 180
- Drillungswiderstand 237
- Drosselspule 137
- Druck 56, 205
- und Biegung 238
- , absoluter 161, 205
- , hydrostatischer (Schweredruck) 205
- , statischer 207 f.
- , statischer, Messung 207
- Druckabfall 209 f.
- Drucknderungsarbeit 167
- Druckfeder 271
- , kaltgeformte 276 f.

- , kaltgeformte, Dauerfestigkeitsdiagramm 277
- , zylindrische 271
- Druckgusswerkstoffe 108
- Druckhöhe, konstante 209
- Druckkraft 233
- Druckspannung 233, 282
- , größte 218
- , mittlere tangentielle 302
- , resultierende 238
- , vorhandene 234
- Druckübersetzung 205
- Durchbiegung 222
- Durchbruchbereich 154
- Durchbruchspannung 151, 154
- Durchflussgeschwindigkeit, mittlere 206
- Durchflusszahl 208
- Durchflutungsgesetz 129
- Durchgangsbohrung 268, 362
- Durchlassbereich 151
- Durchlassstrom 151, 158
- Durchmesserverhältnis 298
- Dynamik der Drehung (Rotation) 202
 - – Verschiebebewegung (Translation) 201
- dynamisches Grundgesetz für freien Fall 201
 - – für Tangenten- und Normalenrichtung 201
 - –, allgemein 201 f.
- Ebene, schiefe** 185
- Eckenwinkel 332 f., 347, 358 f.
- Edelgas 69
- Edelmetall 68
- Effektivwert 139 f.
- Eigenfrequenz 271 f.
- Einflussfaktor, geometrischer 292
- Eingriffsteilung, Normalschnitt 319
 - , Stirnschnitt 319
- Eingriffswinkel 350
 - , Außenrundscheifen 368
 - , Flachscheifen 368
 - , Innenrundscheifen 368
 - , Normal- und Achsschnitt 325
 - , Stirnschnitt 319
 - , Teilkreis 318
- Eingriffszeit 366
- Einheit 189
 - , imaginäre 7
 - der vorkommenden physikalischen Größen 197
 - des ebenen Winkels, Begriff 19
- Einheitsbohrung 303
- Einlegekeil 296
- Einpressen 298
- Einpresskraft 299, 301
 - , erforderliche 305
- Einsatzhärten 292
- Einsatzstahl 101, 292
- Einsetzregel (Substitutionsmethode) 37
- Einstechschleifen 365
- Einstellwinkel 304 f., 332 f., 338, 340, 349, 358 f., 362
 - , Richtwerte 347
- Einweg-Gleichrichtung 140
- Einzellast 222
- Einzelrad- und Paarungsgleichungen für Gerad- und Schrägstirnräder 318
- Einzelteiler, Maße 279
- Eisen-Kohlenstoff-Diagramm 96
- Elastizitätsmodul 56, 95, 222, 273, 300
 - E und Schubmodul G verschiedener Werkstoffe 220
- elektrische Feldstärke 125
- elektrischer Fluss 125
- elektrisches Feld 125 ff.
- Elektrizitätsmengen 58
- Elektrolyse 85
- Elektrolyt 83
- Elektronegativität 69
- Elektronenhülle 66
- Elektronik 151 ff.
- Elektrotechnik 115 ff.
- Elektrowärme 118
- Element, galvanisches 85
- Elementarladung, elektrische 59
- Elementar-Teilchen 63
- Ellipse 10, 30
- Ellipsenkonstruktion 52
- Ellipsenumfang 31
- Emissionsverhältnis 165, 176
- Endgeschwindigkeit 191
- Endparameter 45
- Endwinkelgeschwindigkeit 193
- Energie 56
 - (Bewegungsenergie), kinetische 201
 - , Änderung der inneren 168
 - , Änderung der inneren 170
 - , elektrische 58, 117, 125
 - , innere 166, 169
 - , potenzielle (Energie der Lage) 201
 - , spezifische innere 57, 166
- Energiedichte 125, 129
- Energieerhaltungssatz 201
- Energieerhaltungssatz der Drehung 202
- Energieinhalt 125, 129
- Energiekosten 117
- Energieprinzip, (H. v. Helmholtz) 162
- Energieverlust beim Stoß 198
 - beim vollkommen unelastischen Stoß 198
- Englergrade, Umrechnung 206
- Enthalpie 57, 167
 - , Änderung 168, 170
 - , spezifische 57, 167
- Entropie 169
 - , Änderung 168, 170 f.
- Erdalkalimetall 67
- Erdmetall 67
- Ergänzungskegel 316
- Ergänzungsverzahnung 322
- Ergänzungszähnezahl 322
- Erhöhungsfaktor 295
 - , Fließgrenze 294
- Ersatz-Geradstirnrad 316
- Ersatzhohlzylinder 261
- Ersatzkraft 185
- Ersatz-Spannungsquelle 119, 130

- Ersatz-Stromquelle 119
 Ersatzverzahnung 322
 Ersatzzähnezahl 318, 322
 Euklid 16
 Eulergleichung 234
 Euler'sche Knickung 234
 – Zahl 188
 Evolventenfunktion 319
 Expansion, adiabate 171
 –, isotherme 171
 Expansionszahl 208
 experimentelle Bestimmung des Trägheitsmo-
 mentes eines Körpers 197
 Exponentialform 7
 Exponentialfunktion 11
 – und logarithmische Funktion 6
 Exponentialgleichung 9
 –, lösen 6
 Extremwert 43, 48
 Exzentrizität, lineare 31
 –, numerische 31
- Fachwerk** 181
 Fahrwiderstand 187
 Fahrwiderstandszahl 187
 Fakultät 1
 Fall, freier 190, 218
 Fallbeschleunigung 55, 190, 201, 205, 217
 Fallhöhe 190
 – nach Wurfweite 192
 –, freie 198
 –, Geschwindigkeit 192
 Farad 125
 Faraday'sche Gesetze 86
 Faraday-Konstante 59, 86
 Fasenlänge 299
 Fasenwinkel 299
 Federarbeit 271
 Federhub 277
 Federkennlinie 271, 279
 Federkraft 200, 271, 275, 276, 280 ff.
 Federmoment 271, 273
 Feder 271, 284
 –, Berechnungen 280
 –, hintereinandergeschaltete 272
 –, Maße, Begriffe und Bezeichnungen 279
 –, parallelgeschaltete 272
 Federpaket 279 f.
 Federrate 195 f., 271, 273, 281
 –, (Federsteifigkeit) 200
 – in N/mm 217
 –, resultierende 272
 Federsäule 279 f.
 Federstahl 281
 Federstahldraht, Dauerfestigkeitsdiagramm 276
 Federteller ohne Auflagefläche 280
 Federungsarbeit 281
 Federvolumen 273
 Federweg 200, 271, 273, 277, 279, 282
 Feinkornbaustahl, schweißgeeigneter 100
 Feldkonstante, elektrische 59, 125
 –, magnetische 59, 128
 Feldstärke 128 ff.
 –, elektrische 58
 Ferroelektrika 125
 ferromagnetisch 128
 Fertigung, spanende 338
 Festigkeitseigenschaften der Schraubenstähle
 nach DIN EN 20898 267
 Festigkeitshypothese 239
 Festigkeitskennwert 239
 Festigkeitsklasse 257
 Festigkeitsnachweis 267
 –, statische Belastung 282
 Festsitz 252
 Flächen 12 f.
 Flächenberechnung 45
 – in Polarkoordinaten 46
 Flächeninhalt eines Dreiecks 27
 Flächenintegral (bestimmtes Integral) 37
 Flächenmoment 228 f., 230, 235
 –, axiales 218, 219, 233
 –, erforderliches 233
 –, polares 196, 219
 – 2. Grades, Widerstandsmoment, Trägheitsra-
 dius 56, 219, 231
 Flächenpressung 241, 244, 265, 309 f., 314
 – an der Nabe, vorhandene 313
 – an der Welle, vorhandene 313
 – der Prismenführung 241
 – ebener Flächen 241
 –, Grenzwert 310
 –, Herleitung der Gleichungen 313
 – im Gewinde 242, 257
 – im Gleitlager 242
 – im Kegelnut 241
 – in Kegelnutkupplung 241
 –, mittlere 187
 –, zulässige 299, 307, 313 f.
 Flächenschwerpunkt 183
 Flachkeil 308
 Flachscheifen (Umfangsscheifen) 366 f.
 Flankendurchmesser 258, 270
 Flankenradius 186
 Flaschenzug (Rollenzug) 188
 Fliehkraft 202, 240
 Fließgrenze, Sicherheitsnachweis 294
 Fluss, magnetischer 58
 Flusssdichte 128 ff.
 –, elektrische 58
 Flüssigkeitsvolumen, verdrängtes 206
 Form, konkave 368
 –, konvexe 368
 Formänderung 215 f.
 Formänderungsarbeit 200, 217, 236
 Formänderungsgleichungen 278
 Formeln von Euler 33
 Formelzeichen und Einheiten 278
 Formfaktor 139 f., 273 f., 285
 Formfräser 347
 Formschlussverbindung 297
 Formtoleranz 250
 Formzahl 323
 Fourier-Entwicklung 195

- Fräsen 335
Fräserüberstand 349
Fräserzugabe 350
Freimachen 177
Freiwinkel 333
Frequenz 55, 139, 141, 195
Fügefläche 298
Fügen 298
–, hydraulisches 298
Fugendruck 298 f., 301, 307
– (Pressungsgleichung), erforderlicher 299
Fugendruck, Einpresskraft 305
–, Verteilung 307
–, vorhandener 307
Fugendurchmesser 299
Fugenfläche 307
Fugenlänge 298 f., 305
Fugenpressung, vorhandene 305
Fügespiel, erforderliches 302
Fünfeck 14
–, regelmäßiges 52
Funktionen der halben Winkel 22
– für Winkelvielfache 22
Funktion, gerade 44
–, inverse trigonometrische 12
–, logarithmische 11
–, trigonometrische 11, 20, 22, 25
–, ungerade 45
–, unecht gebrochene rationale 48
Funktionswerte 20
Fußhöhe 325
Fußkreis 316
Fußkreisdurchmesser 319, 324, 325
Fußwinkel 324
- G**
Gangzahl der Schnecke 323
–, Erfahrungswerte 323
Ganze Zahlen 1
Gas 69
Gas, vollkommenes 162
Gasgemisch, Gleichungen 171
Gaskonstante 171
–, individuelle 166
–, spezifische 57, 166, 176
–, universelle 57, 59, 166
Gasmechanik 166
Gegenkraft 188
Gegenlaufschleifen 366
Gegenlaufverfahren 344, 347
Gegenüberstellung einander entsprechender
Größen und Definitionsgleichungen für
Schiebung und Drehung 204
Gemischpartner 171
Gemischvolumen 171
Generatorregel 133
geometrische Größe, Sechskantschraube 246
– Grundkonstruktion 49
– Reihe, Definition 32
geometrisches Mittel 4, 32
Gerade 10
Geradstirnrad 316
– -V-Getriebe 318
– -V-Nullgetriebe 318
Geradverzahnung 319
Geradzahn-Kegelräder 317, 322
Gesamtdruck 171
Gesamteinflussfaktor 293
Gesamtfederkraft 280
Gesamtfederweg 280
Gesamtmasse 171
Gesamtresultierende 179
Gesamtrundlauf toleranz 250
Gesamtschwerachse 220
Gesamtschwerpunkt 220
Gesamtspannkraft, erforderliche axiale 310
Gesamtüberdeckung 320
Gesamtvolumen 171
Gesamtwirkungsgrad 200, 325
Geschwindigkeit 55, 204, 209, 365
–, gemeinsame 198
–, maximale 196
–, mittlere 197
– nach dem Stoß 198
– nach dem vollkommen elastischen Stoß 198
Geschwindigkeitsänderung 190
Geschwindigkeitsdruck 207
Geschwindigkeitsverhältnis, Richtwerte 364
Geschwindigkeitszahl 208
Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm 196
Gesetz von Boyle-Mariotte 163
– – Dalton 171
– – Gay-Lussac 163
Gestalt-Ausschlagfestigkeit 291
Gestaltfestigkeit 275, 294
–, Ermittlung 291
–, Gleichungen 293
Getriebestufe, Gesamtwirkungsgrad 326
Getriebewelle, Konstruktionsentwurf 287
–, Stützkkräfte und Biegemomente, Kräfte am
Zahnrad 289
Getriebewirkungsgrad 328, 337, 361, 368
Gewichtskraft 56, 185 f., 218
Gewinde, eingängiges 270
–, zweigängiges 270
Gewindedurchmesser 270
Gewindereibungsmoment 186, 266
Gewindesteigung 257, 264
Gewindesteigungswinkel 258
Glätten 298
Glättung 298, 301
Gleichanteil 140
Gleichgewicht, chemisches 81
Gleichgewichtskraft 235
Gleichgewichtslage 195
Gleichlaufschleifen 366
Gleichlaufverfahren 344, 347
Gleichrichtung 140
Gleichrichtwert 139 f.
Gleichsetzen 48
Gleichstromtechnik 118 ff.
Gleichung, goniometrische 9
–, logarithmische 9
–, quadratische 8 f.

- Gleitfeder 313
 Gleitgeschwindigkeit 325
 Gleitlager 325
 Gleitpassfeder 297
 Gleitreibungskraft 185
 Gleitreibung und Haftreibung 185
 Gleitreibungszahl 190, 266, 324
 Gleitsitz 252
 Gleitung 215
 goniometrische Gleichungen 9
 Grad Celsius 172
 – Fahrenheit 172
 – Kelvin 172
 – Rankine 172
 Grammäquivalent 89
 Gravitationskonstante 59
 Grenzabmaß, Eintragung 248
 Grenzdurchmesser 340 f.
 Grenzdurchmesserbereich 340
 Grenzflächenpressung, Richtwerte 265
 Grenزشlankheitsgrad 231 f.
 Grenzwert 2, 43
 Grenzwinkel 185
 Grenzzähnezahl 318
 griechisches Alphabet 2
 Größenbeiwert 267, 295
 Größen und Einheiten 273
 Größeneinflussfaktor 293
 –, technologischer 291, 294 f.
 Grundbohrung 362
 Grundeigenschaft der Ellipse 30
 – – Hyperbel 30
 Grundintegral 38
 Grundkreis 316
 Grundkreisdurchmesser 319
 Grundkreisradius 318
 Grundreihe 329
 Grundtoleranz 246
 – der Nennmaßbereiche 248
 Gruppe 66
 –, funktionelle 77
 GTO-Thyristor 159
 Guldin'sche Regeln 184
 Gummifeder 285
 Gurtscheibe 296
 Gusseisen mit Kugelgraphit 103
 – – Lamellengraphit 102
 – – Vermiculargraphit 104
 – -Nabe 307, 311, 314
 Gusseisensorten, Bezeichnung 101
 Gütefaktor 141
- Haftbeiwert** 299
 –, trocken 299
Haftkraft 300
Haftmoment 300
Haftreibungskraft 185
Haftreibungswinkel 185
Haftreibungszahl 185, 190
Haftsitz 252
Halbleiterdiode 151 f.
Halbparameter 30
- Halogen** 69
Haltekraft 185, 187
Haltepunkt 97
Haltespannung 157 f.
Haltestrom 157 f.
Handspindelpresse 266
harmonisches Mittel 4
Härteprüfung nach Brinell 93
 – – Rockwell 94
 – – Vickers 94
Hauptflächenmoment 220
Hauptnutzungszeit 339, 362, 368
 – beim Aufbohren 362
 – – außermittigen Stirnfräsen 351
Hauptnutzungszeit beim Bohren ins Volle 362
 – – mittigen Stirnfräsen 352
 – – Rundschleifen (Längsschleifen) 368 f.
 – – spitzenlosen Rundschleifen (Durchgangsschleifen) 369
 – – spitzenlosen Rundschleifen (Einstechschleifen) 370
Hauptquantenzahl 66
Hauptscheitel 30
Hauptschneide 328, 333, 359
Hauptspannung 216
Hauptwert der spezifischen Schnittkraft 360
 – Richtwerte 334
Hefnerkerze 59
Heizwert 92
Herstell-Eingriffswinkel 315, 318
Hertz 272
Hesse'sche Normalform 27 f.
Hinterschliff 359
Hirthverzahnung 297
Hobeln 335
Höchstpassung 303
Hohlkeil 308
Hohlkugel (Kugelschale) 203
Hohlwelle 294
Hohlzapfen 187
Hohlzylinder 203
 –, umlaufender 241
Hohlzylinder unter Druck 243
Hooke'sches Gesetz 95
horizontaler Wurf (ohne Luftwiderstand) 192
Hubhöhe 199
Hubspannung 277
Hüllkegelwinkel 359
Hülsenfeder, Beanspruchung 285 f.
Hund'sche Regel 66
Hyperbel 11, 30
 –, gleichseitige 31
Hyperbelfunktion 11
 –, Definitionen 25
 –, inverse 12
Hypothese der größten Gestaltänderungsenergie 239 f.
- Impedanz** 141
Impulserhaltungssatz 204
Impulserhaltungssatz (Antriebssatz) 201 f.
Induktanz 141

- Induktion 128 f.
 Induktionsgesetz 130
 Induktionskonstante 128
 Induktivität 58, 129, 135 ff.
 Inkreis 17
 Inkreisradius 13
 Innendrehen 335
 Innenkegelhöhe 324
 Innenkreis 51
 Innenpressung 243
 Innenrundlängsschleifen 367
 Innenrundscheifen 365, 369
 Innen-Sechskantschraube 246, 268
 Innenwiderstand 118, 121, 123
 Integral 37
 –, bestimmtes 2
 –, unbestimmtes 2
 Integrale algebraischer Funktionen 38
 – transzendenten Funktionen 40
 –, häufig vorkommende 38 f.
 –, uneigentliche 42
 Integrand 42
 Integrationsregeln 36
 Integrationsweg 42
 inverse trigonometrische Funktionen 12
 Ionenbindung 70
 Ionenprodukt 83
 Ionenwertigkeit 71
 ISO-Regelgewinde, metrisches 264
 – -Toleranz 248
 – -Toleranzlagen 303
 Isotope 63
 I-Träger nach DIN, warmgewalzte schmale 231
 –, mittelbreiter, Bezeichnung 232
 –, schmaler, Bezeichnung 231
 –, warmgewalzte 232
- Joule** 163, 199
- Kapazität** 141
 Kapazität 125 ff.
 –, elektrische 58
 Kegel, Begriffe 304
 –, gerade und schiefe 184
 –, Normen 304
 –, Vorzugswerte 305
 Kegelbuchse 296
 Kegel Durchmesser, mittlerer 304
 Kegelmantel und Pyramidenmantel 183
 Kegelmantelschliff 358
 Kegelmaße 304
 Kegelpasssystem 304
 Kegelräder, Einzelrad- und Paarungsgleichungen 321
 Kegelring 307
 Kegelstift 311
 Kegelstumpf 183
 –, gerader und schiefer 184
 Kegeltoleranzpasssystem 304
 Kegelverhältnis 304 f.
 Kegelwinkel 304 f.
 Keil 14, 184, 308
 Keilgetriebe 187
 Keilsitzverbindung 296, 308
 Keilwelle, Werte 306
 Keilwellenprofil 297
 Keilwellenverbindung 314
 – mit geraden Flanken (Übersicht) 314
 Kelvin 161
 Kennzeichnung der Oberflächenbeschaffenheit nach DIN EN ISO 1302 251
 Kerbschlagarbeit 95
 Kerbschlagbiegeversuch 95
 Kerbstift 297, 311
 Kerbverzahnung, Werte 306
 Kerbwirkung, Einflussfaktor 293
 Kerbwirkungszahl 267
 –, Richtwerte 293
 Kerbzahnprofil 297
 Kerndicke 359
 Kerndurchmesser 270
 Kernquerschnitt 270
 –, erforderlicher 266
 Kesselbetrieb (Mittelwerte) 176
 Kettenregel 35
 Kilomol 57
 Kippspannung 157 f.
 Kippstrom 157
 Kirchhoffsche Sätze 119
 Klammerregeln 3
 Kleinstübermaß 303
 Klemmenspannung 118
 Klemmkraft 262
 –, erforderliche 265 f.
 Klemmlänge 261
 Klemmsitzverbindung 296, 307
 Knickkraft nach Euler 233
 Knicklänge, freie 233
 Knicksicherheit 233
 Knickspannung 233 f.
 Knickung 217, 233, 360
 Knotenpunkt 181
 Knotenpunkt-Satz 119
 Koaxialitätstoleranz 250
 kohärente Einheit (gesetzliche Einheit, zugleich SI-Einheit) 199
 – – des ebenen Winkels 19
 Kolbenbeschleunigung 197
 Kolbengeschwindigkeit 197
 Kolbenkraft 205
 Kolbenweg 197, 205
 Kolkverschleiß 333
 Kombination geschichteter Tellerfedern 279
 Kompensation 147
 Kompensationskapazität 147
 komplexe Zahlen 1, 7
 Kompression, adiabate 171
 –, isotherme 171
 Kondensanz 141
 Kondensator 125 ff.
 Konduktanz 115, 141
 Konduktivität 115
 Konstanten, allgemeine und atomare 59
 –, häufig gebrauchte 2

- Konstantenregel 36
 Konstruktionsentwurf, Zusammenstellung wichtiger Normen 287
 Kontinuitätsgleichung 207
 Kontraktionszahl 208
 Konvektion 164
 Konvergenzbereich 33
 Konzentration 81
 Koordinationszahl 72
 Kopfauflagefläche 268
 Kopfhöhe 325
 Kopfkegelwinkel 324
 Kopfkreis 316
 Kopfkreisdurchmesser 319, 323 ff.
 –, innerer 324
 Kopfkürzung, erforderliche 319
 Kopfspiel 318, 322, 324
 – einer Radpaarung 320
 Kopfwinkel 324
 Kornabstand, effektiver 364, 367
 Körper 14
 Körperschwerpunkt 183 f., 202
 Kosecans 20
 Kosinus 20
 Kosinussatz 18
 Kotangens 20
 Kraft 56
 Kräfteck 181
 Kräfteinleitung, zentrische 261
 Kräfteinleitungsfaktor 260, 262
 Kräfteinleitungsfall, allgemeiner 262
 Kräfteinleitungskreis 279
 Kräftemaßstab 219
 Kräfteplan 180, 219
 Kräftesystem, allgemeines ebenes 178, 180
 –, – räumliches 178, 181
 –, – zentrales 181
 –, – ebenes 178, 180 f.
 –, – räumliches 178, 180 f.
 Kraftfahrzeugkupplungen 297
 Kraft-Linie 200
 Kraftmoment 235
 Kräfteinleitungspunkt 262
 Kraftverhältnis 261
 Kraftweg 188
 Kraft-Weg-Diagramm 199
 Kraftwirkung im elektrischen Feld 125 f.
 – – magnetischen Feld 132 ff.
 Kreis 10, 13, 29
 Kreisabschnitt 13
 Kreisabschnittsfläche 182 f.
 Kreisbewegung, gleichmäßig beschleunigte (verzögerte) 193
 Kreisbogen 52, 182
 Kreisevolvente 12
 Kreisfläche 45
 Kreisfrequenz 139, 195
 Kreisfunktion 23
 Kreisgleichung in Parameterform 29
 Kreiskegel 203
 –, gerader 15
 Kreiskegelstumpf, gerader 15
 Kreisprozessarbeit 171
 Kreisradius 13
 Kreisring 13
 Kreisringstückfläche 183
 Kreisringtorus 15
 Kreisröhre 206
 Kreissektor 13
 Kreiszyylinder 14, 203
 –, abgeschrägter gerader 183
 –, schief abgeschnitten 15
 Krümmung 44
 Krümmungskreis 31
 Krümmungsradius 30, 44, 201
 Kugel 15, 203
 –, kegelig durchbohrte 15
 –, zylindrisch durchbohrte 15
 Kugelabschnitt 184
 Kugelausschnitt 15, 184
 Kugelsektor 15
 Kugelstrahl 292
 Kugelvolumen 46
 Kühlschmierungs-Korrekturfaktor 335
 Kunststoffe, thermoplastische 112
 Kupfer und Kupferlegierungen, Bezeichnung 106
 Kupfergusslegierungen 107
 Kupferknetlegierungen 107
 Kupplung 296 f.
 Kurbelradius 197
 Kurvendiskussion 47
 Kurvenlänge 46
 Kurzschlussspannung 120, 138
 Kurzschlussstrom 116, 118, 120
 Kurzzeichen für Kunststoffe und Verfahren 110
- Ladung, elektrische 58
 Ladungszahl 71
 Lageplan 219
 Lager, zweiwertiges 180 f.
 Lagerkraft 180
 Lagermetalle und Gleitwerkstoffe 109
 Lagerreibung 187
 Lagetoleranzen 250
 Längenausdehnungskoeffizient 162, 174, 218, 302
 Längenmaßstab 219
 Längenzunahme 162
 Längsdehnung 300
 Längslager (Spurzapfen) 187
 Längspressverband 296, 298 f.
 Längsschleifen, Richtwert 369
 Längsstiftverbindung 311
 Längsvorschub der Maschine 328
 Lastdrehzahl 329
 Lastweg 188
 Laufsitz 252
 –, enger 252
 –, leichter 252
 –, weiter 252
 Lauge 78
 Leerlaufspannung 118, 120
 Leerlaufstrom 120

- Leichtmetalle 68
 Leistung 56, 200, 204
 – bei Drehstrom 149
 – des Generators 116
 –, elektrische 116 f.
 –, Übersetzung und Wirkungsgrad 200
 Leistungsanpassung 117
 Leistungsbedarf 337, 350, 361
 Leistungsfaktor 115, 141, 147
 Leistungsverlust 115, 147
 Leiter im elektrischen Feld 126
 – – magnetischen Feld 131 ff.
 –, paralleler 135 f.
 Leitfähigkeit 115
 Leitstrahl 47
 Leitwert 115
 –, elektrischer 58, 120 f.
 Lenz'sche Regel 130, 133
 Leuchtdichte 59
 Lichtausbeute 59
 Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum 59
 Lichtmenge 59
 Lichtstärke 59
 Lichtstrom 59
 Limes 1
 linearer Mittelwert 140
 – Widerstand 153
 Linkehandregel 134
 Lochleibungsdruck, Flächenpressung am Niet-
 schaft 242
 Logarithmus 1, 6
 –, dekadischer (Briggs'scher) 6
 –, natürlicher 6
 Logarithmensysteme 6
 logarithmische Funktionen 11
 – Gleichungen 9
 Löslichkeitsprodukt L 84
 Lösung, molare 88
 Lösungsformel 8
 Lot fällen 49
 Luftdruck 207
 Luftspule 135 f.
 Luftwiderstand 187

Mach'sche Zahl 206
 magnetische Flussdichte, Induktion 58, 128 ff.
 magnetisches Feld 128 ff., 135
 Magnetquantenzahl 66
 Manometer 209
 Mantel der Kugelzone und der Kugelhaube 183
 – des abgestumpften Kreis Kegels 183
 Mantelfläche 14
 Mantelschwerpunkt 183
 Maschen-Satz 119
 Maschinendiagramm 330
 Maschinendrehzahl 329
 Maschinenöl 326
 Maße für keglige Wellenenden mit Außengewinde
 306
 – – zylindrische Wellenenden mit Passfedern
 und übertragbare Drehmomente 312
 Masse, äquivalente 89

 –, molare 57, 87
 Masseneinheit, atomare 63
 Massenstrom (praktischer) 207 ff.
 Massenwirkungsgesetz 82
 Massenzahl 63
 mathematische Zeichen (nach DIN 1302) 1
 Maximalspannungen, vorhandene 294
 Maximum 43, 48
 mechanische Arbeit 199
 – Teilarbeit 199
 Messbereicherweiterung 123
 Messerkopf nach M. Kronenberg 347
 Messschaltung 123
 Messung des Gesamtdrucks 207
 – – Staudrucks (Prandtl'sches Staurohr) 207
 Metallbindung 70
 Metalle 67
 –, hochschmelzende 68
 –, höchstschmelzende 68
 Metallfeder 273
 Metrisches ISO-Gewinde nach DIN 13 269
 Metrisches ISO-Trapezgewinde nach DIN 103
 270
 Metrisches Regelgewinde, Bezeichnung 269
 –, System 60
 Mindestpassung 303
 Mindest-Profilverchiebungsfaktor 324
 Mindeststandzeit 330
 Minimum 43, 48
 Mischelement 63
 Mischgröße 140
 Mischungskreuz 90
 Mischungsregel 90
 Mischungstemperatur, (Gemischtemperatur) 161
 Mittel, geometrisches 4, 32
 –, harmonisches 4
 Mittellage 195
 Mittellinie, seitenhalbierende 17
 Mittelpunkt eines Kreises 50
 Mittelpunkts-gleichung 31
 Mittelspannungsempfindlichkeit 293 f.
 Mittelwert 139 f.
 –, statistischer (nach J. Peklenik) 364
 Mittenkreisdurchmesser 324 f.
 Mittenrauwert 251
 Mittenspannungsdicke 345, 367
 Mittenersatz 351
 Modul für Schnecke und Schneckenrad 325
 – -Verhältnis 217
 Mohr'scher Spannungskreis 216
 Molarität 88
 Molekülmasse, relative 87
 Mollweide'sche Formeln 18
 Molvolumen 88
 Moment, inneres 235
 Momentanbewegung 329
 Momentangeschwindigkeit 330, 355
 Moment-Drehwinkel-Diagramm 199
 Momentenfläche 219
 Momentengleichgewicht 215
 Momentenlinie 200, 222
 Momentensatz 179

- Momentenstoß 204
- Momentenverlauf 222
- Montagevorspannkraft 263
- Montagevorspannung 264
- Morsekegel 305
- Motorleistung 337, 350, 361
- , elektrische 337
- Motorregel 134
- Mutterauflage 261
- Mutterhöhe, erforderliche 266

- Nabe, geschlitzte** 307
- , geteilte 296
- Nabenabmessung, Richtwerte 306
- Nabendicke 311, 314
- Nabenlänge 314
- Nabennut 313
- Nabensprengkraft 302
- Nabenverbindung, formschlüssige 297
- , kraftschlüssige 298
- , reibschlüssige, (Beispiele) 296
- Nachweis bei schwingender Belastung, (Dauerfestigkeit) 282
- Nasenflachkeil 308
- natürliche Logarithmen 6
- Zahlen 1
- Nebenquantenzahl I 66
- Nebenscheitel 30
- Nebenschneide 333, 359
- Neigungswinkel 185, 332 f., 347, 358 f.
- , Richtwerte 347
- Nennmaßbereich 303
- Nennmaß für Welle 314
- Neuneck, regelmäßiges 52
- Neutralleiter 148
- N-Gate-Thyristor 159
- nichtlinearer Widerstand 153
- Nichtmetalle, feste 69
- NiCrMo-Einsatzstähle 292
- Nitrieren 292
- Nitrierstahl 101, 291
- Normalgleichung 29 f.
- Normalform 8
- der Geraden 27
- Normalkraft 185, 187, 189, 241, 316
- Normallösung 89
- Normalmodul 319, 322, 325
- Normalmodul, äußerer 322
- Normalpotential 85
- Normalschnitt 316, 318
- Normalspannung 215, 217, 239 f.
- , Hooke'sches Gesetz 216
- Normalteilung 325
- Normdrehzahl 355
- Normen 245
- (Auswahl) und Richtlinien 271
- , Bezugsliteratur 257
- Normfallbeschleunigung 201
- Normgewichtskraft 201
- Normvolumen 161 f.
- idealer Gase, molares 59
- , molares 88, 166
- , spezifisches 172
- Normzahlen 245
- der Reihe R5 259
- Normzustand, physikalischer 166
- NPN-Transistor 155
- Nulldurchgang 219
- Nullgetriebe 321
- Nullkippspannung 157 f.
- Nulllage 195
- Nullpunkt 45
- Nullsetzung 48
- Nullstelle 42
- Numerus 6
- Nutzarbeit 200
- Nutzleistung 200
- Nutzung, ökonomische 328

- Oberfläche** 14, 184
- Oberflächenbeiwert 267, 295
- Oberflächenrauheit 292
- , Einflussfaktor 292
- Oberflächentemperatur 163
- Oberflächenverfestigung, Einflussfaktor 292
- Oberspannungsfestigkeit, Dauerfestigkeitsdiagramm 277
- Ohm'sches Gesetz 118
- – des Magnetkreises 128
- Öl, Dichte 326
- , spezifische Wärmekapazität 326
- Ölumlaufrückführung, erforderlicher Kühlöldurchsatz 326
- Optik 59
- Orbital 66
- Ordinatenabschnitt 27
- Ordnungszahl 63
- Original-SCHNORR Tellerfedern 283
- orthogonal 1
- Orthogonalfreiwinkel 332 f., 358
- , Richtwerte 347
- Orthogonalkeilwinkel 332 f., 347, 358
- Orthogonalspanwinkel 332 f., 358
- , Richtwerte 347
- Oxydationszahl 71

- Parabel** 10, 30
- , kubische 10
- , semikubische 10
- Parabelfläche 183
- Parallele 51
- Parallelogramm 12
- Parallelogrammumfang und -fläche 182
- Parallelschaltung von Blindwiderständen 144 ff.
- – Induktivitäten 138
- – Kondensatoren 127
- – Widerständen u. Quellen 120 ff.
- Parallelschub 285
- paramagnetisch 128
- Parameterdarstellung 44 f., 47
- Partialdruck 171 f.
- Pascal 205
- Passfeder 296, 306, 308, 312
- , tragende Länge 313

- Passfederlänge 312 f.
 Passfedermaß 312
 Passfederverbindung 297, 312
 – (Nachrechnung) 313
 Passivkraft 335, 349, 360
 Passtoleranzen, empfohlene 255
 Passtoleranzfelder, ausgewählte 253
 Passungsart 247
 Passungsauswahl 255
 –, (Toleranzfeldauswahl) 246
 Passungsgrundbegriffe 247
 Passungsspiel 310
 Passungssystem Einheitsbohrung 246
 – Einheitswelle 246
 Pauli-Prinzip 66
 Pendelart 196
 Pendelgleichung 196
 Pendelstütze 181
 Periode 66
 Periodendauer 139, 194
 – (Schwingungsdauer) 195
 periodische Schwingung 194
 Permeabilität 58, 128, 130, 136
 Permeanz 128
 Permittivität (früher Dielektrizitätskonstante) 58, 125
 Permittivitätszahl 125
 P-Gate-Thyristor 159
 Phase 195
 Phasenanschnitt 140
 Phasenanschnittsteuerung 160
 pH-Wert 84
 Physikalische Größen, Definitionsgleichungen und Einheiten 55
 Planck-Konstante 59
 Plandrehbearbeitung 340
 Plandrehen einer Kreisringfläche 341
 – – Vollkreisfläche 341
 –, Hauptnutzungszeit 339 f.
 Plan-Kerbverzahnung 297
 Planrad, Zähnezahl 322
 Plantschverluste 326
 Planvorschub 339
 Plastomere, thermoplastische 112
 Plattenkondensator 127
 PNP-Transistor 155
 Poisson-Zahl 216 f., 240 f., 278, 281
 Polabstand 219
 Polargleichung 31
 Polarkoordinaten 44, 47
 Polstelle 42, 48
 Polyamide 113
 Polycarbonat 113
 Polyester, linear 113
 Polyethylen 112
 Polyetrafluorethylen 112
 Polygonprofil 297
 Polymethylmetacrylat 113
 Polynom 3
 –, quadratisches 11
 – dritten Grades 11
 Polyoxymethylen 113
 Polyphenylsulfid 113
 Polypropylen 112
 Polystyrol-Copolymere, schlagfeste 112
 Polystyrol 112
 Polyvinylchlorid 112
 Potenzen von Funktionen 22
 Potenzfunktionen 10 f.
 Potenzieren 4
 Potenzrechnung 4
 Potenzreihe 33 f.
 Presse, hydraulische 205
 Presspassung 298
 –, festlegen 303
 Presssitz 252
 Pressung, Kugel gegen Ebene 242
 –, Kugel gegen Kugel 242
 –, Walze gegen Ebene 242
 –, Walze gegen Walze 243
 Pressungsfaktor 310
 Pressungsgleichung, Herleitung 300
 Pressverband 298, 302
 –, Berechnung 299
 –, Formänderungs-Hauptgleichung 300
 –, (Fügear), Herstellung 298
 –, kegliger, Berechnungsformeln 305
 –, – (Kegelbuchse) 296
 –, – (Wellenkegel) 296
 –, (Kegelsitzverbindungen), kegliger 304
 – mit Vollwelle, Formänderungsgleichungen 301
 –, Normen 298
 – (Presssitzverbindungen) 296
 – (Spannungsbild) 301
 –, zylindrischer 296, 298, 307
 Prinzip des kleinsten Zwanges 81
 Prisma (und Zylinder) mit parallelen Stirnflächen, gerades und schiefes 183
 Prismatoid 14
 Prismoid 14
 Probestab, gekerbter 292
 Produkt von Funktionen 22
 Produktregel 35
 –, (partielle Integration) 37
 Profilüberdeckung 320
 Profillumfang 228 ff.
 Profilverchiebung 318, 324 f.
 Profilverchiebungsfaktor 318, 320 f.
 Profilstellenverbindung 297
 Projektionssatz 18
 proportional 1
 Punkt-Steigungsform der Geraden 27
 Pyramide 14
 –, gerade und schiefe 184
 Pyramidenstumpf 14
 –, mit beliebiger Grundfläche 184
 Pythagoras 16

Quader 14
 Quellenspannung 118 f.
 Querdehnung 216 f., 300
 Querdehnzahl 300
 Querkraft 235, 239

- Querkraftfläche 219
 Querkraft-Schubspannung 239
 Querlager (Tragzapfen) 187
 Querpressverband 296, 299
 Querschneide 359
 Querschneidenwinkel 358 f.
 Querschnitt, erforderlicher 217, 235
 –, gefährdeter 235
 –, unsymmetrischer 220
 – für Biegung und Knickung 225
 Querschnitts-Abmessungen, Gleichungen 221
 Querschnittsnachweis 217 f., 235 f.
 Querstiftverbindung 311
 Quotientenregel 35
- Radialkraft** 242, 316
 –, Achsenwinkel 317
 –, Bezeichnungen 289
 –, resultierende 289 f.
 Radialspannung 240, 243
 Radialvorschub 363, 369
 –, Richtwerte 364
 Radialvorschubgeschwindigkeit 366
 Radnabe 297
 Randfaser 235
 Randschicht, gehärtete 295
 Rationale Zahlen 1
 Rauheitsklasse 251
 Rauigkeiten, körnige 210
 Räumen 335
 Raumschaffungsarbeit 166
 Raumwinkel 55
 Rautiefe 328
 –, gemittelte 292, 298, 301, 310
 –, vorgegebene 328
 Reaktanz 141
 Reaktion, endotherme 91
 –, exotherme 91
 –, umkehrbare 81
 Reaktionsenthalpie 91
 Reaktionsgleichung 80
 rechnerische Bestimmung unbekannter Kräfte
 (rechnerische Gleichgewichtsaufgabe) 181
 Rechteck, Quader 203
 Rechteck-Blattfeder 273
 Rechthandregel 133
 Rechtsschraubenregel 133
 rechtwinkliges Dreieck, allgemeine Beziehungen
 16
 Reduktion der Trägheitsmomente, Getriebe 202
 reelle Zahlen 1
 Regel, logarithmische 35
 Reibungskraft 185
 Reibungsleistung 187
 Reibungsmoment 187
 Reibungsschluss 308
 Reibung 185
 – auf schiefer Ebene 185
 – in Maschinenelementen 186
 Reibungsarbeit 199, 201
 Reibungswinkel 185, 190, 305
 – im Gewinde 258, 267
- Reibungszahl 185, 188, 199
 – der Mutterauflage 186
 – im Gewinde 186
 –, Richtwerte 264
 Reibungszahl, Trapezgewinde 267
 Reihen 32
 –, Definition 32
 Reihenschaltung von Blindwiderständen 142 f.
 – – Induktivitäten 138
 – – Kondensatoren 127
 – – Widerständen u. Quellen 122
 Reinelemente 63
 Rekursionsformel 41
 Relationen, graphische Darstellung 10
 Reluktanz 128
 Resistanz 115, 141
 Resistivität 115
 Resonanzbedingung 141
 Reststrom 156
 Resultierende aus Schnittkraft 335
 –, rechnerische Bestimmung 178
 –, zeichnerische Bestimmung 178
 Reynolds'sche Zahl 206
 Reynoldszahl, kritische 207
 Re-Zahl, Umstellung 210
 Rhombus 12
 Richtwert, spezifische Schnittkraft 360
 Richtwerte für die Schnittgeschwindigkeit beim
 Drehen 331
 – – – – und den Vorschub 356
 – – – spezifische Schnittkraft beim Drehen
 336
 – – Fräswerkzeuge aus Schnellarbeitsstahl
 343
 – – Schnittgeschwindigkeit 343
 – – spezifische Schnittkraft 357
 – – Vorschub des Stechwerkzeugs 342
 –, Neigungswinkel 347
 –, Orthogonalfreiwinkel 347
 –, Orthogonalspanwinkel 347
 –, Umrechnung 329
 –, Vorschub 344
 Riemenscheibe 296 f.
 Ring 203
 Ring, umlaufender 240 f.
 Ringbreite 13
 Ringfeder 275
 Ringfederspannelement 296
 Ringfederspannverbindung 296, 308
 –, Einbau und Einbaubeispiel 308
 –, Maße, Kräfte und Drehmomente 309
 Ringpaar 308
 Ritzel 316
 Rohrreibungszahl 209 f.
 Rohteilstange 342
 Rollbedingung 187
 Rolle (Leit- oder Umlenkrolle), feste 188
 –, lose 188
 Rollen- und Flaschenzüge 188
 Rollenzug, Wirkungsgrad 190
 Rollkraft 187
 Rollreibung 187

- Rollwiderstand 187
 Rotationskörper, Mantelflächen 47
 –, Volumen 46
 Rotationsparaboloid 46
 $R_{p,0,2}$ 0,2-Dehngrenze 257
 – – der Schraube 267
 Rücksprunghöhe 198
 Rückstellkraft 196
 Rückstellmoment 196
 Ruhemasse des Elektrons 59
 – – Protons 59
 Runddrehen 328
 –, Hauptnutzungszeit 339
 Rundheitstoleranz 250
 Rundvorschub 363 f.
 Rundvorschubbewegung 365
 Rutschbeiwert 299, 301, 305, 307
 –, geschmiert 299
- Sacklochgewinde, Einschraublänge** 269
 Säure 80
 Schallgeschwindigkeit 206
 Scheibenfeder, Beanspruchung 285 f.
 Scheibenfräser 347
 Scheinwiderstand 141 ff.
 Scheitel 30
 Scheitelfaktor 139 f.
 Scheitelgleichung 29 ff.
 Scheitelradius 31
 Scheitelwert 139
 Schema einer arithmetischen Stufung 32
 – – geometrischen Stufung 32
 Schenkeldicke 230
 Schiebergeschwindigkeit 192
 Schieberweg 192
 Schiebesitz 252
 Schiebung 217
 schiefe Ebene 185
 schiefwinkliges Dreieck, allgemeine Beziehungen
 17
 Schlankheitsfaktor 277
 Schlankheitsgrad 233 f.
 Schleifbreite, wirksame 367
 Schleifen 363
 Schleifhub 369
 Schleifscheibentopografie 366
 Schleusenspannung, Schwellspannung 151
 Schlichten 351
 Schlichtschleifen 363
 Schlichtzerspannung 344
 Schlüsselweite 261
 Schlusslinien-Verfahren 181
 Schmelzentalpie 162, 173
 Schmelzpunkt fester Stoffe 174
 Schmelztemperatur 162
 Schmierart, erforderliche 326
 Schmierung, Art 326
 Schnecke 323, 325
 – und Schneckenrad 317
 –, mehrgängige 323
 –, Steigungshöhe 323
 –, treibende 324
- Schnecken-Abmessungen 325
 Schneckengetriebe 326
 –, Einzelrad- und Paarungsgleichungen 323
 –, Gesamtwirkungsgrad 323
 Schneckenlänge 325
 Schneckenrad 323, 325
 –, treibend 324
 –, Zähnezahzahl 323
 Schneckenwelle 325
 Schneidenpunkt 330, 333, 353
 Schneidzugabe 342, 362
 Schneidkeil 332, 366
 Schneidkeilgeometrie 366
 Schneidkeilschwächung 333
 Schneidstoff-Korrekturfaktor 335
 Schnittbreite 343
 Schnittgeschwindigkeit 328 f., 337, 340, 365
 –, empfohlene 329, 346
 –, Richtwerte 329, 354, 366
 –, Umrechnung (Bohrarbeitskennziffer) 354
 –, wirkliche 330
 Schnittgeschwindigkeitsempfehlungen 354
 Schnittgeschwindigkeits-Korrekturfaktor 334
 Schnittgrößen 327, 343, 353, 363
 – beim Umfangsschleifen 363
 Schnittkraft 335, 337, 360, 367
 – (nach Kienzle) 334
 – am Einzelkorn 367
 – an der Einzelschneide 361
 – je Einzelschneide 360
 –, spezifische 328, 334, 337, 349, 360, 367
 –, – (rechnerisch) 334
 Schnittkraftverlauf, theoretischer 348 f.
 Schnittleistung 337, 350, 361, 368
 Schnittmoment 360 f.
 Schnittpunkt zweier Geraden 27
 Schnitttiefe 328, 337, 340, 343, 349
 –, (Schnittbreite) 353
 Schnittvorschub 343 f.
 Schnittwinkel 28, 216
 Schrägstimmrad 316
 – -Nullgetriebe 318
 – -V-Getriebe, Berechnungsgleichungen 318
 – -V-Nullgetriebe 318
 Schrägungswinkel 319 f.
 – am Teilkreis 318
 Schrägzahn-Kegelrad 317
 Schraube 186
 –, Abmessungen 259
 –, Axialkraftanteil 261
 Schraubendruckfeder, zylindrische 271, 276
 Schraubenfederpendel 196
 Schraubenkraft 262
 Schraubenlängskraft 265
 Schraubenverbindung 257, 259
 –, vorgespannte 260
 –, zentrisch vorgespannte 260
 Schraubenzugfeder, zylindrische 278
 Schrumpfen 235
 –, Fügetemperatur 302
 Schrumpmaß, Pressverbindung 243
 Schrumpfring 307

- Schrumpferverbindung 296
 Schruppen 351
 Schruppschleifen 363
 Schruppzerspannung 333, 344
 Schub 240
 Schubbeanspruchung 287
 Schubkurbelgetriebe 197
 Schubmodul 56, 196, 217, 236, 273, 276
 Schubspannung 215, 235, 239 f., 277
 –, Hooke'sches Gesetz 217
 –, ideelle 276
 –, maximale 216, 238
 Schubspannungshypothese (Mohr) 239
 Schubspannungsverteilung 235
 Schubstangenverhältnis 197
 schwarzer Körper, Strahlungskonstante 57
 Schwellbelastung 311
 Schwellfestigkeit 267
 Schwerachse 202, 206, 219
 Schweredruck 207
 Schwerependel 196
 Schwerlinie 183
 Schwermetalle, niedrigschmelzende 68
 Schwerpunkt 182
 – eines Dreiecks 27
 Schwerpunktslage 220
 Schwingung, lineare 194
 –, periodische 194
 –, ungedämpfte 195
 Schwingungsbeginn 195
 Schwingungsdauer 194
 –, gemessene 197
 Schwingungsgehalt 140
 Schwingungsweite 195
 Schwingungszahl 195
 Schwungrad 296
 Sechseck 14
 –, regelmäßiges 13, 52
 Sechskantsäule 14
 Sechskantschraube M10, Bezeichnung 268
 –, Dehnlängen 260
 –, Dehnquerschnitte 260
 –, elastische Nachgiebigkeit 260
 –, F-Kontrolle 261
 –, geometrische Größen 268
 Sehnenlänge 13
 Seileck 181
 Seileckfläche 219
 Seileckverfahren 178
 Seilreibung 188
 Seilstrahl 181
 Seitenfreiwinkel 358 f.
 Seitenhalbierende 182
 Seitenkeilwinkel 358 f.
 Seitenkraft 206
 Seitenspanwinkel 358 f.
 –, Richtwerte 359
 Seitenvorschub 366
 Sekans 20
 Selbsthemmung 185 ff., 308
 Selbsthemmungsbedingung 185
 Selbstinduktion 131
 seltene Erden (Lanthanoiden) 67
 Senkrechte im Punkt P 49
 Senkschraube, Bezeichnung 268
 – mit Schlitz 268
 Senkung 268
 Setzbeträge, Richtwerte 263
 Setzkraft 263 f., 265
 Shore-Härte 285
 Shunt 123
 Sicherheit 294
 Siebeneck, regelmäßiges 52
 Siede- und Kondensationspunkt 174
 Siedetemperatur 162
 SI-Einheit 55
 Sinus 20
 Sinussatz 18
 Sinusschwingung 195
 – (harmonische Schwingung) 194
 Spanfläche 333
 Spannelement 309 f.
 – der axialen Spannkraft, Ermittlung der Anzahl 310
 Spannhülse 296 f.
 Spannkraft 188
 –, axiale 310
 Spannkraft, gegebene 257
 Spannsatz 308 f.
 Spannschloss 257
 Spannschraube 308
 Spannung am Innenrand 243
 –, elektrischer 58, 115 ff.
 –, rechnerischer 281
 Spannungserzeugung 130 f.
 Spannungsfall 115
 Spannungsfehlerschaltung 123
 Spannungsgleichungen (siehe Spannungsbild) 302
 Spannungshubgrenze 282
 Spannungsnachweis 217 f., 235 f.
 Spannungsquelle 119 f.
 Spannungsquerschnitt 258, 264
 –, erforderlicher 257 f., 259, 266
 Spannungsreihe 85
 Spannungsteiler 124
 Spannungsverlust 115
 Spannungsverteilung 235, 301
 – bei Biegebeanspruchung 228
 Spannungszustand, ebener 215
 –, einachsiger 215
 –, mehrachsiger 239
 Spannute 358
 Spannweg 309
 Spannungsbedingung 329, 354
 Spannungsbreite 328, 344, 354
 Spannungsbreitenexponent 338
 Spannungsdicke 328, 345, 354
 Spannungsdickenexponent 334, 338, 349, 360, 367
 Spannungsgröße 327, 343, 353
 Spannungsquerschnitt 328, 334, 337, 344, 354
 Spannungsverhältnis 328, 345
 Spannungsvolumen 337

- Spanwinkel 333, 366
 Spanwinkel-Korrekturfaktor 334
 Sperrbereich 151
 Spielpassung 247
 Spieltoleranzfeld 252, 255
 Spinquantenzahl 66
 Spiralbohrer, Richtwerte 355
 –, zweischneidige 353
 Spiralfeder 274
 Spitzenwinkel 358 f., 362
 – des Gewindes 186
 Sprengkraft 307
 –, (gesamte Verspannkraft) 307
 Sprungüberdeckung 320
 Stahl- und Stahlguss-Nabe 311, 314
 Stähle, Bezeichnungssystem 97
 Stahlflansch 261
 Stahlguss 101
 Stahl-Nabe 307
 Standardpotentiale 85
 Standgeschwindigkeit, Berechnung 339
 Standgleichung 338
 Standlänge 354 f.
 Standlängenexponent 355
 Standverhalten 338, 347
 Standweg 354
 Standzeit 329, 338, 355
 –, Berechnung 339
 –, wirkliche 330
 Standzeitexponent 329 f., 338
 Standzeitforderung, vorgegebene 329
 Standzeitvorgaben 329
 Statik der Flüssigkeiten 205
 statisch bestimmt 181
 – unbestimmt 181
 Staudruck 207, 211
 Staurand nach Prandtl 208
 Stefan-Boltzmann-Konstante 59
 – – Gesetz 165
 Steighöhe 190
 Steigung 270
 Steigung und Steigungswinkel 27
 Steigungswinkel 31, 267, 270
 – am Flankenradius 186
 – des Gewindes 264
 –, mittlerer 323
 Stelling 297
 Sternpunktleiter 148 f.
 Sternschaltung 148 ff.
 Sternspannung 148
 Steuerstrom 157
 Stiftverbindung 297
 Stirnfräsen 343 ff., 348
 –, außermittiges 349
 –, mittiges 349
 –, Schnittkraft 349
 Stirnmodul 319, 322
 Stirnschnitt 316, 318
 Stirnverzahnung 297
 Stoffmenge 87
 Stoffmengenkonzentration 88
 Stokes 206
 Stoß, gerader zentrischer 198
 –, vollkommen elastischer 198
 –, vollkommen unelastischer 198
 Stoßabschnitt 198
 Stoßanfall 313
 Stoßkraft 198
 Stoßlinie 198
 Stoßzahl 198
 Stoßzahlbestimmung 198
 Strahlungsaustauschzahl 165
 Strahlungsfluss 165
 – des wirklichen Körpers 165
 Strahlungskonstante 57
 –, allgemeine 165
 Strahlungszahl 176
 Strangspannung 148
 Strangstrom 148
 Strecke halbieren (Mittelsenkrechte) 49
 Streckenlast 219, 222
 Streckgrenze 95, 257 f., 291, 295, 313
 –, $R_{p0,2}$ 0,2-Dehngrenze 310
 Stromdichte 115
 Stromfehlerschaltung 123
 Stromflusswinkel 140, 160
 Stromstärke 115, 118
 –, elektrische 58
 Strömung, gestörte 207
 –, laminare 207, 210
 –, turbulente 207, 210
 Strömungsgeschwindigkeit 206 f.
 –, kritische 206
 Strömungsgleichungen 206
 Strömungsrichtung 207
 Stufensprung 329
 Stülpmittelpunkt 279
 Stützfläche 177
 Stützkraft 181, 222
 – bestimmen 219
 –, Biegemomente und Durchbiegungen 222 ff.
 Stützwirkung, statische 295
 Substitutionsgleichung 37
 Summenbremse 189
 Summenformel 21
 Summenregel 36
 Suszeptanz 141
 Symbole für Form und Lagetoleranzen nach DIN ISO 1101 250
 System, metastabiles 96
 –, metrisches 60
 –, stabiles 96
 systematische Benennung anorganischer Verbindungen 73
 – – organischer Verbindungen 74
 – – von Säuren und Säureresten 74
 Tangens 20
 Tangenssatz 18
 Tangente 51
 Tangentengleichung 29 ff.
 Tangentialbeschleunigung 194
 Tangentialkraft 200, 235
 Tangentialspannung 235, 240 f., 243

- Tangentialverzögerung 194
 Tangentkeil 296
 technische Stromrichtung 118
 Teilkegellänge 322
 –, mittlere 322
 Teilkegelwinkel 321
 Teilkreis 318
 Teilkreisdurchmesser 319, 322, 325
 Teilkreisgeschwindigkeit 326
 Teilkreisradius 318
 Teilkreisteilung 318
 –, Normalschnitt 319
 Teilkreisteilung, Stirnschnitt 319
 Tellerfeder 278, 282
 –, Auflagefläche 280
 –, Berechnung 271
 –, Querschnitt 279
 Tellerhöhe, lichte 279
 Tellerrad am Kraftfahrzeug 265
 Temperatur, thermodynamische 57, 163
 Temperaturänderung 218
 Temperaturbeiwert 116
 Temperatur-Fixpunkte 172
 Temperatur-Linie 163 f.
 Temperatur-Umrechnungen 172
 Tetmajer 233
 – -Gleichungen für Knickspannung 233 f.
 Thyristor 157 ff.
 Toleranzeinheit 246
 Toleranzen in Zeichnungen, Eintragung 248
 – und Passungen, Grundbegriffe 245 ff.
 Toleranzklasse, Eintragung 248
 Torsion und Abscheren 238
 Torsionsbeanspruchung, reine, Sicherheitsnachweis 291
 Torsionsbeanspruchung, Sicherheit 294
 Torsionsmoment 239, 288
 –, zulässiges 236
 Torsionspendel 196
 Torsionsschubspannung 239
 Torsionsspannung 258, 264
 –, vorhandene 236
 Torsionswechselfestigkeit 292
 Totlage 197
 Träger 221
 Tragfähigkeit, Berechnung nach DIN 743 291
 Trägheitskreis 220
 Trägheitsmoment 56, 195 f., 202 ff., 272
 –, Definitionsgleichung 202
 – für gegebene parallele Drehachse 202
 – für parallele Schwerachse 202
 – (Massenmomente 2. Grades), Gleichungen 203
 Trägheitsradius 202, 219, 228 ff.
 Tragtiefe 269 f.
 Transformator, einphasig 138
 Transistor 155 f.
 –, Kennwerte, Grenzwerte 156
 –, Verstärkung 156
 –, Vierquadranten-Kennlinienfeld 155
 Trapez 13
 Trapez-Blattfeder 273
 Trapezfläche 182
 Trapezgewinde 270
 Triac 159 f.
 Triebkraft (Kolbenkraft) 205
 trigonometrische Funktionen, Grundformeln 21
 Tripel 1

Überdruck 209
 Übergangspassung 247
 Übergangstoleranzfeld 252, 255
 Überlaufweg 340, 342, 350, 362
 Übermaß 298, 301
 – (Haftmaß) 299
 –, errechnetes 303
 Übermaßspassung 247, 298
 Übermaßstoleranzfeld 252, 255
 Übermaßverlust 298
 überschlägige Ermittlung des erforderlichen
 Spannungsquerschnitts und Wahl des Gewin-
 des 258
 Übersetzung 200, 318, 321, 323
 Übersetzungsverhältnis, Trafo 138
 Umdrehungsparaboloid 184
 Umfangseinstechschleifen 364
 Umfangsfräsen 343 ff., 348, 350
 –, Schnittkraft 348
 Umfangsgeschwindigkeit 55, 192 f., 197, 202,
 368
 – (Zahlenwertgleichung) 325
 – der Schleifscheibe 365
 – des Werkstücks 365
 Umfangskraft 188, 317
 –, Bezeichnungen 289
 –, Teilkreis 316
 Umfangslängsschleifen 363
 Umfangsschleifen, Einstechschleifen 365
 –, Längsschleifen 365
 Umfangsstirnfräsen 350
 Umkehrfunktion 6
 Umkreis, Radius 17
 Umkreisradius 13
 Umlaufdurchmesser 340
 Umlaufsinn 119
 Umrechnung von km/h in m/s 190
 – – Winkleinheiten 19
 Umrechnungstabelle für Leistungseinheiten 60
 – – metrische Längeneinheiten 60
 Umschlingungswinkel 188
 Umwandlung, passiver Wechselstromzweipole
 146
 –, Stern-Dreieck 150
 Unendlichkeitsstelle 43, 48
 Unterdruck 161
 Unterspannung 277
 Unterspannungsfestigkeit 277
 U-Stahl, Bezeichnung 228
 –, warmgewalzter rundkantiger 228

v, \dot{t} -Diagramm 190
 VDI-Richtlinie 2230 259
 Ventil 210, 212
 Verdampfungs- und Kondensationsenthalpie 174

- Verdampfungsenthalpie 162
 Verdreh Schub 285 f.
 Verfahrensfaktor, Aufbohren 360
 –, Bohren ins Volle 360
 Vergleichsmittelspannung 294
 Vergleichsmoment 240, 288
 Vergleichsspannung 239 f., 258, 288
 – (reduzierte Spannung) 264, 266
 –, Bestimmung 239
 Vergütungsstahl 100, 292
 Verlängerung 216 f.
 Verlustfaktor 141
 Verlustleistung 115 f., 151, 156 f.
 Verlustleistung im Antrieb 337
 – – Getriebe 337
 – – Motor 337
 Verschiebekraft 185
 –, resultierende 186
 Verschieberäder 297
 Verschieberädergetriebe 297
 Verschiebesatz von Steiner 202, 220
 Verschleißmarkenbreite 338
 Verspannkraft 307
 –, zentrische 261
 Verspannungsbild 262
 Verspannungsdiagramm 260, 262
 Verzögerung 191
 Vickershärte 94
 Vieleck 13
 –, regelmäßiges 13
 Viereck (Quadrat) 13
 Vier-Kräfteverfahren 180
 Vierschichtdiode 158
 Viéta 9
 Viskosität, dynamische 56
 –, kinematische 56
 V-Nullgetriebe 321
 Vollwelle und gleichelastische Werkstoffe, Form-
 änderungsgleichung 301
 Vollwinkel und rechter Winkel 19
 Vollzapfen 187
 Volumen 14, 184
 –, spezifisches 161, 166
 Volumenänderungsarbeit 167
 Volumenausdehnungskoeffizient 162 f., 174
 Volumendehnung 217
 Volumenstrom 207, 209
 –, (theoretischer) 208
 Volumenzunahme 162
 Vorschub 328, 333, 343
 – je Einzelkorn (Rundvorschub) 363 f.
 – – Schneide 353
 – pro Schneide 343
 –, Richtwerte 344, 353
 – DIN 803 (Auszug) 328
 Vorschubgeschwindigkeit 330, 337, 346, 355
 Vorschubkraft 335, 337, 349, 360
 Vorschubleistung 337, 361
 Vorschub-Normalkraft 349
 Vorschubreihe 328
 Vorschubrichtung 328
 Vorschubrichtungswinkel 344 f.
 Vorschubstufung 328
 Vorspannkraft 260, 262
 – für Riemen, Bezeichnungen 289
 –, gegebene axiale 258
 Vorspannung, innere 278
 Vorspannungskraftverlust 263
 Vorzeichenregeln 3
Walzenfräser, drallverzahnter 347
 –, geradverzahnter 347
 –, zylindrischer 346 f.
 Wälzlager 296, 325
 –, Bezeichnungen 287
 Wälzpunkt 316
 Wandrauigkeit, absolute 211 f.
 –, relative 210
 Wärme 57, 161
 –, spezifische 57, 161
 –, zu- oder abgeführte 168, 170
 Wärmeausdehnung 162
 – fester Körper 162
 – flüssiger Körper 162
 – von Gasen 162
 Wärmedurchgang 164
 Wärmedurchgangskoeffizient 57, 165
 Wärmedurchgangszahl 165, 176
 Wärmekapazität 118
 –, mittlere spezifische 161, 173
 –, spezifische 57, 166, 172
 Wärmeleitfähigkeit 57, 163
 Wärmeleitung 163
 Wärmeleitzahl fester Stoffe 175
 – von Flüssigkeiten 175
 – von Gasen 175
 Wärmemenge 57, 118, 161
 Wärmespannung 218
 Wärmestrahlung 165
 Wärmestrom 163 ff.
 Wärmeübergang 164
 Wärmeübergangskoeffizient 57, 164
 Wärmeübergangszahl 164, 175
 –, Formeln 164
 Wärmeübertragung 163 f.
 Wärmewirkungsgrad 118
 Wattsekunde 199
 Wechselbelastung 311
 Wechselgrößen, Kennwerte 139 f.
 –, Mischgrößen 140
 Wechselpermeabilität 136
 Wechselstromtechnik 139 ff.
 Weg 191
 Weitwinkelfräsen 347
 Welle 287 f.
 –, Toleranzfeld 303
 –, unteres Abmaß 303
 –, Normen (Auswahl) 286
 Welle-Nabe-Verbindungen, Kerbwirkungszahlen
 293
 Wellenbund 297
 Wellendrehmoment 299
 Wellendrehzahl 313
 Wellendurchmesser 288, 313

- , rechnerischer 288
- , überschlägige Ermittlung 288
- Wellenende, kegliges 296, 304, 306
- Wellenentwurf 288
- Wellenleistung 188
- Wellenmaße 246
- Wellennut 313
- Wellennuttiefe 313
- Welligkeit 140
- Wendepunkt 43, 48, 222
- Wendeschneidplatte 331
- Werkstoffe, anorganisch nichtmetallische 108
- , kurzspanende 334
- , langspanende 334
- Werkstoffvolumen 337
- Werkstück, Momentangeschwindigkeit 346
- Werkstückdrehzahl 329
- Werkstückform-Korrekturfaktor 335
- Werkzeug-Anwendungsgruppen 359
- – Richtwerte 358
- Werkzeugbewegung relativ zum Werkstück 351 f.
- Werkzeug-Bezugsebene 332
- -Bezugssystem 332
- Werkzeugdrehzahl 355, 361
- , erforderliche 346, 355
- Werkzeugkegel 305
- Werkzeug-Orthogonalebene 333
- Werkzeug-Schneidenebene 332
- Werkzeugverschleiß-Korrekturfaktor 335
- Werkzeugwinkel 332, 346, 358, 366
- am Bohrwerkzeug (Spiralbohrer) 358
- am Messerkopf 346
- Wertigkeit, stöchiometrische 71
- Wichte 161
- Wickelverhältnis 276 ff.
- Widerstand, elektrischer 58, 115
- in Rohrleitungen 209 f.
- , linearer 153
- , magnetischer 128
- , nichtlinearer 153
- , spezifischer 115 f.
- , temperaturabhängiger 116
- Widerstandsmoment 229 ff., 237
- , axiales 218, 220, 287
- , erforderliches 218
- , – polares (Zahlenwertgleichung) 236
- , polares 220, 264, 270
- Widerstandszahl 210
- von Leitungsteilen 212
- Windungssteigung 275
- Winkel halbieren 50
- , ebener 55
- Winkelbeschleunigung 55, 193 f., 202, 204
- Winkelgeschwindigkeit 55, 187, 192 f., 200, 202, 204, 240
- , maximale 196
- Winkelgeschwindigkeitslinie 193
- Winkelhalbierende 17, 28, 183
- Winkelstahl, Bezeichnung 229
- , ungleichschenkliger, Bezeichnung 230
- , warmgewalzter gleichschenkliger rundkantiger 229
- , – ungleichschenkliger rundkantiger 230
- Winkelverzögerung 194
- Wirkabstand 179, 235
- der Auflagereibung 186
- Wirkdruck 208
- Wirkgeschwindigkeit 330, 345 f., 355
- Wirkgröße 141
- Wirkleistung 361
- (Zerspanleistung) 337
- Wirkrichtungswinkel 345
- Wirkungsgrad 117 f., 188, 200, 205, 267, 324
- bei Lastheben 187
- des Rollenzugs 188
- , Kühlöldurchsatz und Schmierarten der Getriebe 326
- , thermischer 162, 171
- Wirkwiderstand 115, 141
- Wurf schräg nach oben (ohne Luftwiderstand) 192
- , senkrechter 190
- Wurfdauer 192
- Würfel 14
- Wurfgleichungen 192
- Wurfhöhe 192
- Wurfweite 192
- Wurzelgleichung 9
- Wurzelrechnung (Radizieren) 5
- Zähigkeit, dynamische 206, 210 f.
- , kinematische 206, 210 f.
- , Umrechnungen 206
- Zahl, komplexe 1, 7
- , rationale 1
- , reelle 1
- Zahlenpaar, konjugiert komplexes 7
- Zahn im Normalschnitt 316 ff.
- – Stirnschnitt 318
- Zahnbreite 318, 324
- Zahndicke 318
- , Kopfkreis 321
- Zahndickennennmaß, Normalschnitt 321
- , Stirnschnitt 320
- Zähnezahlverhältnis 318, 321
- Zahnfußhöhe 323
- Zahnhöhe 325
- Zahnkopfhöhe 320, 322
- Zahnrad 296 f.
- , Kräfte 315
- Zahnradgetriebe 315
- , Normen 315
- Zahnvorschub 344
- Zapfen 288
- , Normen (Auswahl) 286
- Zapfenradius 187
- Zapfenreibungszahl 187
- Z-Diode 154
- Zehneck 14
- Zehnerpotenz 5
- zeichnerische Bestimmung unbekannter Kräfte (zeichnerische Gleichgewichtsaufgabe) 180

- Zeichnung, Eintragung von Toleranzen 248
 Zeigerdiagramm 139, 148
 Zeit 191
 Zeitabschnitt 190
 Zeitdiagramm 139
 Zeitfestigkeit, Nachweis 282
 Zeitfestigkeitsdiagramm 282
 Zentipoise 206
 Zentrifugalmoment 219
 Zentripetalkraft 201
 Zentriwinkel 182
 Zerreißfestigkeit 285
 Zerspankraft 334 f., 348 f., 360, 367
 – am Einzelkorn 367
 – beim Umfangsschleifen 367
 –, Komponente 335
 Zerspantechnik 327
 –, Grundbegriffe 327
 –, Normen (Auswahl) 327
 Zug und Biegung 238
 Zug- und Druckbeanspruchung 217
 Zug/Druck und Torsion 239
 Zug/Druckwechselfestigkeit 292
 Zugbeanspruchung 285
 Zugfeder 271
 –, innere Vorspannkraft 278
 –, zylindrische 271
 Zugfestigkeit 95
 Zughauptgleichung 258
 Zugkraft 188, 258
 – wirkt parallel zur Ebene 185
 – – waagrecht 185
 Zugspannung 240, 257 f., 282
 –, größte 218
 –, mittlere tangentiale 302
 –, resultierende 238
 Zugversuch 95
 Zündspannung 159
 Zündstrom 159
 Zündwinkel 140, 160
 Zustandsänderung, adiabate 170 f.
 –, Carnot'scher Kreisprozess, Gleichungen 167
 –, isobare 168
 –, isochore 167, 169
 –, isotherme 169
 –, isovolume 167
 –, polytrope 170
 –, polytrope, Sonderfälle 170
 Zustandsgleichung idealer Gase, allgemeine 166
 Zweigelenkstab 177
 Zwei-Kräfteverfahren 180
 Zweipunkteform der Geraden 27
 Zweirichtungs-Diode 158
 – -Thyristordiode, Diac 158
 – -Thyristortriode, Triac 159
 Zweiweg-Gleichrichtung 140
 Zykloide 12
 Zykloidenbogen 45
 Zylinderdeckel-Verschraubung 259
 Zylinderfhrung 186
 Zylindermantel 203
 Zylinderspule 136
 Zylinderstift 297, 311